

УДК 517.5

В. Я. Рибак, Ю. М. Сегеда (Ужгородський нац. ун-т)

ПРО УЗАГАЛЬНЕННЯ ЧИСЕЛ БЕРНУЛЛІ

By using the fractional integrodifferentiation the Bernoulli numbers as functions of discrete argument generalized to the continuous functions.

Числа Бернуллі – функції дискретного аргументу – узагальнюються до неперервних функцій.

Числа Бернуллі є коефіцієнтами при розгортанні у степеневий ряд виразу $\frac{x}{e^x-1}$, а саме:

$$\frac{x}{e^x-1} = \sum_{i=0}^{\infty} B_i \frac{x^i}{i!}; \quad |x| < 2\pi. \quad (1)$$

Наводимо значення декількох із них: $B_0 = 1$; $B_1 = -\frac{1}{2}$; $B_2 = \frac{1}{6}$; $B_4 = \frac{1}{30}$; $B_6 = \frac{1}{42}$; $B_8 = -\frac{1}{30}$; $B_{10} = \frac{5}{66}$; $B_{2k+1} = 0$, $k = 1, 2, 3, \dots$

Використовуючи ці числа для асимптотичного подання $\ln \Gamma(x)$, логарифмічної похідної $\varphi(x)$ гамма-функції $\Gamma(x)$, розгортання у степеневий ряд $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$, $\operatorname{cosec} x$ тощо.

У виразі (1) покладемо $e^x - 1 = u$, $x = \ln(u + 1)$. Тоді

$$\frac{x}{e^x-1} = \frac{\ln(u+1)}{u} = 1 - \frac{u}{2} + \frac{u^2}{3} - \frac{u^3}{4} + \dots, \quad (-1 < u \leq 1).$$

Повертаємося до початкової незалежної змінної:

$$\begin{aligned} \frac{x}{e^x-1} &= 1 - \frac{1}{2}(e^x - 1) + \frac{1}{3}(e^x - 1)^2 - \frac{1}{4}(e^x - 1)^3 + \dots = \\ &= 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \right) + \frac{1}{3} \left[\frac{x^2}{2!} (2^2 - 2 \cdot 1^2) + \frac{x^3}{3!} (2^3 - 2 \cdot 1^3) + \frac{x^4}{4!} (2^4 - 2 \cdot 1^4) \dots \right] - \\ &- \frac{1}{4} \left[\frac{x^3}{3!} (3^3 - 3 \cdot 2^3 + 3 \cdot 1^3) + \frac{x^4}{4!} (3^4 - 3 \cdot 2^4 + 3 \cdot 1^4) + \dots \right] = \\ &= 1 - \frac{1}{2} \frac{x}{1!} + \left(-\frac{1^2}{2} + \frac{2^2 - 2 \cdot 1^2}{3} \right) \frac{x^2}{2!} - \left(\frac{1^3}{2} - \frac{2^3 - 2 \cdot 1^3}{3} + \frac{3^3 - 3 \cdot 2^3 + 3 \cdot 1^3}{4} \right) \frac{x^3}{3!} + \dots \end{aligned}$$

Враховуюмо означення чисел Стірлінга другого роду [1]

$$\sigma_m^{(n)} = \frac{1}{n!} \sum_{i=0}^0 (-1)^i \binom{n}{i} (n-i)^m$$

і переписуємо попередній вираз у такому вигляді:

$$\begin{aligned} \frac{x}{e^x-1} &= 1 - \sigma_1^{(1)} \frac{x}{1!} + \left(\sigma_2^{(2)} \frac{2!}{3} - \sigma_2^{(1)} \frac{1!}{2} \right) \frac{x^2}{2!} - \left(\sigma_3^{(3)} \frac{3!}{4} - \sigma_3^{(2)} \frac{2!}{3} + \sigma_3^{(1)} \frac{1!}{2} \right) \frac{x^3}{3!} + \\ &+ \left(\sigma_4^{(4)} \frac{4!}{5} - \sigma_4^{(3)} \frac{3!}{4} + \sigma_4^{(2)} \frac{2!}{3} - \sigma_4^{(1)} \frac{1!}{2} \right) \frac{x^4}{4!} - \dots \quad (2) \end{aligned}$$

Із порівняння з (1) випливає

$$B_1 = -\sigma_1^{(1)} \frac{1!}{2}; \quad B_2 = \sigma_2^{(2)} \frac{2!}{2} - \sigma_1^{(1)} \frac{1!}{2}; \quad B_3 = -\left(\sigma_3^{(3)} \frac{3!}{4} - \sigma_3^{(2)} \frac{2!}{3} + \sigma_3^{(1)} \frac{1!}{2}\right);$$

$$B_n = (-1)^n \left(\sigma_n^{(n)} \frac{n!}{n+1} - \sigma_n^{(n-1)} \frac{(n-1)!}{n} + \sigma_n^{(n-2)} \frac{(n-2)!}{n-1} - \dots - (-1)^n \sigma_n^{(1)} \frac{1!}{2}\right) =$$

$$= 0^n + \sum_{k=1}^n (-1)^k \sigma_n^{(k)} \frac{k!}{k+1}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3)$$

Зважаючи на те, що $\sigma_n^{(k)} = 0$, якщо $k > n$, значення для B_n можна записати і так:

$$B_n = 0^n + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \sigma_n^{(k)} \frac{k!}{k+1}. \quad (4)$$

А звідси випливає можливість розширити дискретні значення B_n до неперервних $B(r)$, де $r \in \mathbf{R}, r \leq 0$

$$B(r) = 0^r + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \sigma_n^{(k)} \frac{k!}{k+1}. \quad (5)$$

Доданок 0^r потрібен лише для реалізації значення $B(0) = 1$

$$0^r + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \varepsilon^r. \quad (6)$$

Множники $\sigma_r^{(k)}$ тут слід вже сприймати як узагальнені числа Стірлінга другого року [2].

Дослідження збіжності ряду, в який розгортається $\sigma_r^{(k)}$, проведено в [2]. На цій підставі стверджуємо, що й ряд (5) рівномірно збігається до своєї суми.

На рис. 1 і 2 показано характер протікання залежності $B(r)$ для різних значень аргументу.

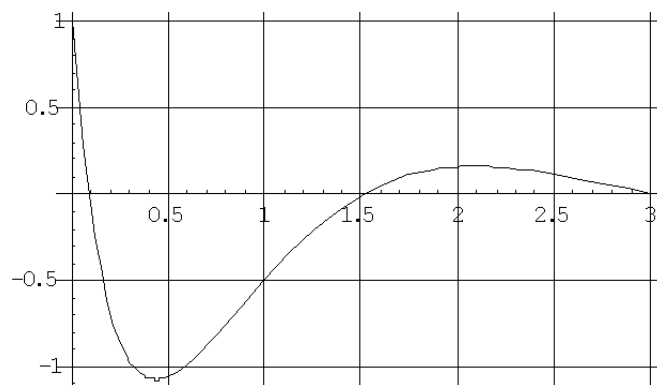


Рис. 1. Залежність $B(r)$ для $r \in [0; 3]$

Оскільки узагальнені числа Стірлінга другого роду $\sigma_r^{(k)}$ були одержані за допомогою апарата дробового інтегро-диференціювання, то і узагальнення чисел Бернуллі також безпосередньо завдячує саме дробовому диференціюванню.

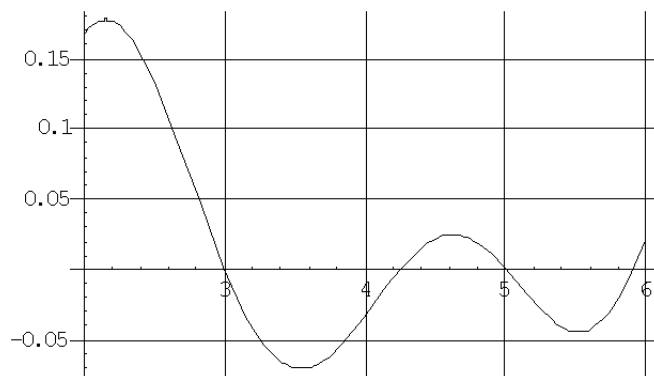


Рис. 2. Залежність $B(r)$ для $r \in [2; 6]$

Список використаної літератури

1. Справочник по специальным функциям / Под ред. М. Абрамовича и И. Стиган. – М.: Наука, 1979. – 832 с.
2. Рибак В. Я. Про узагальнення чисел Стірлінга другого роду // Наук. вісник Ужгор. ун-ту. Сер. Матем. і інформ. – Ужгород: УжНУ, 2002. – Вип. 7. – С. 90–95.

Одержано 23.06.2015