УДК 517.9

Г. Я. Семчишин (Ужгородський нац. ун-т)

ДОСЛІДЖЕННЯ РОЗВ'ЯЗНОСТІ ВИРОДЖЕНИХ СИСТЕМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ЗА ДОПОМОГОЮ ПСЕВДООБЕРНЕНОЇ МАТРИЦІ ТА ОРТОПРОЕКТОРІВ

In this article the problem of existence and constructing of the general solution of singular systems of differential equations is under the consideration.

У даній статті розглядається проблема існування та побудови загального розв'язку вироджених систем диференціальних рівннь.

Під час розв'язання різноманітних задач, що виникають в таких прикладних галузях, як математична економіка, робототехніка, обробка цифрових зображень, теорія керування, теорія електронних схем та електричних кіл, радіофізика, хімічна та біологічна кінетики тощо [1, 2], дослідники стикаються з виродженими системами диференціальних рівнянь. Такі системи розглядаються як українськими [3, 4] та російськими [5–7] вченими, так і закордонними [8, 9].

У даній роботі досліджуються вироджені системи диференціальних рівнянь у випадку, коли при похідній шуканої функції знаходиться нільпотентний блок Жордана. Для таких вироджених систем одержано необхідні та достатні умови існування розв'язку.

1. Постановка задачі. Розглянемо вироджену систему диференціальних рівнянь

$$J\frac{dy}{dt} = A(t)y(t) + f(t), \quad t \in [a, b], \tag{1}$$

де J – $(m \times m)$-вимірна стала матриця вигляду:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

$A(t)$ – $(m \times m)$-вимірна матриця, компоненти якої є дійсними неперервними на [a,b] функціями: $A(t) \in C[a, b]$; $f(t)$ – m-вимірна вектор-функція із простору $C[a, b]$.

Під розв'язком виродженої системи диференціальних рівнянь (1) будемо розуміти неперервно диференційовну на $[a, b]$ m-вимірну вектор-функцію $y(t)$, яка задовольняє систему (1).

Означення 1. *Матриця G^+ розмірності $(n \times m)$, яка задовольняє умови*

$$1.\ GG^+G = G, \qquad 2.\ G^+GG^+ = G^+,$$
$$3.\ (GG^+)^\top = GG^+, \qquad 4.\ (G^+G)^\top = G^+G,$$

називається псевдооберненою за Муром-Пенроузом [10,11] для $(m \times n)$-вимірної матриці G.

Означення 2. *Ортопроектором P_G до $(m\times n)$-вимірної матриці G називається $(n\times n)$-вимірна матриця, яка проектує простір $\mathbb{R}^n$ на ядро $Ker(G)$ матриці G:*

$$P_G : \mathbb{R}^n \to Ker(G), \quad Ker(G) = P_G\mathbb{R}^n.$$

Означення 3. *Ортопроектором до $(n\times m)$-вимірної матриці $G^\top$ називається $(m\times m)$-вимірна матриця $P_{G^\top}$, яка проектує простір $\mathbb{R}^m$ на ядро $Ker(G^\top)$ матриці $G^\top$:*

$$P_{G^\top} : \mathbb{R}^m \to Ker(G^\top), \quad Ker(G^\top) = P_{G^\top}\mathbb{R}^m.$$

2. Структура загального розв'язку вироджених систем диференціальних рівнянь. Представимо матрицю $A(t)$ наступним чином

$$A(t) = \begin{bmatrix} D_1(t) & D_2(t) \\ & \\ a_{m,1}(t) & D_3(t) \end{bmatrix},$$

де $D_1(t)$ – $((m-1)\times 1)$-вимірна, $D_2(t)$ – $((m-1)\times(m-1))$-вимірна, $D_3(t)$ – $(1\times(m-1))$-вимірна матриці.

Нехай

$$y(t) = col\left[y_1(t), v(t)\right],$$

де $v(t) = col(y_2(t),\ldots,y_m(t))$ – $(m-1)$-вимірна вектор-функція;

$$J_1 = [E_{m-1}, 0_{m-1,1}], \quad J_2 = [0_{1,m-1}, 1],$$

J_1 – $((m-1)\times m)$-вимірна матриця, J_2 – m-вимірний вектор-рядок; E_{m-1} – $((m-1)\times(m-1))$-вимірна одинична матриця.

Тоді вироджену систему рівнянь (1) можна записати наступним чином

$$\frac{dv}{dt} = D_1(t)y_1(t) + D_2(t)v(t) + J_1 f(t), \tag{2}$$

$$0 = a_{m,1}(t)y_1(t) + D_3(t)v(t) + J_2 f(t), \tag{3}$$

де (2) – це система звичайних диференціальних рівнянь $m-1$ порядку, (3) – алгебраїчне рівняння.

Структура розв'язку виродженої системи диференціальних рівнянь (1) залежать від значення $a_{m,1}(t)$.

У випадку, коли $a_{m,1}(t)\neq 0$ $\forall t\in[a,b]$ загальний розв'язок виродженої системи диференціальних рівнянь (1) має вигляд [12]:

$$y(t) = Y(t)c + K(t)\tilde{v}(t) + W(t)f(t), \tag{4}$$

де $Y(t)$ – $(m\times(m-1))$-вимірна матриця, яка складається з $m-1$ лінійно незалежних розв'язків відповідної (1) однорідної виродженої системи: $Y(t)=K(t)V(t)$; $V(t)$ – $((m-1)\times(m-1))$-вимірна фундаментальна матриця відповідної (5) однорідної системи диференціальних рівнянь

$$\frac{dv}{dt} = \left(D_2(t) - \frac{1}{a_{m,1}(t)}D_1(t)D_3(t)\right)v(t) + \left(J_1 - \frac{1}{a_{m,1}(t)}D_1(t)J_2\right)f(t), \tag{5}$$

$\tilde{v}(t)$ – деякий частинний розв'язок неоднорідної системи диференціальних рівняння (5); $K(t)$ – $(m \times (m-1))$-вимірна, $W(t)$ – $(m \times m)$-вимірна матриці вигляду

$$K(t) = \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{a_{m,1}(t)} D_3(t) \\ \\ E_{m-1} \end{bmatrix}, \quad W(t) = \begin{bmatrix} 0_{1,m-1} & -\dfrac{1}{a_{m,1}(t)} \\ \\ 0_{m-1,m-1} & 0_{m-1,1} \end{bmatrix}.$$

$c \in R^{m-1}$ – вектор довільних сталих.

Розглянемо випадок, коли $a_{m,1}(t) \equiv 0$. Тоді алгебраїчне рівняння (3) набуде вигляду

$$D_3(t)v(t) = -J_2 f(t). \tag{6}$$

Оскільки $rank D_3(t) = 1\ \forall t \in [a,b]$, то згідно [13], алгебраїчна система (6) є завжди розв'язною і при цьому має k-параметричну, $k = m-2$, сім'ю розв'язків вигляду

$$v(t) = P_{D_{3k}(t)} c - D_3^+(t) J_2 f(t), \tag{7}$$

де $D_3^+(t)$ – єдина псевдообернена за Муром-Пенроузом до $D_3(t)$ матриця; $P_{D_{3k}(t)}$ – $((m-1) \times k)$-вимірна матриця, яка складається з k лінійно незалежних стовпців матриці-ортопроектора $P_{D_3(t)}$, $c \in \mathbb{R}^k$ – вектор довільних сталих.

Підставимо отримане значення $v(t)$ вигляду (7) в систему (2). Отримаємо

$$D_1(t)y_1(t) = \left(\left(P_{D_{3k}(t)}\right)' - D_2(t) P_{D_{3k}(t)} \right) c + r(t), \tag{8}$$

де

$$r(t) = D_2(t) D_3^+(t) J_2 f(t) - \left(D_3^+(t) J_2 f(t)\right)' - J_1 f(t).$$

Оскільки $rank D_1(t) = 1\ \forall t \in [a,b]$, то алгебраїчна система (8) є розв'язною тоді і тільки тоді, коли виконується умова

$$P_{D_{1}{}_k^{\top}(t)} \left[\left(\left(P_{D_{3k}(t)}\right)' - D_2(t) P_{D_{3k}(t)} \right) c + r(t) \right] = 0, \tag{9}$$

де $P_{D_{1}{}_k^{\top}(t)}$ – $(k \times (m-1))$-вимірна матриця, яка складається з k лінійно незалежних рядків матриці-ортопроектора $P_{D_1^{\top}(t)}$, і при цьому має k-параметричну сім'ю розв'язків вигляду

$$y_1(t) = D_1^+(t) \left[\left(\left(P_{D_{3k}(t)}\right)' - D_2(t) P_{D_{3k}(t)} \right) c + r(t) \right], \tag{10}$$

де $D_1^+(t)$ – єдина псевдообернена за Муром-Пенроузом до $D_1(t)$ матриця.

Об'єднуючи (7) і (10) одержимо загальний розв'язок виродженої системи диференціальних рівнянь (1):

$$y(t) = Y(t)c + W_1(t), \tag{11}$$

де $Y(t)$ – $(m \times (m-2))$-вимірна матриця, яка складається з $m-2$ лінійно незалжних розв'язків відповідної (1) однорідної виродженої системи диференціальних рівнянь

$$J\frac{dy}{dt} = A(t)y(t), \quad t \in [a,b], \tag{12}$$

$W_1(t)$ – $(m \times 1)$-вимірна матриця вигляду

$$Y(t) = \begin{bmatrix} D_1^+(t)\Big(\big(P_{D_{3k}(t)}\big)' - D_2(t)P_{D_{3k}(t)}\Big) \\ \\ P_{D_{3k}(t)} \end{bmatrix},$$

$$W_1(t) = \begin{bmatrix} D_1^+(t)\Big(D_2(t)D_3^+(t)J_2f(t) - \big(D_3^+(t)J_2f(t)\big)' - J_1f(t)\Big) \\ \\ -D_3^+(t)J_2f(t) \end{bmatrix},$$

$c \in \mathbb{R}^{m-2}$ – вектор довільних сталих

Теорема 1. *Нехай для виродженої системи диференціальних рівнянь* (1) *виконується умова:* $a_{m,1}(t) \equiv 0$. *Тоді вироджена система диференціальних рівнянь* (1) *матиме* $(m-2)$*-параметричну сім'ю розв'язків вигляду* (11) *тоді і тільки тоді, коли виконується умова* (9).

3. Спряжені системи диференціальних рівнянь. Поряд із однорідною виродженою системою диференціальних рівнянь (12) розглянемо відповідну їй спряжену систему

$$J^\top \frac{d\bar{y}}{dt} = -A^\top(t)\bar{y}(t), \quad t \in [a,b]. \tag{13}$$

Нехай виконується умова

$$P^\top_{D_{3k}(t)}\left(\left(P^\top_{D_{1k}^\top(t)}\right)' + D_2^\top(t)P^\top_{D_{1k}^\top(t)}\right)\tilde{d} = 0, \tag{14}$$

де $P^\top_{D_{1k}^\top(t)}$ – $(k \times (m-1))$-вимірна матриця, яка складається з k лінійно незалежних рядків матриці-ортопроектора $P_{D_3(t)}$.

Тоді загальний розв'язок спряженої системи (13) має таку ж структуру, що й загальний розв'язок однорідної виродженої системи (12), а саме:

$$\bar{y}(t) = \bar{Y}(t)d, \tag{15}$$

де $\bar{Y}(t)$ – $(m \times (m-2))$-вимірна матриця, яка складається з $m-2$ лінійно незалежних розв'язків однорідної виродженої системи рівнянь (13), причому

$$Y(t) = \begin{bmatrix} P^\top_{D_{1k}^\top(t)} \\ \\ -D_3^{\top+}(t)\left(\left(P^\top_{D_{1k}^\top(t)}\right)' + D_2^\top(t)P^\top_{D_{1k}^\top(t)}\right) \end{bmatrix},$$

де $D_3^{\top+}(t)$ – єдина псевдообернена за Муром-Пенроузом до $D_3^\top(t)$ матриця, $d \in \mathbb{R}^{m-2}$ – вектор довільних сталих.

Залежність між розв'язками виродженої системи (12) та розв'язками спряженої до неї системи (13), встановлює наступна лема.

Лема 1. *Нехай* $y(t)$ *– розв'язок системи* (12), *а* $\bar{y}(t)$ *– розв'язок системи* (13). *Тоді виконується рівність*

$$\langle Jy(t), \bar{y}(t)\rangle = const \quad \forall t \in [a, b].$$

Доведення. Оскільки $J\dfrac{dy}{dt} = A(t)y(t)$ і $J^\top \dfrac{d\bar{y}}{dt} = -A^\top(t)\bar{y}(t)$, то

$$\frac{d}{dt}\langle Jy(t), \bar{y}(t)\rangle = \frac{d}{dt}\langle y(t), J^\top \bar{y}(t)\rangle = \langle \frac{dy(t)}{dt}, J^\top \bar{y}(t)\rangle + \langle y(t), \frac{d}{dt}\big(J^\top \bar{y}(t)\big)\rangle =$$

$$= \langle J\frac{dy(t)}{dt}, \bar{y}(t)\rangle + \langle y(t), \frac{d}{dt}\big(J^\top \bar{y}(t)\big)\rangle = \langle A(t)y(t), \bar{y}(t)\rangle + \langle y(t), -A^\top(t)\bar{y}(t)\rangle = 0,$$

звідки і випливає твердження леми.

Список використаної літератури

1. *Сенди К.* Современные методы анализа электрических систем. — М.: Энергия, 1971.
2. *Чуа Л.О., Лин Пен-Мин* Машинный анализ электронных схем: Алгоритмы и вычислительные методы. — М.: Энергия, 1980. — 640 с.
3. *Самойленко А.М., Шкіль М.І., Яковець В.П.* Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженнями. – К.: Вища шк., 2000. – 294 с.
4. *Бойчук А.А., Шегда Л.М.* Вироджені нетерові крайові задачі // Нелінійні коливання. – 2007.–**10**, №3. – С. 303–312.
5. *Бояринцев Ю.И.* Методы решения непрерывных и дискретных задач для сингулярных систем уравнений. – М.: Наука, 1996.
6. *Бояринцев Ю.Е., Чистяков В.Ф.* Алгебро-дифференциальные системы. Методы численного решения и исследования. — Новосибирск: Наука, 1998.
7. *Чистяков В.Ф., Щеглова А.А.* Избранные главы теории алгебро-дифференциальных систем. – Новосибирск: Наука, 2003. – 320 с.
8. *Brenan K.E., Campbell S.L., Petzold L.R.* Numerical solution of initial-problems in differential-algebraic equations (classics in applied mathematics; 14). — Philadelphia: SIAM, 1996. — 256 p.
9. *Campbell S.L.* Singular systems of differential equations. — SanFrancisko, London, Melbourne. Pitman, 1982. — 188 p.
10. *Moore E.H.* On the Reciprocal of the General Algebraic Matrix (Abstract) Bull.Amer.Math.Soc. — 1920. — № 26. — P. 394–395.
11. *Penrose R.* A Generalized Inverse for Matrices // Proc.Cambridge Philos.Soc., 1955. — **51**, № 3. — P. 406–413.
12. *Семчишин Г.Я.* Розв'язність задачі Коші для вироджених систем диференціальних рівнянь // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ. – 2013. Вип. 24, №1. – С. 145–153.
13. *Бойчук А.А., Журавлев В.Ф., Самойленко А.М.* Обобщенно-обратные операторы и нетеровы краевые задачи. – К.: Ин-т математики НАН Украины, 1995. – 294 с.

Одержано 23.06.2015