УДК 519.21

А. М. Тегза (Ужгородський нац. ун-т)

ОЦІНКИ СУБГАУССОВОГО СТАНДАРТУ ТА ПОБУДОВА МОДЕЛІ ГАУССОВОГО СТАЦІОНАРНОГО ВИПАДКОВОГО ПРОЦЕСУ У ПРОСТОРІ $C([0,T])$.

We constructed model of Gaussian processes, which approximates these processes with given accuracy and reliability in $C([0,T])$.

Одержано деякі оцінки субгауссового стандарту, за якими побудовано загальну модель гауссового стаціонарного процесу, яка наближає цей процес з заданою точністю і надійністю в $C([0,T])$.

Вступ. Всі необхідні відомості з теорії субгауссових випадкових величин містяться у книгах [1], [2]. Основні принципи побудови моделей гауссових випадкових процесів та полів можна знайти в книзі [3]. У роботі одержано деякі оцінки субгауссового стандарту і побудовано загальну модель гауссового стаціонарного процесу, яка наближає цей процес з заданою точністю і надійністю в $C([0,T])$.

Робота складається з трьох розділів. У першому розділі описано всі необхідні відомості з теорії субгауссових процесів. У другому — одержано деякі оцінки субгауссового стандарту для моделі гауссового стаціонарного процесу. У третьому — для часткового випадку побудовано модель із заданою точністю та надійністю.

1. Властивості $Sub(\Omega)$ простору. Нехай $\{\Omega, \mathcal{B}, P\}$ стандартний ймовірнісний простір. Нагадаємо (див. [1]), що центровану випадкову величину ξ будемо називати субгауссовою, якщо знайдеться таке $a \geq 0$, що для всіх $\lambda \in R$ виконується нерівність

$$E\exp\{\lambda\xi\} \leq \exp\left\{\frac{a^2\lambda^2}{2}\right\}.$$

Клас усіх субгауссових випадкових величин позначають $Sub(\Omega)$. Простір $Sub(\Omega)$ є банаховим простором відносно норми $\tau(\xi)$ [1].

Нехай $X = \{X(t), t \in \mathcal{T}\}$ гауссовий випадковий процес. Припустимо, що виконується умова Дадлі:

$$I(\varepsilon_0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int\limits_0^{\varepsilon_0} \sqrt{H(\varepsilon)} d\varepsilon < \infty,$$

де $H(\varepsilon) = H_\rho(\mathcal{T}, \varepsilon)$ – метрична ентропія множини $\mathcal{T}$ відносно субгауссового відхилення $\rho(t,s)$, тоді справедливим буде таке співвідношення [1]

$$P\left\{\sup_{t\in\mathcal{T}} |X(t)| \geq \delta\right\} \leq 2\exp\left\{-\frac{1}{2\varepsilon_0^2}\left(\delta - \sqrt{8\delta I(\varepsilon_0)}\right)^2\right\}.$$

Нехай $\mathcal{T} = [0,T]$ і $\sup\limits_{|t-s|<h} \tau(X(t) - X(s)) \leq \sigma(h)$, де $\sigma(h) \geq 0$ є неперервною монотонно спадною функцією, такою що $\sigma(h) \to 0$ при $h \to 0$. Тоді

$$I(\varepsilon_0) \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \int_o^{\varepsilon_0} \left(\ln\left(\frac{T}{2\sigma^{(-1)}(\varepsilon)} + 1\right)\right)^{1/2} d\varepsilon.$$

2. Деякі оцінки для загальної моделі гауссового стаціонарного процесу.

Нехай $X = \{X(t), t \in \mathfrak{T}\}$ – гауссів стаціонарний дійсний центрований неперервний в середньому квадратичному випадковий процес з коваріаційною функцією

$$EX(t+\tau)X(t) = r(\tau) = \int_0^\infty \cos\lambda\tau dF(\lambda)\ ,$$

де $F(\lambda)$ – неперервна спектральна функція процесу.

Випадковий процес $X(t)$ має зображення

$$X(t) = \int_0^\infty \cos\lambda t d\eta_1(\lambda) + \int_0^\infty \sin\lambda t d\eta_2(\lambda),$$

де $\eta_1(\lambda)$, $\eta_2(\lambda)$ незалежні центровані гауссові випадкові процеси з незалежними приростами. Представимо $X(t)$ як

$$X(t) = X_\Lambda(t) + X^\Lambda(t),$$

де $X_\Lambda(t) = \int_0^\Lambda \cos\lambda t d\eta_1(\lambda) + \int_0^\Lambda \sin\lambda t d\eta_2(\lambda)$,

$$X^\Lambda(t) = \int_\Lambda^\infty \cos\lambda t d\eta_1(\lambda) + \int_\Lambda^\infty \sin\lambda t d\eta_2(\lambda).$$

За модель процесу $X(t)$ візьмемо

$$X_\Lambda^M(t) = \sum_{k=0}^M (\eta_{k1}\cos\zeta_k t + \eta_{k2}\sin\zeta_k t), \tag{1}$$

де $\Lambda = \{\lambda_0, \dots, \lambda_M\}$ таке розбиття множини $[0,\infty]$, що $\lambda_0 = 0$, $\lambda_k < \lambda_{k+1}$, $\lambda_{M+1} = \infty$; η_{k1}, η_{k2}, ζ_k незалежні випадкові величини такі, що $E\eta_{k1} = E\eta_{k2} = 0$,

$$E\eta_{k1}^2 = E\eta_{k2}^2 = F(\lambda_{k+1}) - F(\lambda_k) = b_k^2, \quad k = 1, \dots, M,$$

ζ_k –випадкові величини, що приймають значення на відрізках $[\lambda_k, \lambda_{k+1}]$ та мають такі функції розподілу

$$P\{\zeta_k < \lambda\} = F_k(\lambda) = \frac{F(\lambda) - F(\lambda_k)}{F(\lambda_{k+1}) - F(\lambda_k)}.$$

Покажемо за яких умов треба вибирати розбиття Λ, щоб для моделі X_Λ^M існував центрований гауссовий процес $X(t)$, який би вона наближала в просторі $C([0,T])$ із заданими точністю та надійністю.

Позначимо

$$\eta_\Lambda(t) = X(t) - X_\Lambda^M(t)$$
$$= \sum_{k=0}^{M-1}\left[\int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}}(\cos\lambda t - \cos\zeta_k t)d\eta_1(\lambda) + \int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}}(\sin\lambda t - \sin\zeta_k t)d\eta_2(\lambda)\right]$$
$$+\int\limits_{\lambda_M}^{\infty}(\cos\lambda t - \cos\zeta_M t)d\eta_1(\lambda) + \int\limits_{\lambda_M}^{\infty}(\sin\lambda t - \sin\zeta_M t)d\eta_2(\lambda). \quad (2)$$

Справедливі наступні теореми.

Теорема 1. *Якщо* $\int_0^\infty\int_0^\infty|u-\lambda|^{2\alpha}dF(\lambda)dF(u) < \infty$ *при* $0 < \alpha \le 1$, *то для субгауссового процесу* $\eta_\Lambda(t)$ *має місце така оцінка*

$$\tau(\eta_\Lambda(t)) \le \frac{t^\alpha}{2^{\alpha-2}}\left(\left(\frac{\Lambda}{M}\right)^{2\alpha}F(\Lambda) + \int_\Lambda^\infty\int_\Lambda^\infty|u-\lambda|^{2\alpha}dF(\lambda)dF(u)\right)^{1/2}.$$

Доведення.

$$\tau^2(\eta_\Lambda(t)) \le \sum_{k=0}^{M-1}\tau^2\left(\int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}}(\cos\lambda t - \cos\zeta_k t)d\eta_1(\lambda) + \int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}}(\sin\lambda t - \sin\zeta_k t)d\eta_2(\lambda)\right) +$$
$$+\tau^2\left(\int\limits_{\lambda_M}^{\infty}(\cos\lambda t - \cos\zeta_M t)d\eta_1(\lambda) + \int\limits_{\lambda_M}^{\infty}(\sin\lambda t - \sin\zeta_M t)d\eta_2(\lambda)\right). \quad (3)$$

Оцінимо перший доданок у (3):

$$\tau^2\left(\int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}}(\cos\lambda t - \cos\zeta_k t)d\eta_1(\lambda) + \int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}}(\sin\lambda t - \sin\zeta_k t)d\eta_2(\lambda)\right) \le$$
$$\le\left(\tau\left(\int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}}(\cos\lambda t - \cos\zeta_k t)d\eta_1(\lambda)\right) + \tau\left(\int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}}(\sin\lambda t - \sin\zeta_k t)d\eta_2(\lambda)\right)\right)^2. \quad (4)$$

$$\tau^2\left(\int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}}(\cos\lambda t-\cos\zeta_k t)d\eta_1(\lambda)\right)\le\theta_1^2\left(\int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}}(\cos\lambda t-\cos\zeta_k t)d\eta_1(\lambda)\right)\le$$

$$\le\sup_{m\ge1}\left[\frac{1}{\Delta_{2m}}E\left(\int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}}(\cos\lambda t-\cos\zeta_k t)d\eta_1(\lambda)\right)^{2m}\right]^{\frac{1}{m}}\le$$

$$\le\sup_{m\ge1}\left[4^mE\left(\int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}}\left|\sin\frac{t(\zeta_k-\lambda)}{2}\right|^2dF(\lambda)\right)^m\right]^{\frac{1}{m}}=$$

$$=\sup_{m\ge1}\left[4^mb_k^{2m}\left(\int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}}\left(\int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}}\left|\sin\frac{t(u-\lambda)}{2}\right|^2dF_k(u)\right)^m dF_k(\lambda)\right)\right]^{\frac{1}{m}}=$$

$$=\sup_{m\ge1}4b_k^2\left(\int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}}\left(\int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}}\left|\sin\frac{t(u-\lambda)}{2}\right|^2dF_k(u)\right)^m dF_k(\lambda)\right)^{\frac{1}{m}}\le$$

$$\le\sup_{m\ge1}4b_k^2\left(\int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}}\int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}}\frac{t^{2\alpha m}|u-\lambda|^{2\alpha m}}{4^{\alpha m}}dF_k(u)dF_k(\lambda)\right)^{\frac{1}{m}}\le$$

$$\le\frac{t^{2\alpha}|\lambda_{k+1}-\lambda_k|^{2\alpha}}{4^{\alpha-1}}\left(F(\lambda_{k+1})-F(\lambda_k)\right)=I_k,$$

де $\alpha\in[0,1]$.

Аналогічно отримаємо

$$\tau^2\left(\int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}}(\sin\lambda t-\sin\zeta_k t)d\eta_2(\lambda)\right)\le I_k.$$

Оцінимо другий доданок у (3):

$$\tau^2\left(\int\limits_{\lambda_M}^{\infty}(\cos\lambda t-\cos\zeta_M t)d\eta_1(\lambda)\right)\le\theta_1^2\left(\int\limits_{\lambda_M}^{\infty}(\cos\lambda t-\cos\zeta_M t)d\eta_1(\lambda)\right)\le$$

$$\le\sup_{m\ge1}\left[\frac{1}{\Delta_{2m}}E\left(\int\limits_{\lambda_M}^{\infty}(\cos\lambda t-\cos\zeta_M t)d\eta_1(\lambda)\right)^{2m}\right]^{\frac{1}{m}}\le$$

$$\le\sup_{m\ge1}\left[E\left(\int\limits_{\lambda_M}^{\infty}\left|2\sin\frac{t(\lambda-\zeta_M)}{2}\right|^2dF(\lambda)\right)^m\right]^{\frac{1}{m}}\le$$

$$\leq \sup_{m\geq 1}\left[\int\limits_{\lambda_M}^{\infty}\left(\int\limits_{\lambda_M}^{\infty}\frac{|t(u-\lambda)^{2\alpha}}{4^{\alpha-1}}dF(\lambda)\right)^m dF(u)\right]^{\frac{1}{m}} \leq$$

$$\leq \sup_{m\geq 1}\left(\int\limits_{\lambda_M}^{\infty}\int\limits_{\lambda_M}^{\infty}\frac{t^{2m\alpha}|u-\lambda|^{2m\alpha}}{4^{(\alpha-1)m}}dF(\lambda)dF(u)\right)^{\frac{1}{m}} \leq \int\limits_{\lambda_M}^{\infty}\int\limits_{\lambda_M}^{\infty}\frac{t^{2\alpha}}{4^{\alpha-1}}|u-\lambda|^{2\alpha}dF(\lambda)dF(u).$$

Аналогічно отримаємо

$$\tau^2\left(\int\limits_{\lambda_M}^{\infty}(\sin\lambda t-\sin\zeta_M t)d\eta_2(\lambda)\right) \leq \int\limits_{\lambda_M}^{\infty}\int\limits_{\lambda_M}^{\infty}\frac{t^{2\alpha}}{4^{\alpha-1}}|u-\lambda|^{2\alpha}dF(\lambda)dF(u).$$

Співставивши (3) і (4), використавши останні нерівності, матимемо

$$\tau^2(\eta_\Lambda(t)) \leq \sum_{k=0}^{M-1}\tau^2\left(\int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}}(\cos\lambda t-\cos\zeta_k t)d\eta_1(\lambda)+\int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}}(\sin\lambda t-\sin\zeta_k t)d\eta_2(\lambda)\right)+$$
$$+\tau^2\left(\int\limits_{\lambda_M}^{\infty}(\cos\lambda t-\cos\zeta_k t)d\eta_1(\lambda)+\int\limits_{\lambda_M}^{\infty}(\sin\lambda t-\sin\zeta_k t)d\eta_2(\lambda)\right) \leq$$
$$\leq \sum_{k=0}^{M-1}\left(\tau\left(\int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}}(\cos\lambda t-\cos\zeta_k t)d\eta_1(\lambda)\right)+\tau\left(\int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}}(\sin\lambda t-\sin\zeta_k t)d\eta_2(\lambda)\right)\right)^2+$$
$$+\left(\tau\left(\int\limits_{\lambda_M}^{\infty}(\cos\lambda t-\cos\zeta_k t)d\eta_1(\lambda)\right)+\tau\left(\int\limits_{\lambda_M}^{\infty}(\sin\lambda t-\sin\zeta_k t)d\eta_2(\lambda)\right)\right)^2 \leq$$
$$\leq \sum_{k=0}^{M-1}4I_k+4\int\limits_{\lambda_M}^{\infty}\int\limits_{\lambda_M}^{\infty}\frac{t^{2\alpha}}{4^{\alpha-1}}|u-\lambda|^{2\alpha}dF(\lambda)dF(u).$$

Якщо покладемо $\lambda_{k+1}-\lambda_k=\frac{\Lambda}{M}$, то

$$\tau(\eta_\Lambda(t)) \leq 2\left(\sum_{k=0}^{M-1}\frac{t^{2\alpha}|\lambda_{k+1}-\lambda_k|^{2\alpha}}{4^{\alpha-1}}b_k^2+\int_\Lambda^\infty\int_\Lambda^\infty\frac{(t|u-\lambda|)^{2\alpha}}{4^{\alpha-1}}dF(\lambda)dF(u)\right)^{1/2}=$$
$$=\frac{t^\alpha}{2^{\alpha-2}}\left(\frac{\Lambda^{2\alpha}}{M^{2\alpha}}F(\Lambda)++\int_\Lambda^\infty\int_\Lambda^\infty|u-\lambda|^{2\alpha}dF(\lambda)dF(u)\right)^{1/2}.$$

Для $\forall t, s \in \mathcal{T}$

$$\eta_\Lambda(t) - \eta_\Lambda(s) = \sum_{k=0}^{M-1} \left[\int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} (\cos\lambda t - \cos\zeta_k t - \cos\lambda s + \cos\zeta_k s) d\eta_1(\lambda) + \right.$$

$$\left. + \int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} (\sin\lambda t - \sin\zeta_k t - \sin\lambda s + \sin\zeta_k s) d\eta_2(\lambda) \right] +$$

$$+ \int_{\lambda_M}^{\infty} (\cos\lambda t - \cos\zeta_M t - \cos\lambda s + \cos\zeta_M s) d\eta_1(\lambda) + \int_{\lambda_M}^{\infty} (\sin\lambda t - \sin\zeta_M t - \sin\lambda s + \sin\zeta_M s) d\eta_2(\lambda). \tag{5}$$

Теорема 2. *Якщо виконуються умови теореми 1, то* $\forall t, s \in [0, T]$, *і* $0 < \alpha \le 1$ *має місце така оцінка*

$$\tau(\eta_\Lambda(t) - \eta_\Lambda(s)) \le 8 \frac{|s-t|^\alpha}{4^\alpha} \left(\frac{\Lambda^{2\alpha}}{M^{2\alpha}} F(\Lambda) \left(1 + T^\alpha \Lambda^\alpha\right)^2 + \right.$$

$$\left. + \int_\Lambda^\infty \int_\Lambda^\infty 2|u-\lambda|^{2\alpha} dF(\lambda) dF(u) + 2(1 - F(\Lambda)) \int_\Lambda^\infty (2u)^{2\alpha} dF(u) \right)^{1/2}. \tag{6}$$

Доведення. Введемо позначення:

$$\omega_{k1} = \int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} (\cos\lambda t - \cos\zeta_k t - \cos\lambda s + \cos\zeta_k s) d\eta_1(\lambda),$$

$$\omega_{k2} = \int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} (\sin\lambda t - \sin\zeta_k t - \sin\lambda s + \sin\zeta_k s) d\eta_2(\lambda),$$

$$\omega_{M1} = \int_{\lambda_M}^{\infty} (\cos\lambda t - \cos\zeta_k t - \cos\lambda s + \cos\zeta_k s) d\eta_1(\lambda),$$

$$\omega_{M2} = \int_{\lambda_M}^{\infty} (\sin\lambda t - \sin\zeta_k t - \sin\lambda s + \sin\zeta_k s) d\eta_2(\lambda).$$

З (5) та властивості субгауссового стандарту випливає справедливість оцінок:

$$\tau^2(\eta_\Lambda(t) - \eta_\Lambda(s)) \le \sum_{k=0}^{M-1} \left(\tau(\omega_{k1}) + \tau(\omega_{k2})\right)^2 + \left(\tau(\omega_{M1}) + \tau(\omega_{M2})\right)^2 \le$$

$$\le 2 \sum_{k=0}^{M-1} \left(\tau^2(\omega_{k1}) + \tau^2(\omega_{k2})\right) + 2\tau^2(\omega_{M1}) + 2\tau^2(\omega_{M2}).$$

Аналогічними до попередньої теореми оцінками, одержимо:

$$\tau^2(\omega_{k1}) \leq 16 \sup_{m\geq 1} \left(E \left(\int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} \left(\left| \sin \frac{(s-t)(\lambda-\zeta_k)}{4} \right| + \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. + \left| \sin \frac{(s-t)\zeta_k}{2} \right| \cdot \left| \sin \frac{(s+t)(\lambda-\zeta_k)}{4} \right| \right)^2 dF(\lambda) \right)^m \right)^{\frac{1}{m}} \leq$$

$$\leq 16 \left(\frac{|s-t|^\alpha (\lambda_{k+1}-\lambda_k)^\alpha}{4^\alpha} + \frac{|s-t|^\alpha \lambda_{k+1}^\alpha}{2^\alpha} \cdot \frac{(s+t)^\alpha (\lambda_{k+1}-\lambda_k)^\alpha}{4^\alpha} \right)^2 (F(\lambda_{k+1}) - F(\lambda_k)) \leq$$

$$\leq 16 (F(\lambda_{k+1}) - F(\lambda_k)) \frac{|s-t|^{2\alpha} (\lambda_{k+1}-\lambda_k)^{2\alpha}}{4^{2\alpha}} \left(1 + \frac{\lambda_{k+1}^\alpha (2T)^\alpha}{2^\alpha} \right)^2 = J_k.$$

Аналогічно $\tau^2(\omega_{k2}) \leq J_k$.

$$\tau^2(\omega_{M1}) \leq \theta_1^2(\omega_{M1}) \leq 16 \sup_{m\geq 1} \left(E \left(\int\limits_{\lambda_M}^{\infty} \left(\left| \sin \frac{(s-t)(\lambda-\zeta_M)}{4} \right| + \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. + \left| \sin \frac{(s-t)\zeta_M}{2} \right| \cdot \left| \sin \frac{(s+t)(\lambda-\zeta_M)}{4} \right| \right)^2 dF(\lambda) \right)^m \right)^{\frac{1}{m}} \leq$$

$$\leq 16 \sup_{m\geq 1} \left(\int\limits_{\lambda_M}^{\infty} \int\limits_{\lambda_M}^{\infty} \left(\left| \sin \frac{(s-t)(\lambda-u)}{4} \right| + \left| \sin \frac{(s-t)\zeta_M}{2} \right| \cdot \left| \sin \frac{(s+t)(\lambda-u)}{4} \right| \right)^{2m} \right.$$

$$\left. dF(\lambda) dF(u) \right)^{\frac{1}{m}} \leq 16 \sup_{m\geq 1} \left(\int\limits_{\lambda_M}^{\infty} \int\limits_{\lambda_M}^{\infty} \left(\frac{|s-t|^\alpha |\lambda-u|^\alpha}{4^\alpha} + \frac{|u(s-t)|^\alpha}{2^\alpha} \right)^{2m} dF(\lambda) dF(u) \right)^{\frac{1}{m}} \leq$$

$$\leq 16 \int\limits_{\lambda_M}^{\infty} \int\limits_{\lambda_M}^{\infty} \frac{|s-t|^{2\alpha}}{4^{2\alpha}} 2 \left(|\lambda-u|^{2\alpha} + (2u)^{2\alpha} \right) dF(\lambda) dF(u) =$$

$$= 32 \frac{|s-t|^{2\alpha}}{4^{2\alpha}} \left(\int\limits_{\lambda_M}^{\infty} \int\limits_{\lambda_M}^{\infty} |\lambda-u|^{2\alpha} dF(\lambda) dF(u) + (1 - F(\lambda_M)) \int\limits_{\lambda_M}^{\infty} (2u)^{2\alpha} dF(u) \right).$$

Аналогічно

$$\tau^2(\omega_{M2}) \leq \theta_1^2(\omega_{M2}) \leq$$

$$\leq 32 \frac{|s-t|^{2\alpha}}{4^{2\alpha}} \left(\int\limits_{\lambda_M}^{\infty} \int\limits_{\lambda_M}^{\infty} |\lambda-u|^{2\alpha} dF(\lambda) dF(u) + (1 - F(\lambda_M)) \int\limits_{\lambda_M}^{\infty} (2u)^{2\alpha} dF(u) \right).$$

Тоді

$$\tau^2(\eta_\Lambda(t)-\eta_\Lambda(s)) \le 4\sum_{k=0}^{M-1} J_k +$$
$$+128\frac{|s-t|^{2\alpha}}{4^{2\alpha}}\left[\int_{\lambda_M}^{\infty}\int_{\lambda_M}^{\infty}|\lambda-u|^{2\alpha}dF(\lambda)dF(u)+(1-F(\lambda_M))\int_{\lambda_M}^{\infty}(2u)^{2\alpha}dF(u)\right].$$

Якщо покласти $\lambda_{k+1}-\lambda_k=\frac{\Lambda}{M}$, то

$$\tau^2(\eta_\Lambda(t)-\eta_\Lambda(s)) \le \frac{128|s-t|^{2\alpha}}{4^{2\alpha}}\times$$
$$\times\left[\frac{\Lambda^{2\alpha}}{2M^{2\alpha}}F(\Lambda)(1+\Lambda^\alpha T^\alpha)^2+\int_{\Lambda}^{\infty}\int_{\Lambda}^{\infty}|u-\lambda|^{2\alpha}dF(\lambda)dF(u)+(1-F(\Lambda))\int_{\Lambda}^{\infty}(2u)^{2\alpha}dF(u)\right].$$

тобто одержимо (6).

3. Побудова моделі гауссового стаціонарного процесу.

Теорема 3. *Якщо випадковий процес $X_\Lambda^M(t)$ має розбиття Λ таке, що виконується нерівність:*

$$2exp\left\{-\frac{1}{2\varepsilon_0^2}(\delta-\sqrt{8\delta I(\varepsilon_0)})^2\right\}\le\beta \tag{7}$$

при $\delta>8I(\varepsilon_0)$, де

$$I(\varepsilon_0)=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\varepsilon_0}\left(\ln\left(\frac{T8^{\frac{1}{\alpha}-1}K^{\frac{1}{\alpha}}}{\varepsilon^{\frac{1}{\alpha}}}+1\right)\right)^{\frac{1}{2}}d\varepsilon,$$

$$K=\left[\frac{\Lambda^{2\alpha}}{M^{2\alpha}}F(\Lambda)(1+\Lambda^\alpha T^\alpha)^2+2\int_{\Lambda}^{\infty}\int_{\Lambda}^{\infty}|u-\lambda|^{2\alpha}dF(\lambda)dF(u)+2(1-F(\Lambda))\int_{\Lambda}^{\infty}(2u)^{2\alpha}dF(u)\right]^{\frac{1}{2}},$$

$$\varepsilon_0=\frac{T^\alpha}{2^{\alpha-2}}\left(\frac{\Lambda^{2\alpha}}{M^{2\alpha}}F(\Lambda)++\int_\Lambda^\infty\int_\Lambda^\infty|u-\lambda|^{2\alpha}dF(\lambda)dF(u)\right)^{\frac{1}{2}}$$

тоді модель наближатиметься до гауссового випадкового процесу $X(t)$ у просторі $C([0,T])$ з надійністю $1-\beta$, $0<\beta<1$ та точністю $\delta>0$.

Доведення. З ентропійної характеристики випадкових процесів матимемо:

$$P\left\{\sup_{0\le t\le T}\left|X(t)-X_\Lambda^M(t)\right|\ge\delta\right\}\le 2exp\left\{-\frac{1}{2\varepsilon_0^2}(\delta-\sqrt{8\delta I(\varepsilon_0)})^2\right\}$$

З теореми 2 випливає, що

$$\sigma(h)=\sup_{|t-s|<h}\tau(\eta_\Lambda(t)-\eta_\Lambda(s))\le 8\frac{h^\alpha}{4^\alpha}K,$$

де

$$K=\left[\frac{\Lambda^{2\alpha}}{M^{2\alpha}}F(\Lambda)(1+\Lambda^{\alpha}T^{\alpha})^2+2\int\limits_{\Lambda}^{\infty}\int\limits_{\Lambda}^{\infty}|u-\lambda|^{2\alpha}dF(\lambda)dF(u)+2(1-F(\Lambda))\int\limits_{\Lambda}^{\infty}(2u)^{2\alpha}dF(u)\right]^{1/2}.$$

Тоді

$$\sigma^{(-1)}(h)=4\left(\frac{h}{8K}\right)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

А, отже,

$$I(\varepsilon_0)=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\limits_0^{\varepsilon_0}\left(\ln\left(\frac{T}{2\sigma^{(-1)}(\varepsilon)}+1\right)\right)^{1/2}d\varepsilon=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\limits_0^{\varepsilon_0}\left(\ln\left(\frac{T8^{\frac{1}{\alpha}-1}K^{\frac{1}{\alpha}}}{\varepsilon^{\frac{1}{\alpha}}}+1\right)\right)^{1/2}d\varepsilon,$$

де $\varepsilon_0=\sup\limits_{0\le t\le T}\tau(\eta_\Lambda(t))$ визначено у теоремі 1.

Згідно означення наближення моделі процесу з заданими точністю і надійністю у нормі простору $C([0,T])$, модель $X_\Lambda^M(t)$ наближатиметься до гауссового випадкового процесу $X(t)$ у просторі $C([0,T])$ з надійністю $1-\beta$, $0<\beta<1$ та точністю $\delta>0$, якщо виконуватиметься умова (7).

Чим меншим вибирати значення α, тим повільніше буде збігатись інтеграл $I(\varepsilon_0)$, тому для простоти обчислень в якості часткового випадку розглянемо $\alpha=1$ та $F(\lambda)=1-e^{-\lambda}$, $T=1$. Тоді одержимо

$$I(\varepsilon_0)=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\limits_0^{\varepsilon_0}\sqrt{\ln\left(1+\frac{K}{\varepsilon}\right)}d\varepsilon\le\frac{1}{\sqrt{2}}\int\limits_0^{\varepsilon_0}\frac{\sqrt{K}}{\sqrt{\varepsilon}}d\varepsilon=\sqrt{2K\varepsilon_0}=$$

$$=2\left[\left(\frac{\Lambda^2}{M^2}(1-e^{-\Lambda})(1+\Lambda)^2+2\int\limits_{\Lambda}^{\infty}\int\limits_{\Lambda}^{\infty}(u-\lambda)^2e^{-\lambda}e^{-u}d\lambda du+2e^{-\Lambda}\int\limits_{\Lambda}^{\infty}(2u)^2e^{-u}du\right)\times\right.$$
$$\left.\times\left(\frac{\Lambda^2}{M^2}(1-e^{-\Lambda})+\int\limits_{\Lambda}^{\infty}\int\limits_{\Lambda}^{\infty}(u-\lambda)^2e^{-\lambda}e^{-u}d\lambda du\right)\right]^{1/4}$$

Розв'язавши відповідні невласні інтеграли, матимемо

$$I(\varepsilon_0)\le\frac{2}{M}\left[\left(\Lambda^2(1-e^{-\Lambda})(1+\Lambda)^2+4M^2e^{-2\Lambda}(2\Lambda^2+4\Lambda+5)\right)\times\right.$$
$$\left.\times\left(\Lambda^2(1-e^{-\Lambda})+2M^2e^{-2\Lambda}\right)\right]^{1/4}.$$

Далі розв'язуємо нерівність (7) відносно M. При $\delta=0.1$, $\beta=0.1$, $\Lambda=50$ отримаємо $M=61940$.

Підставляючи число M у модель (1) і комп'ютерно моделюючи випадкові величини η_{k1}, η_{k2}, ζ_k при $k=\overline{0,M}$, одержимо графік (мал.1).

Висновок. Маючи оцінки субгауссового стандарту, одержані у теоремах 1 і 2, та використовуючи ентропійні характеристики випадкових процесів комп'ютерно змодельовано гауссовий стаціонарний випадковий процес з заданою точністю та надійністю в $C([0,T])$.

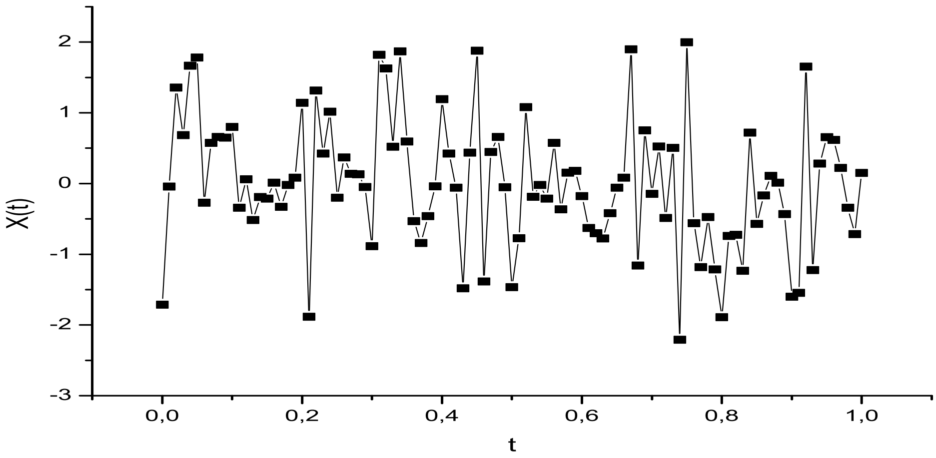

Рис. 1. Загальна модель гауссового стаціонарного випадкового процесу з спектральною функцією $F(\lambda) = 1 - e^{-\lambda}$.

Список використаної літератури

1. *Buldygin V.V and Kozachenko Yu.V.* Metric Characterization of Random Variables and Random processes. – Rhode: American Mathematical Society.– 2000.
2. *Козаченко Ю.В. Пашко А.О.* Моделювання випадкових процесів. – К: Київський університет.– 1999.– 223с.
3. *Ермаков С.М., Михайлов Г.А.* Курс статистического моделирования – Москва, "Наука", 1982. – 184с.

Одержано 15.04.2015