УДК 517.928

О. В. Тарасенко (Ніжинський державний ун-т імені Миколи Гоголя)

АСИМПТОТИЧНЕ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ ДЛЯ ЛІНІЙНОЇ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНОЇ СИСТЕМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ВИРОДЖЕННЯМ ПРИ ПОХІДНИХ

It is investigated the possibility of construction of the asymptotic solution of the optimal control problem by process which is describing by linear singularly perturbed system of differential equations with degenerate matrix of derivatives in the case of simple elementary divisors. It was obtained the conditions of the existence and uniqueness of the solution of this problem and its asymptotic is constructed in form of power series with degrees of small parameter. For this purpose it was used the results of asymptotic analyses of the general solution for the degenerated singular perturbed linear systems of differential equations.

Досліджується можливість побудови асимптотичного розв'язку задачі оптимального керування процесом, який описується лінійною сингулярно збуреною системою диференціальних рівнянь з вироджуваною матрицею при похідних, у випадку простих скінченного та нескінченного елементарних дільників. Знаходяться умови існування єдиного розв'язку цієї задачі і побудована його асимптотика у вигляді розвинень за степенями малого параметра. У ході дослідження використовуються результати асимптотичного аналізу загального розв'язку лінійних сингулярно збурених систем диференціальних рівнянь з виродженнями.

1. Постановка задачі.

Розглянемо оптимальний процес

$$\varepsilon^h B(t,\varepsilon)\frac{dx}{dt} = A(t,\varepsilon)x + C(t,\varepsilon)u, \tag{1}$$

$$J = \frac{1}{2\varepsilon^h}\int_0^T (D(t,\varepsilon)u,u)\,dt \to \min_u, \tag{2}$$

який переводить систему із стану

$$x(0,\varepsilon) = x_1(\varepsilon) \tag{3}$$

в стан

$$x(T,\varepsilon) = x_2(\varepsilon) \tag{4}$$

за фіксований проміжок часу T, де $A(t,\varepsilon)$ — дійсна квадратна матриця n-го порядку, $C(t,\varepsilon)$, $D(t,\varepsilon)$ — $(n\times m)$ та $(m\times m)$-матриці відповідно, $x(t,\varepsilon)$ — n-вимірний вектор стану, $u(t,\varepsilon)$ — m-вимірний вектор керування, $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$ — малий параметр: $\varepsilon_0 \ll 1$; $h \in N$, $t \in [0;T]$.

Будемо припускати, що виконуються такі умови:

1° Матриці $A(t,\varepsilon)$, $B(t,\varepsilon)$, $C(t,\varepsilon)$ і $D(t,\varepsilon)$ допускають на відрізку $[0;T]$ рівномірні асимптотичні розвинення за степенями малого параметра:

$$\begin{gathered} A(t,\varepsilon) \sim \sum_{k\geq 0}\varepsilon^k A_k(t),\ B(t,\varepsilon) \sim \sum_{k\geq 0}\varepsilon^k B_k(t), \\ C(t,\varepsilon) \sim \sum_{k\geq 0}\varepsilon^k C_k(t),\ D(t,\varepsilon) \sim \sum_{k\geq 0}\varepsilon^k D_k(t). \end{gathered} \tag{5}$$

2° Коефіцієнти $A_k(t)$, $B_k(t)$, $C_k(t)$, $D_k(t)$, $k = 0, 1, \ldots$, розвинень (5) нескінченно диференційовні на $[0; T]$.

3° Вектори початкового і кінцевого станів зображуються у вигляді розвинень

$$x_1(\varepsilon) \sim \sum_{k\geq 0} \varepsilon^k x_k^{(1)},\ x_2(\varepsilon) \sim \sum_{k\geq 0} \varepsilon^k x_k^{(2)}. \tag{6}$$

4° $\det B_0(t) \equiv 0$, $\forall t \in [0; T]$.

5° Гранична в'язка матриць

$$A_0(t) - \lambda B_0(t) \tag{7}$$

на відрізку $[0; T]$ має $n-1$ простих скінченних елементарних дільників $\lambda - \lambda_i(t)$, $i = \overline{1, n}$, і один — нескінченний.

6° $\mathrm{Re}\lambda_i(t) < 0$, $\forall t \in [0; T]$.

7° $\lambda_i(t) + \bar{\lambda}_j(t) \neq 0$, $\forall t \in [0; T]$, $i, j = \overline{1, n-1}$.

8° $\Big((B_1(t)G(t)B_1(t) - B_2(t))\tilde{\varphi}(t), \tilde{\psi}(t)\Big) < 0$, $\Big(B_1(t)\tilde{\varphi}(t), \tilde{\psi}(t)\Big) \equiv 0$, $\forall t \in [0; T]$, де $\tilde{\varphi}(t)$ — власний вектор матриці $B_0(t)$, що відповідає її нульовому власному значенню, $\tilde{\psi}(t)$ — відповідний власний вектор спряженої матриці $B_0^*(t)$, $G(t)$ — напівобернена матриця до матриці $B_0(t)$.

9° Матриця $D_0(t)$ — неособлива на заданому проміжку $[0; T]$.

10° Область допустимих значень для керування $u(t, \varepsilon)$ збігається з усім заданим m–вимірним простором.

У роботах [1] та [2] розглядалися аналогічні задачі оптимального керування за умови вироджуваності матриці при похідних та виконанні умови

$$\Big(B_1(t)\tilde{\varphi}(t), \tilde{\psi}(t)\Big) < 0,\ \ \forall t \in [0; T]. \tag{8}$$

Так, у [1] побудовано розв'язок задачі за умови вироджуваності матриці у критерії якості у випадку простого спектру, а в [2] розглянуто випадок кратного скінченного та простого нескінченного елементарних дільників.

Розглянемо поставлену задачу оптимального керування у випадку, коли умова (8) не виконується, але має місце співвідношення 8°. Дослідження вдалося провести за допомогою використання результатів асимптотичного аналізу загального розв'язку сингулярно збурених систем з виродженнями даного типу, здійсненого в роботах [3], [4].

За даних умов будемо шукати керування $u(t, \varepsilon)$ та відповідну траєкторію $x(t, \varepsilon)$ у вигляді розвинень за степенями малого параметра.

Незважаючи на виродженість матриці $B(t, 0) = B_0(t)$, як показано в [3] за виконання умови 8° матриця $B(t, \varepsilon)$ неособлива при досить малих $\varepsilon > 0$. Тому до задачі (1), (2) можна застосувати принцип максимуму Л.С. Понтрягіна [5].

Побудуємо функцію Гамільтона $H(t, x, p, u) = \varepsilon^{-h}(A(t, \varepsilon)x, p) + \varepsilon^{-h}((t, \varepsilon)u, p) - \frac{1}{2\varepsilon^h}(D(t, \varepsilon)u, u)$, де p — n-вимірний вектор спряжених змінних. Для мінімізації критерія (2) необхідно, щоб $\mathrm{grad}_u H = \varepsilon^{-h}C^*(t, \varepsilon)p - \varepsilon^{-h}D(t, \varepsilon)u = 0$, $\frac{d}{dt}\left(B^*(t, \varepsilon)p\right) = -\mathrm{grad}_x H = -\varepsilon^{-h}A^*(t, \varepsilon)p$.

Одержимо систему рівнянь

$$\begin{gathered} \varepsilon^h B(t, \varepsilon)\frac{dx}{dt} = A(t, \varepsilon)x + C(t, \varepsilon)u, \\ \varepsilon^h B^*(t, \varepsilon)\frac{dp}{dt} = -\Big(A^*(t, \varepsilon) + \varepsilon^h\left(B^*(t, \varepsilon)\right)'\Big)p,\ 0 = C^*(t, \varepsilon)p - D(t, \varepsilon)u. \end{gathered} \tag{9}$$

Увівши $(2n+m)$-вимірний вектор $y(t,\varepsilon) = \mathrm{col}(x(t,\varepsilon), p(t,\varepsilon), u(t,\varepsilon))$, співвідношення (9) запишемо у вигляді

$$\varepsilon^h \tilde{B}(t,\varepsilon)\dot{y} = \tilde{A}(t,\varepsilon)y, \tag{10}$$

де матриці $\tilde{A}(t,\varepsilon)$, $\tilde{B}(t,\varepsilon)$ зображуються у вигляді асимптотичних розвинень

$$\tilde{A}(t,\varepsilon) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \tilde{A}_k(t),\ \ \tilde{B}(t,\varepsilon) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \tilde{B}_k(t), \tag{11}$$

в яких

$$\tilde{A}_k(t) = \begin{pmatrix} A_k(t) & 0 & C_k(t) \\ 0 & -A_k^*(t) - (B_{k-h}^*(t))' & 0 \\ 0 & C_k^*(t) & -D_k(t) \end{pmatrix},\ \tilde{B}_k(t) = \begin{pmatrix} B_k(t) & 0 & 0 \\ 0 & B_k^*(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$(k = 0, 1, 2, \ldots)$, — блочні матриці, де символом 0 позначено нульові блоки відповідних розмірів. Крайові умови (3), (4) подамо у вигляді:

$$My(0,\varepsilon) + Ny(T,\varepsilon) = \begin{pmatrix} x_1(\varepsilon) \\ x_2(\varepsilon) \end{pmatrix} = y_0(\varepsilon), \tag{12}$$

$$M = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ E & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким чином, задача оптимального керування (1)–(2) зводиться до двоточкової крайової задачі (10), (12).

2. Формальний розв'язок та його побудова.

Оскільки з умови 8° випливає, що матриця $B(t,\varepsilon)$ неособлива при всіх $\forall t \in [0;T]$ і досить малих ε, відмінних від нуля, то

$$\det\left(\tilde{A}(t,\varepsilon) - \lambda\tilde{B}(t,\varepsilon)\right) = \det(A(t,\varepsilon) - \lambda B(t,\varepsilon))\det(-A^*(t,\varepsilon)-$$
$$-\varepsilon^h(B^*(t,\varepsilon))' - \lambda B^*(t,\varepsilon))\det(-D(t,\varepsilon)) = (-1)^m\Big[\det B(t,\varepsilon)\det B^*(t,\varepsilon)\lambda^{2n}+$$
$$\ldots + (-1)^n \det A(t,\varepsilon)\det(A^*(t,\varepsilon) + \varepsilon^h\,(B^*(t,\varepsilon))')\Big]\det D(t,\varepsilon),$$

тоді $\mathrm{degdet}\left(\tilde{A}(t,\varepsilon) - \lambda\tilde{B}(t,\varepsilon)\right) = 2n = \mathrm{rank}\tilde{B}(t,\varepsilon)$, $\forall t \in [0;T]$ і досить малих $\varepsilon > 0$. Отже, система (10) з тотожно виродженою матрицею $\tilde{B}(t,\varepsilon)$ при похідних задовольняє критерій "ранг-степінь тому її загальний розв'язок являє собою лінійну комбінацію $2n$ лінійно незалежних частинних розв'язків.

Із структури граничної в'язки матриць $\tilde{A}_0(t) - \lambda\tilde{B}_0(t)$ та умов 5°, 6° випливає, що ця в'язка регулярна, а її спектр містить дві групи скінченних елементарних дільників: $\lambda - \lambda_i(t)$, $i = \overline{1, n-1}$; $\lambda + \lambda_j(t)$, $j = \overline{1, n-1}$ і $m+2$ простих нескінченних елементарних дільників. По одному нескінченному елементарному дільнику відповідає двом першим діагональним блокам матричної в'язки $\tilde{A}_0(t) - \lambda\tilde{B}_0(t)$, а m інших — третьому її діагональному блоку.

Як випливає з теорії асимптотичного інтегрування лінійних сингулярно збурених систем з виродженнями [3], для кожного із $2n-2$ скінченних елементарних дільників можна побудувати по одному розв'язку системи (10). Два ж інших із необхідних $2n$ розв'язків відповідатимуть нескінченним елементарним дільникам граничної в'язки матриць.

Розв'язки, що відповідають скінченним елементарним дільникам $\lambda - \lambda_j(t)$, $j = \overline{1, n-1}$, будуються у вигляді

$$y(t,\varepsilon) = v_i(t,\varepsilon) \exp\left(\varepsilon^{-h} \int\limits_0^t \lambda_i(\tau,\varepsilon) d\tau\right), \ i = \overline{1, n-1}, \tag{13}$$

$$v_i(t,\varepsilon) = \operatorname{col}\left(v_i^{(1)}(t,\varepsilon); 0; 0\right), \tag{14}$$

де $v_i(t,\varepsilon)$ — $2n+m$–вимірні вектори, $\lambda_i(t,\varepsilon)$ — скалярні функції, які зображуються формальними розвиненнями за степенями ε:

$$v_i(t,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k v_{ki}(t), \ \lambda_i(t,\varepsilon) = \lambda_i(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \lambda_k^{(i)}(t), \tag{15}$$

$v^{(1)}(t,\varepsilon)$ — n-вимірний вектор, який згідно з (15) зображується у вигляді формального ряду

$$v^{(1)}(t,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k v_k^{(1)}(t). \tag{16}$$

Для коефіцієнтів відповідних розвинень (15), (42) залишаються в силі рекурентні формули, доведення яких детально розглянуто в [1]:

$$\lambda_k^{(i)}(t) = -\left(g_{ki}^{(1)}(t), \psi_i(t)\right), \ k = 1, 2, \ldots; \tag{17}$$

$$v_{0i}^{(1)}(t) = \varphi_i(t), \ v_{ki}^{(1)}(t) = H_i(t) b_{ki}^{(1)}(t), \ k = 1, 2, \ldots; \tag{18}$$

$$b_{ki}^{(1)}(t) = \lambda_k^{(i)}(t) B_0(t) \varphi_i(t) + g_{ki}^{(1)}(t), \ k = 1, 2, \ldots; \tag{19}$$

$$g_{ki}^{(1)}(t) = \sum_{j=1}^{k-1} \sum_{s=0}^{k-j} \lambda_j^{(i)}(t) B_s v_{k-s-j,i}^{(1)} + \lambda_i \sum_{s=1}^{k} B_s v_{k-s,i}^{(1)} - \sum_{s=1}^{k} A_s(t) v_{k-s,i}^{(1)} +$$
$$+ \sum_{s=0}^{k-h} B_s \left(v_{k-h-s,i}^{(1)}\right)', \ k = 1, 2, \ldots, \tag{20}$$

де $\varphi_i(t)$, $i = \overline{1, n-1}$, — власні вектори в'язки $A_0(t) - \lambda B_0(t)$, що відповідають її власним значенням $\lambda_i(t)$, $\psi_i(t)$, $i = \overline{1, n-1}$, — власні вектори спряженої в'язки $A_0^*(t) - \lambda B_0^*(t)$, $H_i(t) = (A_0(t) - \lambda_i(t) B_0(t))^-$.

Розв'язки системи (10), які відповідають другій групі скінченних елементарних дільників $\lambda + \bar{\lambda}_i(t)$, $i = \overline{1, n-1}$, побудуємо у вигляді

$$y(t,\varepsilon) = \tilde{v}_i(t,\varepsilon) \exp\left(-\varepsilon^{-h} \int\limits_t^T \tilde{\lambda}_i(\tau,\varepsilon) d\tau\right), \ i = \overline{1, n-1}, \tag{21}$$

де

$$\tilde{v}_i(t,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \tilde{v}_{ki}(t), \ \tilde{\lambda}_i(t,\varepsilon) = -\bar{\lambda}_i(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \tilde{\lambda}_k^{(i)}(t). \tag{22}$$

Позначивши

$$\tilde{v}_i(t,\varepsilon) = \mathrm{col}\left(\tilde{v}_i^{(1)}(t,\varepsilon); \tilde{v}_i^{(2)}(t,\varepsilon); \tilde{v}_i^{(3)}(t,\varepsilon)\right), \tag{23}$$

$$\tilde{v}_i^{(j)}(t,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \tilde{v}_{ki}^{(j)}(t),\ j = \overline{1,3}, \tag{24}$$

підставимо (21) в систему (10). Враховуючи структуру матриць $\tilde{A}(t,\varepsilon)$, $\tilde{B}(t,\varepsilon)$, отримаємо таку систему рівнянь для векторів $\tilde{v}_i^{(j)}(t,\varepsilon)$, $j = \overline{1,3}$:

$$\begin{gathered} A(t,\varepsilon)\tilde{v}_i^{(1)}(t,\varepsilon) + C(t,\varepsilon)\tilde{v}_i^{(3)}(t,\varepsilon) = \tilde{\lambda}_i(t,\varepsilon)B(t,\varepsilon)\tilde{v}_i^{(1)}(t,\varepsilon) + \\ +\varepsilon^h B(t,\varepsilon)\left(\tilde{v}_i^{(1)}(t,\varepsilon)\right)'; \end{gathered} \tag{25}$$

$$\begin{gathered} -A^*(t,\varepsilon)\tilde{v}_i^{(2)}(t,\varepsilon) = \tilde{\lambda}_i(t,\varepsilon)B^*(t,\varepsilon)\tilde{v}_i^{(2)}(t,\varepsilon) + \\ +\varepsilon^h B^*(t,\varepsilon)\left(\tilde{v}_i^{(2)}(t,\varepsilon)\right)' + \varepsilon^h \left(B^*(t,\varepsilon)\right)' \tilde{v}_i^{(2)}(t,\varepsilon); \end{gathered} \tag{26}$$

$$C^*(t,\varepsilon)\tilde{v}_i^{(2)}(t,\varepsilon) - D(t,\varepsilon)\tilde{v}_i^{(3)}(t,\varepsilon) = 0. \tag{27}$$

Рівняння (26) за формою збігається з рівнянням, з якого визначаються коефіцієнти формальних розвинень для лінійно незалежних розв'язків спряженої системи

$$\varepsilon^h \frac{d}{dt}\left(B^*(t,\varepsilon)y\right) = -A^*(t,\varepsilon)y. \tag{28}$$

Тому, провівши міркування аналогічні до викладених у [2, с. 93], вектори $\tilde{v}_{ki}^{(2)}$, $k = 0, 1, \ldots$, і функції $\tilde{\lambda}_k^{(i)}$, $k = 1, 2, \ldots$, визначимо за рекурентними формулами:

$$\tilde{\lambda}_k^{(i)}(t) = -\bar{\lambda}_k^{(i)}(t),\ k = 1, 2, \ldots; \tag{29}$$

$$\tilde{v}_{0i}^{(2)}(t) = \psi_i(t),\ \tilde{v}_{ki}^{(2)}(t) = H_i^*(t)\tilde{b}_{ki}^{(2)}(t),\ k = 1, 2, \ldots; \tag{30}$$

$$\begin{gathered} \tilde{b}_{ki}^{(2)}(t) = \tilde{\lambda}_k^{(i)}(t)B_0^*\psi_i + \sum_{j=1}^{k-1}\sum_{j=0}^{k-j}\tilde{\lambda}_j^{(i)}B_s^*\tilde{v}_{k-j-s,i}^{(2)} + \tilde{\lambda}_i\sum_{s=1}^{k}B_s^*\tilde{v}_{k-s,i}^{(2)} - \\ -\sum_{s=1}^{k}A_s^*(t)\tilde{v}_{k-s,i}^{(2)} - \sum_{s=0}^{k-h}B_s^*\left(\tilde{v}_{k-s-h,i}^{(2)}\right)' - \sum_{s=0}^{k-h}\left(B_s^*\right)'\tilde{v}_{k-s-h,i}^{(2)}. \end{gathered} \tag{31}$$

Підставивши розвинення (24) у рівняння (27) і прирівнявши в одержаній тотожності коефіцієнти при однакових степенях ε, дістанемо рекурентні формули для визначення векторів $\tilde{v}_{ki}^{(3)}(t)$:

$$\tilde{v}_{0i}^{(3)}(t) = D_0^{-1}(t)C_0^*\psi_i; \tag{32}$$

$$\tilde{v}_{ki}^{(3)}(t) = D_0^{-1}(t)\left[\sum_{s=0}^{k}C_s^*\tilde{v}_{k-s,i}^{(2)} - \sum_{s=1}^{k}D_s\tilde{v}_{k-s,i}^{(3)}\right],\ k = 1, 2, \ldots. \tag{33}$$

Аналогічно з рівняння (25) знайдемо

$$\tilde{v}_{0i}^{(1)}(t) = -R_i^{-1}C_0\tilde{v}_{0i}^{(3)} = -R_i^{-1}C_0D_0^{-1}C_0^*\psi_i,\ i = \overline{1, n-1}; \tag{34}$$

$$\tilde{v}_{ki}^{(1)}(t) = R_i^{-1}\tilde{b}_{ki}^{(1)},\ k = 1, 2, \dots; \tag{35}$$

$$\begin{gathered}\tilde{b}_{ki}^{(1)}(t) = -\bar{\lambda}_i \sum_{s=1}^{k} B_s \tilde{v}_{k-s,i}^{(1)} - \sum_{j=1}^{k}\sum_{s=0}^{k-j} \bar{\lambda}_j^{(i)} B_s \tilde{v}_{k-j-s,i}^{(1)} - \sum_{s=1}^{k} A_s \tilde{v}_{k-s,i}^{(1)} - \\ - \sum_{s=0}^{k} C_s \tilde{v}_{k-s,i}^{(3)} + \sum_{s=0}^{k-h} B_s \left(\tilde{v}_{k-h-s,i}^{(1)}\right)',\ k = 1, 2, \dots,\end{gathered} \tag{36}$$

де $R_i(t) = A_0(t) + \lambda_i(t) B_0(t)$, $i = \overline{1, n-1}$.

Розв'язки, що відповідають двом нескінченним елементарним дільникам граничної в'язки матриць, про які йшла мова вище, враховуючи 8°, шукатимемо у вигляді

$$y_1(t,\varepsilon) = w(t,\varepsilon)\exp\left(\varepsilon^{-h-1}\int_0^t \xi^{-1}(\tau,\varepsilon)d\tau\right), \tag{37}$$

$$y_2(t,\varepsilon) = \tilde{w}(t,\varepsilon)\exp\left(-\varepsilon^{-h-1}\int_t^T \tilde{\xi}^{-1}(\tau,\varepsilon)d\tau\right), \tag{38}$$

де $w(t,\varepsilon)$, $\tilde{w}(t,\varepsilon)$ — $(2n+m)$-вимірні вектори, $\xi(t,\varepsilon)$, $\tilde{\xi}(t,\varepsilon)$ — скалярні функції, які зображуються формальними розвиненнями

$$w(t,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k w_k(t),\ \xi(t,\varepsilon) = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \xi_k(t); \tag{39}$$

$$\tilde{w}(t,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \tilde{w}_k(t),\ \tilde{\xi}(t,\varepsilon) = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \tilde{\xi}_k(t). \tag{40}$$

Перший розв'язок побудуємо, поклавши

$$w(t,\varepsilon) = \mathrm{col}\left(w^{(1)}(t,\varepsilon); 0; 0\right), \tag{41}$$

де $w^{(1)}(t,\varepsilon)$ — n-вимірний вектор, який згідно з (39) зображується у вигляді формального ряду

$$w^{(1)}(t,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k w_k^{(1)}(t). \tag{42}$$

Підставивши (37), (41) у систему (10), отримаємо рівняння, досліджене в [3], до якого зводиться побудова відповідного розв'язку однорідної системи рівнянь, що відповідає (1). Тому коефіцієнти розвинень (39), (42) визначаються за рекурентними формулами

$$w_0^{(1)}(t) = \tilde{\varphi}(t);\ w_1^{(1)}(t) = -G(t)B_1(t)\tilde{\varphi}(t); \tag{43}$$

$$\xi_1(t) = \Big((B_1(t)G(t)B_1(t) - B_2(t))\tilde{\varphi}(t), \tilde{\psi}(t)\Big); \tag{44}$$

$$\xi_k(t) = -\left(d_k^{(1)}(t), \tilde{\psi}(t)\right),\ k = 2, 3, \dots; \tag{45}$$

$$w_k^{(1)}(t) = G(t)a_k^{(1)}(t),\ k = 2, 3, \dots; \tag{46}$$

де

$$d_k^{(1)}(t) = \sum_{s=1}^{k-2} \sum_{j=0}^{k-s-1} \xi_s A_j w_{k-s-j-1}^{(1)} - \sum_{s=1}^{k} B_s w_{k-s}^{(1)} - \sum_{s=1}^{k-h-1} \sum_{j=0}^{k-h-s-1} \xi_s B_j \left(w_{k-h-s-j-1}^{(1)} \right)'; \tag{47}$$

$$a_k^{(1)}(t) = \xi_k A_0 \tilde{\varphi} + d_k^{(1)}(t),\ k = 1, 2, \ldots, \tag{48}$$

де $G(t) = B_0^-(t)$.

При знаходженні другого розв'язку покладемо

$$\tilde{w}(t, \varepsilon) = \operatorname{col}\left(\tilde{w}^{(1)}(t, \varepsilon); \tilde{w}^{(2)}(t, \varepsilon); \tilde{w}^{(3)}(t, \varepsilon) \right), \tag{49}$$

$$\tilde{w}^{(j)}(t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \tilde{w}_k^{(j)}(t),\ j = \overline{1, 3}. \tag{50}$$

Підставивши (38), (49) у (10), дістанемо

$$\begin{gathered} B(t, \varepsilon)\tilde{w}^{(1)}(t, \varepsilon) = \varepsilon \tilde{\xi}(t, \varepsilon) A(t, \varepsilon) \tilde{w}^{(1)}(t, \varepsilon) + \varepsilon \tilde{\xi}(t, \varepsilon) C(t, \varepsilon) \tilde{w}^{(3)}(t, \varepsilon) - \\ -\varepsilon^{h+1} \tilde{\xi}(t, \varepsilon) B(t, \varepsilon) \left(\tilde{w}^{(1)}(t, \varepsilon) \right)'; \end{gathered} \tag{51}$$

$$\begin{gathered} B^*(t, \varepsilon)\tilde{w}^{(2)}(t, \varepsilon) = -\varepsilon \tilde{\xi}(t, \varepsilon) A^*(t, \varepsilon) \tilde{w}^{(2)}(t, \varepsilon) - \varepsilon^{h+1} \tilde{\xi}(t, \varepsilon) \left(B^*(t, \varepsilon) \right)' \tilde{w}^{(2)}(t, \varepsilon) - \\ -\varepsilon^{h+1} \tilde{\xi}(t, \varepsilon) B^*(t, \varepsilon) \left(\tilde{w}^{(2)}(t, \varepsilon) \right)'; \end{gathered} \tag{52}$$

$$C^*(t, \varepsilon)\tilde{w}^{(2)}(t, \varepsilon) - D(t, \varepsilon) \tilde{w}^{(3)}(t, \varepsilon) = 0. \tag{53}$$

Рівняння (52) визначає розв'язок n-вимірної спряженої системи рівнянь (28), який відповідає простому нескінченному елементарному дільнику її граничної в'язки матриць. Тому аналогічно до попередніх міркувань коефіцієнти розвинень (40) для функції $\tilde{\xi}(t, \varepsilon)$ і (50) — для вектора $\tilde{w}^{(2)}(t, \varepsilon)$ визначаються за формулами

$$\tilde{\xi}_k(t) = -\bar{\xi}_k(t),\ k = 1, 2, \ldots; \tag{54}$$

$$\tilde{w}_0^{(2)}(t) = \tilde{\psi}(t),\ \tilde{w}_1^{(2)}(t) = -G^*(t) B_1^*(t) \tilde{\psi}(t),\ \tilde{w}_k^{(2)}(t) = G^*(t) \tilde{a}_k^{(2)}(t),\ k = 2, 3, \ldots; \tag{55}$$

$$\begin{gathered} \tilde{a}_k^{(2)}(t) = \tilde{\xi}_k A_0^* \tilde{\psi} + \sum_{s=1}^{k-2} \sum_{j=0}^{k-s-1} \tilde{\xi}_s A_j^* \tilde{w}_{k-s-j-1}^{(2)} + \sum_{s=1}^{k-h-1} \sum_{j=0}^{k-h-s-1} \tilde{\xi}_s \left(B_j^* \right)' \tilde{w}_{k-s-j-h-1}^{(2)} + \\ + \sum_{s=1}^{k-h-1} \sum_{j=0}^{k-h-s-1} \xi_s B_j^* \left(\tilde{w}_{k-h-s-j-1}^{(2)} \right)' - \sum_{j=1}^{k} B_j^* \tilde{w}_{k-j}^{(2)},\ k = 2, 3, \ldots. \end{gathered} \tag{56}$$

Підставивши відповідні розвинення в рівняння (53) і прирівнявши вирази при однакових степенях ε, отримаємо рекурентні формули, якими визначаються вектори $\tilde{w}_k^{(3)}(t)$:

$$\tilde{w}_0^{(3)}(t) = D_0^{-1}(t) C_0^*(t) \tilde{\psi}(t); \tag{57}$$

$$\tilde{w}_k^{(3)}(t) = D_0^{-1} \left[\sum_{s=0}^{k} C_s^* \tilde{w}_{k-s}^{(2)} - \sum_{s=1}^{k} D_s \tilde{w}_{k-s}^{(3)} \right],\ k = 1, 2, \ldots. \tag{58}$$

Нарешті, підставивши розвинення (50), (40) у рівняння (51) і прирівнявши вирази при однакових степенях параметра та взявши до уваги (54), матимемо таку систему рівнянь для визначення коефіцієнтів відповідного розвинення для вектора $\tilde{w}^{(1)}(t,\varepsilon)$:

$$B_0\tilde{w}_0^{(1)} = 0; \tag{59}$$

$$B_0\tilde{w}_k^{(1)} = \tilde{a}_k^{(1)},\ k = 1,2,\ldots; \tag{60}$$

$$\begin{gathered}\tilde{a}_k^{(1)}(t) = -\sum_{s=1}^{k-1}\sum_{j=0}^{k-s-1}\tilde{\xi}_s A_j \tilde{w}_{k-s-j-1}^{(1)} - \sum_{s=1}^{k}\sum_{j=0}^{k-s-1}\tilde{\xi}_s C_j \tilde{w}_{k-s-j}^{(3)} + \\ + \sum_{s=1}^{k-h-1}\sum_{j=0}^{k-h-s-1}\tilde{\xi}_s B_j \left(\tilde{w}_{k-s-j-h-1}^{(1)}\right)' - \sum_{s=1}^{k} B_s \tilde{w}_{k-s}^{(1)},\ k = 1,2,\ldots.\end{gathered} \tag{61}$$

Ця система буде розв'язною тоді і тільки тоді, коли вектори $\tilde{a}_k^{(1)}(t)$ будуть ортогональними до вектора $\tilde{\psi}(t)$:

$$\left(\tilde{a}_k^{(1)}(t), \tilde{\psi}(t)\right) = 0,\ k = 1,2,\ldots. \tag{62}$$

За виконання цієї умови вектори $\tilde{w}_k^{(1)}(t)$ визначатимемо за формулами

$$\tilde{w}_0^{(1)}(t) = c_0(t)\tilde{\varphi}(t); \tag{63}$$

$$\tilde{w}_k^{(1)}(t) = G(t)\tilde{a}_k^{(1)}(t) + c_k(t)\tilde{\varphi}(t),\ k = 1,2,\ldots, \tag{64}$$

де $c_s(t)$, $s = 0,1,\ldots,$ — скалярні множники, за рахунок яких і задовольняється умова (62). Згідно з (61), (63), (57) при $k = 1$ умова (62) запишеться у вигляді

$$c_0\left[\xi_1(A_0\tilde{\varphi},\tilde{\psi}) + \left((B_1GB_1 - B_2)\tilde{\varphi},\tilde{\psi}\right)\right] + \xi_1\left(C_0D_0^{-1}C_0^*\tilde{\psi},\tilde{\psi}\right) = 0. \tag{65}$$

Враховуючи (44) та умову 8°, знайдемо

$$c_0(t) = -\frac{1}{2}\left(C_0D_0^{-1}C_0^*\tilde{\psi},\tilde{\psi}\right). \tag{66}$$

Якщо всі $c_s(t)$ вже відомі при $s < k$, то для знаходження $c_k(t)$ використаємо умову (62) на $(k+1)$-у кроці. Поклавши в (62), (61) $k+1$ замість k, отримаємо

$$c_k(t) = -\frac{\left(\tilde{d}_k^{(1)},\tilde{\psi}\right)}{2\xi_1}, \tag{67}$$

де

$$\begin{gathered}\tilde{d}_k^{(1)}(t) = \sum_{s=2}^{k}\sum_{j=0}^{k-s}\tilde{\xi}_s A_j \tilde{w}_{k+1-s-j}^{(1)} + \bar{\xi}_1\sum_{j=1}^{k-1} A_j \tilde{w}_{k-j-1}^{(1)} + \sum_{s=1}^{k}\sum_{j=0}^{k-s}\tilde{\xi}_s C_j \tilde{w}_{k-s-j}^{(3)} - \\ - \sum_{s=1}^{k-h}\sum_{j=0}^{k-h-s}\tilde{\xi}_s B_j\left(\tilde{w}_{k-s-j-h}^{(1)}\right)' + \sum_{s=2}^{k+1} B_s \tilde{w}_{k+1-s}^{(1)} + \bar{\xi}_1 A_0 G\tilde{a}_k^{(1)} + B_1 G\tilde{a}_k^{(1)}\end{gathered} \tag{68}$$

— вже відомий вектор згідно з припущенням індукції.

3. Розв'язок крайової задачі та його асимптотика.

Побудувавши $2n$ формальних розв'язків системи (10), розв'язок крайової задачі (10), (12) будемо шукати у вигляді їх лінійної комбінації

$$\begin{aligned} y(t,\varepsilon) = \sum_{i=1}^{n-1} v_i(t,\varepsilon) c^{(i)}(\varepsilon) \exp\left(\varepsilon^{-h}\int_0^t \lambda_i(\tau,\varepsilon)d\tau\right) + \\ + w(t,\varepsilon)c^{(n)}(\varepsilon)\exp\left(\varepsilon^{-h-1}\int_0^t \xi^{-1}(\tau,\varepsilon)d\tau\right) + \\ + \sum_{i=1}^{n-1} \tilde{v}_i(t,\varepsilon)\tilde{c}^{(i)}(\varepsilon)\exp\left(\varepsilon^{-h}\int_t^T \lambda_i(\tau,\varepsilon)d\tau\right) + \\ + \tilde{w}(t,\varepsilon)\tilde{c}^{(n)}(\varepsilon)\exp\left(\varepsilon^{-h-1}\int_t^T \xi^{-1}(\tau,\varepsilon)d\tau\right), \end{aligned} \tag{69}$$

де $c^{(i)}(\varepsilon)$, $c^{(j)}(\varepsilon)$, $i,j=\overline{1,n}$, — скалярні множники, які зображаються розвиненнями

$$c^{(i)}(t,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k c_k^{(i)}(t),\ \tilde{c}^{(i)}(t,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \tilde{c}_k^{(i)}(t),$$

коефіцієнти яких знайдемо з крайової умови (12).

Підставивши (69) у (12) і знехтувавши експоненціально малими доданками, одержимо систему рівнянь у векторно-матричній формі

$$V^{(1)}(0,\varepsilon)c(\varepsilon) = x_1(\varepsilon), \tag{70}$$

$$\tilde{V}^{(1)}(T,\varepsilon)\tilde{c}(\varepsilon) = x_2(\varepsilon), \tag{71}$$

де

$$V^{(1)}(t,\varepsilon) = \left[v_1^{(1)}(t,\varepsilon),\dots,v_{n-1}^{(1)}(t,\varepsilon); w^{(1)}(t,\varepsilon)\right] = \sum_{k=0}^{\infty} V_k^{(1)}(t)\varepsilon^k,$$

$$\tilde{V}^{(1)}(t,\varepsilon) = \left[\tilde{v}_1^{(1)}(t,\varepsilon),\dots,\tilde{v}_{n-1}^{(1)}(t,\varepsilon); \tilde{w}^{(1)}(t,\varepsilon)\right] = \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{V}_k^{(1)}(t)\varepsilon^k,$$

$c(\varepsilon) = \mathrm{col}\left(c^{(1)}(\varepsilon),\dots,c^{(n)}(\varepsilon)\right) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k\varepsilon^k$, $\tilde{c}(\varepsilon) = \mathrm{col}\left(\tilde{c}^{(1)}(\varepsilon),\dots,\tilde{c}^{(n)}(\varepsilon)\right) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \tilde{c}_k\varepsilon^k$.

Оскільки матриця

$$V_0^{(1)}(t) = [\varphi_1(t),\varphi_2(t),\dots,\varphi_{n-1}(t);\tilde{\varphi}(t)]$$

неособлива при всіх $t\in[0;T]$, то вектори $c_k = \mathrm{col}\left(c_k^{(1)},\dots,c_k^{(n)}\right)$ з рівняння (70) однозначно визначаються за формулами

$$c_0 = \left(V_0^{(1)}(0)\right)^{-1} x_0^{(1)}; \tag{72}$$

$$c_k = \left(V_0^{(1)}(0)\right)^{-1} \left(x_k^{(1)} - \sum_{s=1}^{k} V_s^{(1)}(0) c_{k-s}\right), \; k = 1, 2, \ldots. \qquad (73)$$

Згідно (34), (63), (66) $\tilde{V}_0^{(1)}(t) = -\left[R_1^{-1} K_0 \psi_1, \ldots, R_{n-1}^{-1} K_0 \psi_{n-1}, \frac{1}{2}\left(K_0 \tilde{\psi}, \tilde{\psi}\right) \tilde{\varphi}\right]$, де $K_0(t) = C_0(t) D_0^{-1}(t) C_0^*(t)$.

Припустимо, що виконуються умови

$$\left(K_0(t)\tilde{\psi}(t), \tilde{\psi}(t)\right) \neq 0, \; \forall t \in [0; T]; \qquad (74)$$

$$\det\left[R_1^{-1}(T) K_0(T) \psi_1(T), \ldots, R_{n-1}^{-1}(T) K_0(T) \psi_{n-1}(T), \tilde{\varphi}(T)\right] \neq 0. \qquad (75)$$

Тоді $\det \tilde{V}_0^{(1)}(T) \neq 0$, і, отже, рівняння (71) також буде однозначно розв'язне. Вектори $\tilde{c}_k$, $k = 0, 1, \ldots$, з нього визначимо за рекурентними формулами

$$\tilde{c}_0 = \left(\tilde{V}_0^{(1)}(T)\right)^{-1} x_0^{(2)}; \qquad (76)$$

$$\tilde{c}_k = \left(\tilde{V}_0^{(1)}(T)\right)^{-1} \left(x_k^{(2)} - \sum_{s=1}^{k} \tilde{V}_s^{(1)}(T) \tilde{c}_{k-s}\right), \; k = 1, 2, \ldots. \qquad (77)$$

Асимптотичний характер побудованого розв'язку доводиться за тією ж схемою, що й у випадку нормальної системи, розглянутому в [6]. Тому, не проводячи детальних викладок, зупинимось на особливостях системи (1) та побудованого формального розв'язку відповідної крайової задачі (10), (12), які впливають на асимптотичну оцінку.

l-наближення $y_l(t,\varepsilon)$, утворене з (69) шляхом обривання відповідних розвинень на l-му члені, задовольняє систему (10) з точністю до $O\left(\varepsilon^l\right)$, а не $O\left(\varepsilon^{l+1}\right)$ у зв'язку з присутністю множників $\left(\sum_{k=1}^{l} \xi_k \varepsilon^k\right)^{-1}$ у виразі $\tilde{A}(t,\varepsilon) y_l(t,\varepsilon) - \varepsilon^h \tilde{B}(t,\varepsilon) \frac{dy_l(t,\varepsilon)}{dt}$. Крім того, як показано в [4], $\det B(t,\varepsilon) = \varepsilon^2 \left((B_1 G B_1 - B_2)\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}\right) + O\left(\varepsilon^3\right)$, звідки випливає, що матриця $B^{-1}(t,\varepsilon)$ має полюс другого порядку по ε у точці $\varepsilon = 0$. Враховуючи ці обставини, приходимо до таких оцінок для шуканих вектора стану $x(t,\varepsilon)$ та керування $u(t,\varepsilon)$:

$$\|x(t,\varepsilon) - x_l(t,\varepsilon)\| \leq c_1 \varepsilon^{l-2-h}, \; \|u(t,\varepsilon) - u_l(t,\varepsilon)\| \leq c_2 \varepsilon^{l-2-h},$$

де

$$\begin{aligned} x_l(t,\varepsilon) = {} & \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{k=0}^{l} \varepsilon^k \sum_{s=0}^{k} v_{si}^{(1)} c_{k-s}^{(i)} \exp\left(\varepsilon^{-h} \int_0^t \left(\lambda_i(\tau) + \sum_{k=0}^{l} \varepsilon^k \lambda_k^{(i)}(\tau)\right) d\tau\right) + \\ & + \sum_{k=0}^{l} \varepsilon^k \sum_{s=0}^{k} w_s^{(1)} c_{k-s}^{(n)} \exp\left(\varepsilon^{-h-1} \int_0^t \left(\sum_{k=1}^{l} \varepsilon^k \xi_k(\tau)\right)^{-1} d\tau\right) + \\ & + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{k=0}^{l} \varepsilon^k \sum_{s=0}^{k} \tilde{v}_{si}^{(1)} \tilde{c}_{k-s}^{(i)} \exp\left(\varepsilon^{-h} \int_t^T \left(\lambda_i(\tau) + \sum_{k=0}^{l} \varepsilon^k \lambda_k^{(i)}(\tau)\right) d\tau\right) + \\ & + \sum_{k=0}^{l} \varepsilon^k \sum_{s=0}^{k} \tilde{w}_s^{(1)} \tilde{c}_{k-s}^{(n)} \exp\left(\varepsilon^{-h-1} \int_t^T \left(\sum_{k=1}^{l} \varepsilon^k \xi_k(\tau)\right)^{-1} d\tau\right), \end{aligned} \qquad (78)$$

$$u_l(t,\varepsilon)=\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{k=0}^{l}\varepsilon^k\sum_{s=0}^{k}\tilde{v}_{si}^{(3)}\tilde{c}_{k-s}^{(i)}\exp\left(\varepsilon^{-h}\int_t^T\left(\lambda_i(\tau)+\sum_{k=0}^{l}\varepsilon^k\lambda_k^{(i)}(\tau)\right)d\tau\right)+$$
$$+\sum_{k=0}^{l}\varepsilon^k\sum_{s=0}^{k}\tilde{w}_s^{(3)}\tilde{c}_{k-s}^{(n)}\exp\left(\varepsilon^{-h-1}\int_t^T\left(\sum_{k=1}^{l}\varepsilon^k\xi_k(\tau)\right)^{-1}d\tau\right). \quad (79)$$

Отже, справджується така теорема.

Теорема 1. *Якщо виконуються умови* 1°–10°, *(74), (75), то існує єдиний вектор керування* $u(t,\varepsilon)$, *який виражається асимптотичною формулою*

$$u(t,\varepsilon)=u_l(t,\varepsilon)+O\left(\varepsilon^{l-2-h}\right),$$

що переводить систему (1) із стану $x_1(\varepsilon)$ *в стан* $x_2(\varepsilon)$, *мінімізуючи функціонал (2), де* $u_l(t,\varepsilon)$ *зображується у вигляді розвинення (79), коефіцієнти якого знаходяться за формулами (32), (33), (57), (58), (76), (77). Відповідна траєкторія, за якою здійснюється цей перехід, виражається асимптотичною формулою*

$$x(t,\varepsilon)=x_l(t,\varepsilon)+O\left(\varepsilon^{l-2-h}\right),$$

де вектор $x_l(t,\varepsilon)$ *зображується розвиненням (78), коефіцієнти якого знаходяться за формулами (17)–(20), (30)–(36), (55)–(58), (63), (64), (66)–(68), (72), (73), (76), (77).*

Список використаної літератури

1. *Тарасенко О. В.* Про побудову асимптотичного розв'язку лінійної сингулярно збуреної задачі оптимального керування з виродженням в критерії якості // Буковинський математичний журнал. – 2014. – Т. 2, № 2-3. – С. 214-222.
2. *Тарасенко О. В.* Побудова асимптотичного розв'язку задачі оптимального керування для лінійної сингулярно збуреної системи диференціальних рівнянь // Науковий часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. – 2012. – № 13 (1). – С. 210-232.
3. *Самойленко А. М., Шкіль М. І., Яковець В. П.* Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженнями. – К.: Вища школа, 2000. – 294 с.
4. *Шкиль Н. И., Старун И. И., Яковец В. П.* Асимптотическое интегрирование линейных систем дифференциальных уравнений с вырождениями. – К.: Вища шк., 1991. – 207 с.
5. *Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г. Гамкрелидзе Р. В. Мищенко Е. Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. – М.: Наука, 1983. – 392 с.
6. *Тарасенко О. В.* Про асимптотичний розв'язок лінійної сингулярно збуреної задачі оптимального керування з виродженням // Науковий вісник Ужгородського університету. Серія: Математика і інформатика. – 2013. – Випуск 24, N2. – С. 193-205.

Одержано 24.05.2015