УДК 519.63

**В. О. Петенько** (Ужгородський нац. ун-т)

# ПРО НАБЛИЖЕНЕ ЗНАХОДЖЕННЯ ФУНДАМЕНТАЛЬНОГО РОЗВ'ЯЗКУ ОДНОГО РЕГУЛЯРНОГО ЗА Г. Є. ШИЛОВИМ РІВНЯННЯ

The idea of equivalent changing the implicit different scheme to evolutionary is proposed and the algorithm of numerical solving of the problem is constructed in this work.

В роботі запропонована ідея заміни неявної різницевої схеми на еволюційну і побудований алгоритм числового розв'язання задачі.

Відомо, наприклад [1], що фундаментальний розв'язок простішого рівняння дифузії

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ u = u(x,t),\ x \in \mathbb{R},\ t \geq 0,$$

а саме, функція

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_R e^{-isx - s^2 t} ds,$$

є щільністю розподілу вінерівського процесу, і задача наближеного знаходження такого розв'язку може бути зведена до знаходження згорток розподілів однаково розподілених гратчастих випадкових величин, породжених вибраною різницевою схемою; збіжність таких схем, яка розуміється як збіжність наближеного розв'язку до точного, доводиться з використанням локальної граничної теореми для гратчастих розподілів, як це описано в роботі [2]. В цій роботі запропонований підхід до чисельного знаходження і задачі Коші, а також граничних задач на відрізку та півосі. Поглиблюючи цю думку, тобто використовуючи квазіймовірнісні міркування, аналогічні результати були отримані для випадків еволюційних рівнянь виду

$$\frac{\partial u}{\partial t} = (-1)^{q+1} \frac{\partial^{2q} u}{\partial x^{2q}} \text{ та } \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^{2q+1} u}{\partial x^{2q+1}},\ q = 1, 2, 3, \ldots$$

Перше з цих рівнянь генерує гратчасті випадкові величини з від'ємними, а друге – з комплекснозначними "ймовірностями" [3, 4].

В даній статті досліджується ситуація, відповідна рівнянню

$$\frac{\partial^3 u}{\partial t^3} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{1}$$

яке є регулярним за Г. Є. Шиловим [5].

Розглянемо задачу чисельного знаходження фундаментального розв'язку рівняння (1). На прикладі наближеного розв'язання цієї задачі проілюструємо ідею використання одного специфічного виду методу дробових кроків для одержання двошарової (еволюційної) різницевої схеми замість природної для неї за рахунок лівої частини (1) чотиришарової, в сенсі участі чотирьох рівнів. Перевага застосування еволюційної двошарової схеми з імовірнісною чи квазіймовірнісною інтерпретацією полягає в тому, що дозволяє одержати алгоритм наближеного розв'язування задачі, використовуючи обчислення згорток, а також довести збіжність такого алгоритму з використанням апарату локальних граничних теорем для гратчастих випадкових величин імовірнісного та квазіймовірнісного змісту. При цьому варто нагадати, що щільності стійких процесів з дробовими показниками стійкості є фундаментальними розвязками відповідних диференціальних рівнянь з частинними похідними [6].

Зокрема, рівняння (1) має фундаментальним розв'язком функцію

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{R_i} e^{-isx-s^{\frac{2}{3}}t}ds, \tag{2}$$

яка є щільністю стійкого процесу з показником $\frac{2}{3}$.

Питання, пов'язані з дослідженнями в напрямку зв'язків щільності стійких розподілів з рівняннями математичної фізики вивчав П. Меддєші [6], хоча його багаточисленні результати в цьому плані більше стосувались аналітичних властивостей щільностей.

Як і в класичному випадку, виберемо на півплощині сітку з кроком $\Delta x$ вздовж просторової координати $x$ та $\Delta t$ – вздовж часової $t$. Знайдемо різницевий аналог рівняння (1). Замінимо часткові похідні скінченими різницями по схемі:

$$\frac{\partial^3 u}{\partial t^3} \to \frac{u_\Delta(x,t+3\Delta t) - 3u_\Delta(x,t+2\Delta t) + 3u_\Delta(x,t+\Delta t) - u_\Delta(x,t)}{\Delta t^3},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \to \frac{u_\Delta(x+\Delta x,t) - 2u_\Delta(x,t) + u_\Delta(x-\Delta x,t)}{\Delta x^2},$$

де $u_\Delta(x,t)$ – сіткова функція, розглядувана на множині вузлів сітки виду:

$$\{(x,t)\} = \{(k\Delta x, n\Delta t)\},$$

$k$ – ціле, $n$ – додатне ціле. Зафіксуємо зв'язок між кроками

$$\frac{\Delta t^3}{\Delta x^2} = \beta^3,\ \ \beta > 0. \tag{3}$$

В результаті одержуємо різницевий аналог рівняння (1) у вигляді

$$u_\Delta(k\Delta x,(n+3)\Delta t) - 3u_\Delta(k\Delta x,(n+2)\Delta t) + 3u_\Delta(k\Delta x,(n+1)\Delta t) - u_\Delta(k\Delta x,n\Delta t) =$$

$$= \beta^3 u_\Delta((k+1)\Delta x,n\Delta t) - 2\beta^3 u_\Delta(k\Delta x,n\Delta t) + \beta^3 u_\Delta((k-1)\Delta x,n\Delta t), k\in\mathbb{Z}, n\in\mathbb{N}. \tag{$1'$}$$

Наближене розв'язання будь-якої крайової задачі для рівняння (1) за схемою розташування вузлів зводиться до розв'язання системи лінійних рівнянь з величезною кількістю невідомих.

Найближче наше завдання полягає у зведенні задачі розв'язання системи ($1'$) до значно простішої задачі.

З метою спрощення записів введемо наступні скорочення

$$u_\Delta\left(\left(n+\frac{l}{3}\right)\Delta x,(n+m)\Delta t)\right) = (l,m),\ \ l = 0,\pm1,\pm2,\pm3;\ m = 0,1,2,3.$$

Враховуючи це, одержимо різницевий аналог рівняння (1) у вигляді

$$(0,3) - 3(0,2) + 3(0,1) - (0,0) = \beta^3(3,0) - 2\beta^3(0,0) + \beta^3(-3,0). \qquad (1^*)$$

Згідно із способом розташування вузлів рівняння $(1')$ визначає чотиришарову різницеву схему, зображену на рис. 1.

Вузли, позначені на рис. 1 кружечками, пов'язані одним окремим рівнянням із системи $(1')$.

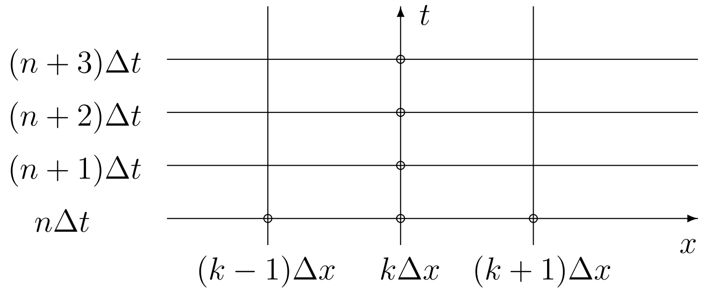


Рис. 1

Нехай $\varepsilon$ – первісний корінь з одиниці порядку 3, тобто $1, \varepsilon, \varepsilon^2$ – комплексні корені рівняння $x^3 = 1$, $1 + \varepsilon + \varepsilon^2 = 0$.

Пропонуються різницеві рівняння трьох рівнів (шарів).

Різницеве рівняння третього рівня має вигляд

$$(0,3) = \beta(1,2) + (1-2\beta)(0,2) + \beta(-1,2); \qquad (4)$$

різницеві рівняння другого рівня

$$\begin{cases} (1,2) = \varepsilon\beta(2,1) + (1-2\varepsilon\beta)(1,1) + \varepsilon\beta(0,1), \\ (0,2) = \beta(1,1) + (1-2\beta)(0,1) + \beta(-1,1), \\ (-1,2) = \varepsilon^2\beta(0,1) + (1-2\varepsilon^2\beta)(-1,1) + \varepsilon^2\beta(-2,1); \end{cases} \qquad (5)$$

і, наостанок, різницеві рівняння першого рівня

$$\begin{cases} (2,1) = \varepsilon^2\beta(3,0) + (1-2\varepsilon^2\beta)(2,0) + \varepsilon^2\beta(1,0), \\ (1,1) = \varepsilon\beta(2,0) + (1-2\varepsilon\beta)(1,0) + \varepsilon\beta(0,0), \\ (0,1) = \beta(1,0) + (1-2\beta)(0,0) + \beta(-1,0), \\ (-1,1) = \varepsilon^2\beta(0,0) + (1-2\varepsilon^2\beta)(-1,0) + \varepsilon^2\beta(-2,0), \\ (-2,1) = \varepsilon\beta(-1,0) + (1-2\varepsilon\beta)(-2,0) + \varepsilon\beta(-3,0). \end{cases} \qquad (6)$$

Підставимо значення з рівнянь першого рівня (6) в рівняння другого рівня (5), одержуємо

$$\begin{cases} (1,2) = \beta^2(3,0) + (2\varepsilon\beta + 2\varepsilon\beta^2)(2,0) + (1-4\varepsilon\beta + 3\varepsilon^2\beta^2)(1,0) + (2\varepsilon\beta + 2\beta^2)(0,0) + \varepsilon\beta^2(-1,0), \\ (0,2) = \varepsilon\beta^2(2,0) + (2\beta + 2\varepsilon^2\beta^2)(1,0) + (1-4\beta + 3\beta^2)(0,0) + (2\beta + 2\varepsilon\beta^2)(-1,0) + \varepsilon^2\beta^2(-2,0), \\ (-1,2) = \varepsilon^2\beta^2(1,0) + (2\varepsilon^2\beta^2 + 2\beta^2)(0,0) + (1-4\varepsilon^2\beta + 3\varepsilon\beta^2)(-1,0) + (2\varepsilon^2\beta + 2\varepsilon^2\beta^2)(-2,0) + \beta^3(-3,0). \end{cases} \qquad (7)$$

Одержані значення підставимо в різницеве рівняння третього рівня (4). Маємо

$$(0,3) = \beta^3(3,0) + 3\varepsilon\beta^2(2,0) + (3\beta + 6\varepsilon^2\beta^2)(1,0) + (1 - 6\beta - 2\beta^3 + 9\beta^2)(0,0)+$$

$$+(3\beta + 6\varepsilon\beta^2)(-1,0) + 3\varepsilon^2\beta^2(-2,0) + \beta^3(-3,0).$$

Одержане значення (0,3), значення (0,2) із формули (7), та (0,1) – із (6) підставимо у ліву частину рівняння (1*) та одержимо праву частину (1*).

Таким чином нами доведена

**Теорема 1.** *Еволюційна схема з послідовним переходом до рівнянь першого рівня до другого і третього приводить до такого ж результату, що і неявна схема* (1*).

Згідно з цим результатом, наближений розв'язок $u_\Delta(k\Delta x, n\Delta t)$ можна знаходити, використовуючи вже двошарову (еволюційну) різницеву схему, яка грунтується на приєднанні додаткових вузлів сітки з кроками $\frac{\Delta x}{3}$ вздовж просторової осі $x$ та $\Delta t$ – вздовж осі $t$.

Схема розташування вузлів видозмінюється (нарощується), як це показано на рисунку 2.

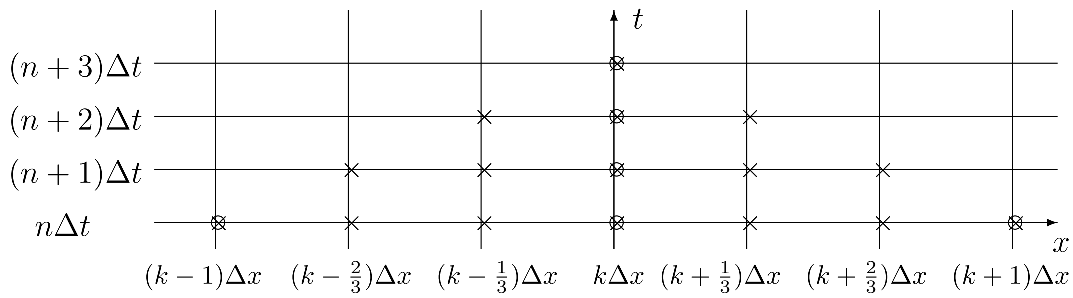


Рис. 2

Вузли виду $(k\Delta x, n\Delta t)$, позначені кружечками, природно вважати основними, а виду $\left(\frac{l\Delta x}{3}, n\Delta t\right)$, позначені зірочками, – допоміжними. Очевидно, що значення наближеного розв'язку знаходяться через значення в допоміжних і в наступному зосередимося на значеннях у всіх (і основних, і допоміжних) вузлах, які можна знаходити вже за двошаровою еволюційною схемою.

Переходи (знизу догори) з кожного шару на наступний відбуваються за правилом:

$$u_\Delta(k\Delta x,(n+1)\Delta t) = q_{-1}u_\Delta\left(\left(k+\frac{1}{3}\right)\Delta x, n\Delta t\right) + p_0 u_\Delta(k\Delta x, n\Delta t) + r_1 u_\Delta\left(\left(k-\frac{1}{3}\right)\Delta x, n\Delta t\right), \quad (8)$$

$$u_\Delta\left(\left(k+\frac{1}{3}\right)\Delta x, n\Delta t\right) = r_{-1}u_\Delta\left(\left(k+\frac{2}{3}\right)\Delta x, n\Delta t\right) + q_0 u_\Delta\left(\left(k+\frac{1}{3}\right)\Delta x, n\Delta t\right) + p_1 u_\Delta(k\Delta x, n\Delta t), \quad (9)$$

$$u_\Delta\left(\left(k-\frac{1}{3}\right)\Delta x, n\Delta t\right) = p_{-1}u_\Delta(k\Delta x, n\Delta t) + r_0 u_\Delta\left(\left(k-\frac{1}{3}\right)\Delta x, n\Delta t\right) + q_1 u_\Delta\left(\left(k-\frac{2}{3}\right)\Delta x, n\Delta t\right), \quad (10)$$

де

$$
\begin{aligned}
&p_{-1} = p_1 = \beta, &&p_0 = 1 - 2\beta;\\
&q_{-1} = q_1 = \varepsilon\beta, &&q_0 = 1 - 2\varepsilon\beta;\\
&r_{-1} = r_1 = \varepsilon^2\beta, &&r_0 = 1 - 2\varepsilon^2\beta.
\end{aligned}
\tag{11}
$$

Звертаючись до ймовірнісної чи квазіймовірнісної інтерпретації, пов'язуючи її з дискретними процесами типу ланцюгів Маркова [2–4], випадкові величини, що породжуються різницевими рівняннями (8), (9) і (10), позначимо через $\xi_0$, $\xi_1$ і $\xi_{-1}$. Вони є гратчастими з кроком гратки $\frac{\Delta x}{3}$ і мають розподіли

$$
\begin{array}{c|c|c|c}
\xi_0 & -\frac{\Delta x}{3} & 0 & \frac{\Delta x}{3}\\ \hline
p & p_{-1} & p_0 & p_1
\end{array},\quad
\begin{array}{c|c|c|c}
\xi_1 & -\frac{\Delta x}{3} & 0 & \frac{\Delta x}{3}\\ \hline
q & q_{-1} & q_0 & q_1
\end{array},\quad
\begin{array}{c|c|c|c}
\xi_{-1} & -\frac{\Delta x}{3} & 0 & \frac{\Delta x}{3}\\ \hline
r & r_{-1} & r_0 & r_1
\end{array}.
\tag{12}
$$

Оскільки $\varepsilon$ – комплексне число $\left(\varepsilon = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$, то випадкові величини $\xi_1$ і $\xi_{-1}$ підпадають під класифікацію квазіймовірнісних. Випадкова величина $\xi_0$ при $0 < \beta \leq \frac{1}{2}$ є чисто імовірнісною в класичному сенсі.

Сукупність рівнянь (8), (9) і (10) генерують процес квазіймовірнісного блукання частинки по одновимірній гратці $\left\{\frac{l\Delta x}{3}\right\}$. При цьому величина $u_\Delta\left(\frac{l\Delta x}{3}, n\Delta t\right)$ інтерпретується як імовірність (квазіймовірність) блукаючої частинки в момент часу $n\Delta t$ знаходитись в точці з координатою $\frac{l\Delta x}{3}$. Зміщення частинки відбувається в момент часу, кратні $\Delta t$. Таке блукання неоднорідне в просторі (на прямій), оскільки "ймовірності" зміщення залежать від місцезнаходження блукаючої частинки. Знаходячись, наприклад, в момент часу $n\Delta t$ в точці з координатою $\left(k + \frac{1}{3}\right)\Delta x$, "ймовірність" зміщення за час $\Delta t$ на $\frac{\Delta x}{3}$ вліво дорівнює $q_{-1}$, зміщуватись вліво на величину $\frac{\Delta x}{3}$ з точки $\left(k - \frac{1}{3}\right)\Delta x$ за час $\Delta t$ частинка буде з "ймовірністю" $r_{-1}$. По часу таке блукання є однорідним і може бути однорідним ланцюгом Маркова (в квазіймовірнісному сенсі).

Можливими станами ланцюга є вузли гратки $\left\{\frac{l\Delta x}{3}\right\}$. Матрицею переходу такого ланцюга Маркова є матриця $P$.

$$
P = \begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccccc}
\dots & -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & \dots
\end{array}\\
\left(\begin{array}{ccccccccc}
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\
\vdots & p_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots\\
\vdots & q_{-1} & q_0 & q_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots\\
\vdots & 0 & r_{-1} & r_0 & r_1 & 0 & 0 & 0 & \vdots\\
\vdots & 0 & 0 & p_{-1} & p_0 & p_1 & 0 & 0 & \vdots\\
\vdots & 0 & 0 & 0 & q_{-1} & q_0 & q_1 & 0 & \vdots\\
\vdots & 0 & 0 & 0 & 0 & r_{-1} & r_0 & r_1 & \vdots\\
\vdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_{-1} & p_0 & \vdots\\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots
\end{array}\right)
\end{array}
\begin{array}{c}
\\ \dots\\ -3\\ -2\\ -1\\ 0\\ 1\\ 2\\ 3\\ \dots
\end{array}
\tag{13}
$$

Матриця $P$ є тридіагональною, сума елементів довільного її рядка дорівнює одиниці, не містить нульового стовпця і має всі властивості стохастичних матриць, відповідних класичним однорідним ланцюгам Маркова.

З іншого боку, вона відповідає процесу випадкового блукання при умові початку блукання в нулі і, згідно з нашою інтерпретацією різницевих рівнянь, перехід за перший крок має чисто ймовірнісний розподіл, який співпадає з нульовим рядком матриці $P$.

Перехід за два кроки вже не має чисто ймовірнісного характеру. Цей квазіймовірнісний розподіл дає нульовий рядок матриці $P^2$. Аналогічна ситуація з переходом за три, чотири і т. д. кроки.

На відміну від випадку процесів, які генеруються різницевими аналогами еволюційних рівнянь з наявністю в лівій частині першої похідної по часу, описаних в згаданих роботах [2–4], даний випадок має істотні відмінності.

Матриця $P$ є основним засобом наближеного знаходження фундаментального розв'язку рівняння (1).

Система різницевих рівнянь (8)–(10) з приєднанням різницевого аналога початкової умови

$$u(x,0)=\delta(x), \tag{14}$$

де $\delta(x)$ – $\delta$-функція Діраки. тобто умова виду

$$U_\Delta\left(\frac{m\Delta x}{3},0\right)=0,\, m\neq 0,\, U_\Delta(0,0)=\frac{3}{\Delta x} \tag{15}$$

і є різницевим аналогом задачі знаходження фундаментального розв'язку рівняння (1) на сітці з кроками $\frac{\Delta x}{3}$ і $\Delta t$.

З рівнянь (8), (9) і (10) з врахуванням (15) при $n=0$ одержуємо

$$u_\Delta\left(\frac{k\Delta x}{3},\Delta t\right)=\frac{3p_k}{\Delta x},\ k=0,\pm 1.$$

При $n=1$

$$u_\Delta\left(\frac{k\Delta x}{3},2\Delta t\right)=\frac{3P_2(k)}{\Delta x},\ k=0,\pm 1,\pm 2,$$

де $\{P_2(k)\}$ – квазіймовірнісний розподіл, одержаний як нульовий рядок матриці $P^2$.

Якщо $n=2$, то

$$u_\Delta\left(\frac{k\Delta x}{3},3\Delta t\right)=\frac{3P_3(k)}{\Delta x},\ k=0,\pm 1,\pm 2,\pm 3,$$

де $\{P_3(k)$ співпадає з нульовим рядком матриці $P^3$ і т. д.

Для довільного натурального $n$ маємо

$$u_\Delta\left(\frac{k\Delta x}{3},n\Delta t\right)=\frac{3P_n(k)}{\Delta x},\ k=0,\pm 1,\pm 2,...,\pm n. \tag{16}$$

Формула (16) дає можливість обчислити наближений розв'язок в задачі знаходження фундаментального розв'язку рівняння (1) на $n$-у шарі (рівні), для цього потрібно знайти нульовий рядок матриці $P^n$. Таке завдання відносно просто реалізується на ЕОМ.

Як вже згадувалось, вибране нами рівняння (1), яке є щільністю стійкого процесу показника $\frac{2}{3}$, є ілюстративним і служить меті зменшення об'єму обчислень і викладок. Розглядаючи, наприклад, рівняння $\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}=-\frac{\partial^4 u}{\partial t^4}$, яке є щільністю стійкого процесу показника $\frac{4}{3}$, для нього відповідна гратчаста випадкова величина, яка є генеруючою, має квазіймовірнісний розподіл:

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c} \xi_0 & -\frac{2\Delta x}{3} & -\frac{\Delta x}{3} & 0 & \frac{\Delta x}{3} & \frac{2\Delta x}{3} \\ \hline p & -\beta & 4\beta & 1-6\beta & 4\beta & -\beta \end{array}.$$

Відповідно зміняться і розподіли $\xi_{-1}$ і $\xi_1$.

## Список використаної літератури


1. *Гельфанд И. М., Яглом А. М.* Интегрирование в функциональных пространствах и его применение в квантовой физике // Успехи матем. наук. – 1956.– **XI**, вып. 1(67). – С. 77–114.
2. *Петенько В. О.* Про один різницевий розв'язок задачі теплопровідності на відрізку та півосі // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. – 1994. – Вип. 1. – С. 101–105.
3. *Петенько В. А.* О разностном решении граничных задач для уравнений параболического типа высшего порпядка // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ. – 2002. – Вип. 7. – С. 82–89.
4. *Петенько В. О.* Про локальну граничну теорему для квазіймовірнісних гратчастих розподілів і її застосування до наближеного знаходження фундаментального розв'язку рівняння типу Ейрі // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ. – 2012. – Вип. 23(1). – С. 99–106.
5. *Шилов Г. Е.* Математический анализ. Второй специальный курс. – Москва: Наука, 1965. – 328 с.
6. *Medgyesi P.* Stabilis valoszinűsèg fűggvènyekre fenuàllo parcìàlis differencialegyenletetek ès alkalmazàsaik // Publ. Math. Inst. Hung. Ac. Sci. – 1956.


Одержано 14.04.2015