УДК 512.53

Я. В. Заціха (Інститут математики НАН України)

ПРО G-ПОВНІ НАПІВГРУПИ МАЛИХ ПОРЯДКІВ

In this paper we consider semigroups of order $n < 4$ that have not systems of generators with $m < n$ elements. It is given the full list of such semigroups up to isomorphism and dyality.

У цій роботі розглядаються напівгрупи порядку $n < 4$, які не мають систем твірних із $m < n$ елементів. Вказано повний список таких напівгруп з точністю до ізоморфізму та дуальності.

Групам малих порядків присвячено багато робіт і вони досить добре вивчені (див., напр., [1]). Напівгрупи малих порядків вивчені не в такій мірі і це пов'язано з тим, що число напівгруп конкретного порядку набагато більше, ніж груп (наприклад, число напівгрупп порядків 5, 6, 7 дорівнює відповідно 1160, 15973, 836021). Більшість задач про повний опис напівгруп фіксованого порядку отримано з використанням комп'ютерних програм. Зауважимо, що під описом ми маємо на увазі опис з точністю до ізоморфізму та дуальності. Напівгрупи, що розглядаються з такою точністю, називаються різними.

Напівгрупи порядку $n < 4$ описані ще в 1955 році (див. [2]). Напівгрупа порядку 1 лише одна, а напівгрупи із 2-х елементів a і b вичерпуються чотирьма наступними напівгрупами:

$$1)\ a^2 = b^2 = ab = ba = a; \quad 2)\ a^2 = ab = ba = a,\ b^2 = b;$$
$$3)\ a^2 = ab = a,\ b^2 = ba = b; \quad 4)\ a^2 = b^2 = a,\ ab = ba = b.$$

Напівгрупи порядку n, які не мають систем твірних із $m < n$ елементів, називаються g-повними (це поняття запропоноване В. М. Бондаренком). Легко бачити, що напівгрупи 1) і 4) мають систему твірних із одного елемента, а напівгрупи 2) і 3) є g-повними.

Наступна теорема описує всі g-повні напівгрупи третього порядку.

Теорема 1. *Попарно різні g-повні напівгрупи 3-го порядку вичерпуються напівгрупами з наступними таблицями Келі:*

	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$
$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$
$\langle 1\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 1\rangle$
$\langle 2\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$

	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$
$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$
$\langle 1\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 1\rangle$
$\langle 2\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 2\rangle$	$\langle 2\rangle$

	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$
$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$
$\langle 1\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$
$\langle 2\rangle$	$\langle 2\rangle$	$\langle 2\rangle$	$\langle 2\rangle$

	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$
$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$
$\langle 1\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 1\rangle$
$\langle 2\rangle$	$\langle 2\rangle$	$\langle 2\rangle$	$\langle 2\rangle$

.

При доведенні теореми будемо користуватися результатами роботи [3].

Випишемо повний список попарно різних напівгруп 3-го порядку в такому вигляді (і з тєю ж нумерацією), як в [3].

1)

	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$
$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$
$\langle 1\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$
$\langle 2\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$

2)

	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$
$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$
$\langle 1\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$
$\langle 2\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$

3)

	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$
$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$
$\langle 1\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$
$\langle 2\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 2\rangle$

4)

	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$
$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$
$\langle 1\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$
$\langle 2\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$

5)

	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$
$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$
$\langle 1\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$
$\langle 2\rangle$	$\langle 2\rangle$	$\langle 2\rangle$	$\langle 2\rangle$

6)

	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$
$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$
$\langle 1\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$
$\langle 2\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$

7)

	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$
$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$
$\langle 1\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 0\rangle$
$\langle 2\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 2\rangle$

8)

	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$
$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$
$\langle 1\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 0\rangle$
$\langle 2\rangle$	$\langle 2\rangle$	$\langle 2\rangle$	$\langle 2\rangle$

9)

	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$
$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$
$\langle 1\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 1\rangle$
$\langle 2\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 1\rangle$

10)

	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$
$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$
$\langle 1\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 1\rangle$
$\langle 2\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$

11)

	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$
$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$
$\langle 1\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 1\rangle$
$\langle 2\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 2\rangle$	$\langle 2\rangle$

12)

	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$
$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$
$\langle 1\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$
$\langle 2\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 2\rangle$	$\langle 1\rangle$

13)

	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$
$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$
$\langle 1\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$
$\langle 2\rangle$	$\langle 2\rangle$	$\langle 2\rangle$	$\langle 2\rangle$

14)

	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$
$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$
$\langle 1\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 1\rangle$
$\langle 2\rangle$	$\langle 2\rangle$	$\langle 2\rangle$	$\langle 2\rangle$

15)

	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$
$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 2\rangle$
$\langle 1\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 2\rangle$
$\langle 2\rangle$	$\langle 2\rangle$	$\langle 2\rangle$	$\langle 0\rangle$

16)

	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$
$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 2\rangle$
$\langle 1\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$
$\langle 2\rangle$	$\langle 2\rangle$	$\langle 2\rangle$	$\langle 0\rangle$

17)

	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$
$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 1\rangle$
$\langle 1\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$
$\langle 2\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$

18)

	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$
$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$
$\langle 1\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$	$\langle 0\rangle$
$\langle 2\rangle$	$\langle 2\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$

.

У роботі [3] над кожною із вісімнадцяти вказаних таблиць Келі здійснено перетворення, які виділяють деяку мінімальну систему твірних (це елементи, які в заключних таблицях набрані звичайним шрифтом, на відміну від елементів, що не попали в мінімальну систему твірних, які набрані жирним шрифтом). І безпосередньо видно, що в усіх випадках, окрім випадків 10), 11), 13) і 14) виділена мінімальна система твірних містить менше трьох елементів. А для таблиць Келі у випадках 10), 11), 13) і 14) (які вказані в умові теореми) систем твірних із одного або двох елементів немає. Отже, теорема 1 має місце.

1. *Холл М.* Теория групп. М.: Иност. лит., 1962. — 468 с.
2. *Forsythe G. E.* SWAC computes 126 distinct semigroups of order 4 // Proc. Amer. Math. Soc. – 1955. – **6**. – P. 443-447.
3. *Бондаренко В. М., Заціха Я. В.* Про визначальні співвідношення для мінімальних систем твірних напівгруп третього порядку // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова (Серія 1. Фізико-математичні науки). – 2013. – №14. – С. 62-67.

Одержано 06.12.2014