УДК 512.44

В. Б. Трошкі (Київський нац. ун-т ім. Т. Шевченка)

ВИКОРИСТАННЯ МАТРИЦЬ З ВИПАДКОВИМИ ЕЛЕМЕНТАМИ В СТИСКАЮЧОМУ ЗОНДУВАННІ

In this paper we showed that random matrices, whose entries are from some Orlicz space $L_U(\Omega)$, satisfy the Restricted Isometry Property, which is one of the basic concepts in the theory of compressive sensing.

В даній роботі встановлено, що матриці елементи яких належать певним просторам Орліча $L_U(\Omega)$ задовільняють обмеженим властивостям ізометрії, що є одним з основних понять в стисткаючому зондуванні.

Вступ

Випадкові матриці широко використовуються в стискаючому зондуванні для кодування вектора $x \in R^N$, який ми отримали внаслідок вимірювання $y = Ax$, де A- це $n \times N$ випадкова матриця норма кожного стовпця якої дорівнює одиниці. Початки дана теорія бере в роботах Кашина [1], Горнаєва і Глускіна [2], однак більш стрімкий та сучасний її розвиток почався з робіт Донаго [3].

Будемо казати, що матриця A задовільняє обмеженим властивостям ізометрії порядку K якщо існує $\delta \in (0;1)$ таке, що для довільного $x \in \Sigma_K$ виконується $(1-\delta)\|x\|_2^2 \le \|Ax\|_2^2 \le (1+\delta)\|\, x\|_2^2$, де Σ_K – це множина всіх векторів з R^N, які містять не більше ніж K ненульових координат.

На даний час доведено, що матриці з гауссовим, субгауссовим та строго субгаусовими елементами задовільняють обмежені властивості ізометрії (див. [4] та [5]). В роботі [6] було встановлено обмежені властивості ізометрії для матриць елементами яких є випадкові величини з просторів Орліча $L_{U_{1\alpha}}(\Omega)$, де

$$U_{1\alpha}(x) = \begin{cases} \left(\frac{e\alpha}{2}\right)^{\frac{2}{\alpha}} x^2, & \text{при} |x| \le \left(\frac{2}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}}, \\ \exp\{|x|^\alpha\}, & \text{при} |x| > \left(\frac{2}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \end{cases} \quad \text{коли } 0 < \alpha < 1, \qquad (1)$$

В даній роботі розглянутий простір Орліча $L_{U_\alpha}(\Omega)$, де $U_\alpha(x) = \exp\{|x|^\alpha\} - 1$ при $1 < \alpha \le 2$ та доведено, що матриці з елементами з цього простору задовільняють обмеженим властивостям ізометрії.

Необхідні відомості

Означення 1. *[7] Неперервна парна опукла функція $U = \{U(x), x \in \mathbb{R}\}$ називається C-функцією Орліча, якщо $U(0) = 0$ та $U(x)$ монотонно зростає при $x > 0$.*

Означення 2. *[7] Нехай U – довільна C– функція. Простором Орліча випадкових величин $L_U(\Omega)$ називається сім'я випадкових величин, що для кожної $\xi \in L_U(\Omega)$ існує така константа $r_\xi > 0$, що*

$$\mathbf{E}U\left(\frac{\xi}{r_\xi}\right) < \infty.$$

Простір Орліча – це простір Банаха з нормою

$$\|\xi\|_U = \inf\left\{r > 0; EU\left(\frac{\xi}{r}\right) \le 1\right\}.$$

Означення 3. *Для простору Орліча $L_U(\Omega)$ виконується умова* $\mathbf{H}$, *якщо для будь-яких центрованих незалежних випадкових величин $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ з простору $L_U(\Omega)$ справедлива нерівність:*

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} \xi_i\right\|_U^2 \leq C_U \sum_{i=1}^{n} \|\xi_i\|_U^2 .$$

де C_U – деяка абсолютна константа.

Позначимо $L_{U_\alpha}(\Omega)$ – це простір Орліча, що породжений функцією $U_\alpha(x)$. Нехай $U_{1\alpha}(x) = \exp\{|x|^\alpha\}$, $1/2 < \alpha \leq 1$. $S_{U_{1\alpha}}(\Omega)$ – сім'я таких випадкових величин ξ, що існує r при якому $EU_{1\alpha}\left(\frac{\xi}{r}\right) < \infty$. Розглянемо функціонал

$$\ll \xi \gg_{U_{1\alpha}} = \inf\left\{r > 0; EU_{1\alpha}\left(\frac{\xi}{r}\right) \leq 2\right\}. \tag{2}$$

Зауваження 1. *В роботі [8] було доведено, що сім'я $S_{U_{1\alpha}}(\Omega)$ еквівалентна простору $L_{U_{1\alpha}}(\Omega)$ та мають місце наступні нерівності*

$$\|\xi\|_{U_\alpha} \leq \left(e^{2/\alpha+2}\right) \ll \xi \gg_{U_{1\alpha}};$$

$$\ll \xi \gg_{U_{1\alpha}} \leq \|\xi\|_{U_\alpha} \left(e^{2/\alpha}+1\right)^{1/\alpha},$$

тому на далі будемо розглядати саме простір $L_{U_{1\alpha}}(\Omega)$.

Лема 1. *[9] Для простору Орліча $L_{U_\alpha}(\Omega)$, де $U_\alpha(x)$ задана в (1) справджується умова* $\mathbf{H}$ *зі сталою*

$$C_{\psi,\alpha} = 4 \cdot 9^{\frac{1}{\alpha}} \left(\frac{e^{2/\alpha+2}\left(1+\frac{e^{1/12}}{\sqrt{2\pi}}\right)^{1/\alpha}}{\frac{1}{2^{1/\alpha}}\left(e^{2/\alpha}+1\right)^{-1/\alpha}\alpha^{1/\alpha}}\right)^2 .$$

Наступна лема була доведена в роботі [6] для випадку коли $0 < \alpha \leq 1$ для випадку $1 < \alpha \leq 2$ доведення аналогічне, тому тут воно опущене.

Лема 2. *[6] Нехай для симетричної випадкової величини ξ виконується при $D > 0$, $x > 0$*

$$P\{|\xi| > x\} \leq R\exp\left\{-\frac{x^\alpha}{D}\right\}, 1 < \alpha \leq 2,$$

R – це деяка стала. Тоді для випадкової величини $\eta = \xi^2 - E\xi^2$ буде справджуватись:

$$P\{|\eta| > x\} \leq a\exp\left\{-\frac{x^{\frac{\alpha}{2}}}{D}\right\}, \tag{3}$$

де $a = R\left(1+\exp\left\{\left(\frac{8R}{\alpha}\Gamma\left(\frac{2}{\alpha}\right)\right)^{\frac{\alpha}{2}}\right\}\right)$.

Лема 3. *[10, §15] Нехай B_n – це одинична сфера в $(R^n, \|\cdot\|^*)$, де $\|\cdot\|^*$ – довільна норма. Тоді для довільного $\varepsilon > 0$ існує множина $Q_\varepsilon \subset B_n$, що $\#(Q_\varepsilon) \leq (\frac{3}{\varepsilon})^n$, де $\#(Q_\varepsilon)$ – це число елементів в Q_ε і для довільного $b \in B_n$ існує таке $q \in Q_\varepsilon$, що $\|b-q\|^* \leq \varepsilon$.*

Обмежені властивості ізометрії

Теорема 1. *Нехай A це матриця, що містить N стовпців і n рядків, $n \le N$, $a_{ij} = \frac{1}{\sqrt{n}}\xi_{ij}$, де $\xi_{ij} \in L_{U_\alpha}(\Omega)$, ξ_{ij} – незалежні, симетричні, однаково розподілені випадкові величини. Нехай $x \in \boldsymbol{R}^N$ та для всіх i та j, $E\xi_{ij}^2 = b$. Тоді для довільного $\varepsilon > 0$*

$$P\{\big|\|Ax\|_2^2 - b\|x\|_2^2\big| > \varepsilon\|x\|_2^2\} \le 2\exp\left\{-\frac{n^{\frac{\alpha}{4}}\varepsilon^{\frac{\alpha}{2}}}{(C_1C_{\psi,\alpha}gn)^{\frac{\alpha}{4}}\sqrt{(1+a)}}\right\},$$

де $a = R\left(1+\exp\left\{\left(\frac{8R}{\alpha}\Gamma\left(\frac{2}{\alpha}\right)\right)^{\frac{\alpha}{2}}\right\}\right)$ – це стала з леми 2, $C_{\psi,\alpha}$ визначена в лемі 1, $g = \ll \xi_{ij} \gg_{U_{1\alpha}}^2$, C_1 – це деяка стала.

Доведення. Не зменшуючи загальності можна покласти $\|x\|_2^2 = 1$. Тоді для довільного $\varepsilon > 0$ буде справджуватись

$$P\{|\|Ax\|_2^2 - b\|x\|_2^2| > \varepsilon\|x\|_2^2\} = P\left\{\left|\sum_{i=1}^n\left(\sum_{j=1}^N x_j a_{ij}\right)^2 - b\sum_{j=1}^N x_j^2\right| > \varepsilon\right\} =$$

$$= P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\left(\sum_{j=1}^N x_j \xi_{ij}\right)^2 - b\sum_{j=1}^N x_j^2\right| > \varepsilon\right\} =$$

$$= P\left\{\left|\sum_{i=1}^n\left(\sum_{j=1}^N x_j \xi_{ij}\right)^2 - nb\sum_{j=1}^N x_j^2\right| > n\varepsilon\right\}.$$

Оскільки $b = E\xi_{ij}^2$, то

$$P\left\{\left|\sum_{i=1}^n\left(\sum_{j=1}^N x_j \xi_{ij}\right)^2 - \sum_{i=1}^n E\left(\sum_{j=1}^N x_j^2 \xi_{ij}^2\right)\right| > n\varepsilon\right\} =$$

$$= P\left\{\left|\sum_{i=1}^n\left(\left(\sum_{j=1}^N x_j \xi_{ij}\right)^2 - E\left(\sum_{j=1}^N x_j \xi_{ij}\right)^2\right)\right| > n\varepsilon\right\}.$$

Нехай $\theta_i = \sum_{j=1}^N x_j\xi_{ij}$. Оскільки простір $L_{U_\alpha}(\Omega)$ є банаховим,то $\theta_i \in L_{U_\alpha}$, $i = \overline{1,n}$, а тому справджується наступна нерівність

$$P\{|\ \theta_i\ | > \varepsilon\} \le 2\exp\left\{-\left(\frac{\varepsilon}{\ll \theta_i \gg_{U_{1\alpha}}}\right)^\alpha\right\}.$$

Тоді, згідно леми 2, для $\theta_i^2 - E\theta_i^2$ має місце нерівність (3).

Нехай $\zeta = \sum_{i=1}^n(\theta_i^2 - E\theta_i^2)$. Оскільки простір Орліча $L_{U_{1\alpha}}(\Omega)$ є банаховим простором, то $\zeta \in L_{U_{1\alpha}}(\Omega)$ і для цього простору виконується умова **H** зі сталою $C_{\psi,\alpha}$ (див. лему 1), а отже

$$P\left\{|\|\ Ax\ \|_2^2 - b\ \|\ x\ \|_2^2| > \varepsilon\right\} = P\{|\ \zeta\ | > n\varepsilon\} \le 2\exp\left\{-\left(\frac{n\varepsilon}{\ll \zeta \gg_{U_{1\alpha}}}\right)^{\frac{\alpha}{2}}\right\},$$

$$\ll \zeta \gg_{U_{1\alpha}}^2 = \ll \sum_{i=1}^{n} \left(\theta_i^2 - E\theta_i^2\right) \gg_{U_{1\alpha}}^2 \leq \left(e^{2/\alpha}+1\right)^{2/\alpha} \sum_{i=1}^{n} \| \theta_i^2 - E\theta_i^2 \|_{U_{1\alpha}}^2 \leq$$
$$\leq \left(e^{2/\alpha}+1\right)^{2/\alpha} C_{\psi,\alpha} \sum_{i=1}^{n} \| \theta_i^2 - E\theta_i^2 \|_{U_{1\alpha}}^2 .$$

З теореми 3.4 книги [7] та леми 2 випливає наступна нерівність $\| \theta_i^2 - E\theta_i^2 \|_{U_{1\alpha}} \leq (1+a)^{\frac{1}{\alpha}} \| \theta_i \|_{U_\alpha}$. А тоді з наслідку 5.1 та теореми 8.1 роботи [11] випливає, що для простору $L_{U_\alpha}(\Omega)$ виконується умова зі сталою C_1, тому

$$\| \theta_i \|_{U_\alpha}^2 = \| \sum_{j=1}^{N} x_j \xi_{ij} \|_{U_\alpha}^2 \leq C_1 \sum_{j=1}^{N} x_j^2 \| \xi_{ij} \|_{U_\alpha}^2 = C_1 g,$$

де $g = \| \xi_{ij} \|_{U_\alpha}^2$.

Тоді $\| \theta_i^2 - E\theta_i^2 \|_{U_{1\alpha}} \leq (1+a)^{\frac{2}{\alpha}} \sqrt{g \cdot C_1}$, а тому $\ll \zeta \gg_{U_{1\alpha}}^2 \leq C_1 C_{\psi,\alpha} (1+a)^{\frac{2}{\alpha}} gn$, звідси $\ll \zeta \gg_{U_{1\frac{\alpha}{2}}} \leq \left(C_1 C_{\psi,\alpha} (1+a)^{\frac{2}{\alpha}} gn\right)^{\frac{1}{2}}$.

Отже,

$$P\{| \zeta | > n\varepsilon\} \leq 2\exp\left\{-\frac{(n\varepsilon)^{\frac{\alpha}{2}}}{\left(C_1 C_{\psi,\alpha}(1+a)^{\frac{2}{\alpha}} gn\right)^{\frac{\alpha}{4}}}\right\} = 2\exp\left\{-\frac{n^{\frac{\alpha}{4}} \varepsilon^{\frac{\alpha}{2}}}{\left(C_1 C_{\psi,\alpha} gn\right)^{\frac{\alpha}{4}} \sqrt{(1+a)}}\right\}.$$

Лема 4. *Нехай A це матриця, що містить N стовпців і n рядків, $n \leq N$, $a_{ij} = \frac{1}{\sqrt{n}} \xi_{ij}$, де $\xi_{ij} \in S_{U_{1\alpha}}(\Omega)$, ξ_{ij} – незалежні, симетричні, однаково розподілені випадкові величини. Нехай $x \in \boldsymbol{R}^N$ та для всіх i та j, $E\xi_{ij}^2 = 1$. Тоді для довільної множини індексів T, вимірності $K < n$, $X_T \subset R^N$ і довільного $\varepsilon \in (0;1)$ для всіх $x \in X_T$ справджується*

$$P\{\left|\|Ax\|_2^2 - b\|x\|_2^2\right| > \varepsilon\|x\|_2^2\} \leq 2\left(\frac{12}{\varepsilon}\right)^K \exp\left\{-\frac{n^{\frac{\alpha}{4}} \varepsilon^{\frac{\alpha}{2}}}{(C_1 C_{\psi,\alpha} gn)^{\frac{\alpha}{4}} \sqrt{1+a}}\right\},$$

де $a = R\left(1 + \exp\left\{\left(\frac{8R}{\alpha}\Gamma\left(\frac{2}{\alpha}\right)\right)^{\frac{\alpha}{2}}\right\}\right)$ – це стала з леми 2, $C_{\psi,\alpha}$ визначена в лемі 1, $g = \ll \xi_{ij} \gg_{U_{1\alpha}}^2$, C_1 – це деяка стала.

Доведення. Не зменшуючи загальності будемо вважати, що $\| x \|_2^2 = 1$.Це можливо, оскільки Ax є лінійним перетворенням. Нехай $A_q = |\| Aq \|_2^2 - \| q \|_2^2|$, $q \in \mathbf{R}^N$. З леми 3 випливає, що ми можемо вибрати скінченну множину точок $Q_T \subseteq X_T$, $\#(Q_T) \leq \left(\frac{12}{\varepsilon}\right)^K$ таку, що $\| x - q \|_2 \leq \frac{\varepsilon}{4}$, для всіх $q \in Q_T$ і $x \in X_T$. З теореми 1 та з властивостей ймовірності випливає, що всіх $q \in Q_T$ і $0 < \varepsilon < 1$ виконуються наступні співвідношення

$$P\left\{\overline{\bigcap_{q \in Q_T} \{q : A_q < \varepsilon\}}\right\} = P\left\{\bigcup_{q \in Q_T} \overline{\{q : A_q < \varepsilon\}}\right\} = P\left\{\bigcup_{q \in Q_T} \{q : A_q > \varepsilon\}\right\} \leq$$
$$\leq \sum_{q \in Q_T} P\{\{q : A_q < \varepsilon\}\} \leq 2\left(\frac{12}{\varepsilon}\right)^K \exp\left\{-\frac{n^{\frac{\alpha}{4}} \varepsilon^{\frac{\alpha}{2}}}{\left(C_1 C_{\psi,\alpha} gn\right)^{\frac{\alpha}{4}} \sqrt{1+a}}\right\}.$$

Тоді

$$P\left\{\bigcap_{q\in Q_T}\{q:A_q<\varepsilon\}\right\}=1-P\left\{\bigcup_{q\in Q_T}\overline{\{q:A_q<\varepsilon\}}\right\}\geq$$
$$\geq 1-2\left(\tfrac{12}{\varepsilon}\right)^K\exp\left\{-\frac{n^{\frac{\alpha}{4}}\varepsilon^{\frac{\alpha}{2}}}{\left(C_1C_{\psi,\alpha}gn\right)^{\frac{\alpha}{4}}\sqrt{1+a}}\right\}.$$

Виберемо $\min\limits_{q\in Q_T}\parallel x-q\parallel_2\leq\frac{\varepsilon}{4}$. Оскільки виконується $\parallel Aq\parallel_2^2\leq(1+\varepsilon)\parallel q\parallel_2^2$, то

$$\parallel Aq\parallel_2\leq\sqrt{1+\varepsilon}\parallel q\parallel_2 . \tag{4}$$

Нехай ε_1 – це таке найменше число, що

$$\parallel Ax\parallel_2\leq(1+\varepsilon_1)\parallel x\parallel_2 . \tag{5}$$

Має місце нерівність $\parallel Ax\parallel_2\leq\parallel Aq\parallel_2+\parallel A(x-q)\parallel_2$. З нерівності (4), при $\parallel q\parallel_2=1$ випливає, що $\parallel Aq\parallel_2\leq\sqrt{1+\varepsilon}$. З (5) матимемо, що $\parallel A(x-q)\parallel_2\leq(1+\varepsilon_1)\parallel x-q\parallel_2\leq(1+\varepsilon_1)\frac{\varepsilon}{4}$. Тоді

$$\parallel Ax\parallel_2\leq\sqrt{1+\varepsilon}+(1+\varepsilon_1)\frac{\varepsilon}{4}\leq 1+\varepsilon+(1+\varepsilon_1)\frac{\varepsilon}{4}.$$

Оскільки ε_1 – найменше, то $\varepsilon_1\leq\varepsilon+(1+\varepsilon_1)\frac{\varepsilon}{4}$. Звідси $\varepsilon_1\leq\frac{3\varepsilon}{4-\varepsilon}$. Врахувавши, що $0\leq\varepsilon\leq 1$ отримаємо, що $\frac{3}{4-\varepsilon}\leq 1$, а тому $\varepsilon_1\leq\varepsilon$.

Аналогічно можна показати, що $\parallel Ax\parallel_2\geq 1-\varepsilon$ для всіх $x\in X_T$.

Теорема 2. *Нехай A це матриця, що містить N стовпців і n рядків, $n\leq N$, $a_{ij}=\frac{1}{\sqrt{n}}\xi_{ij}$, де $\xi_{ij}\in S_{U_{1\alpha}}(\Omega)$, ξ_{ij} – незалежні, симетричні, однаково розподілені випадкові величини. Нехай $x\in\boldsymbol{R}^N$, та для всіх i та j, $E\xi_{ij}^2=1$. Тоді для всіх $x\in\Sigma_K$ справджується*

$$P\left\{|\parallel Ax\parallel_2^2-\parallel x\parallel_2^2|\geq\varepsilon\parallel x\parallel_2^2\right\}\leq$$
$$\leq 2\exp\left\{K\ln\left(\frac{12eN}{\varepsilon K}\right)-\frac{n^{\frac{\alpha}{4}}\varepsilon^{\frac{\alpha}{2}}}{(C_1C_{\psi,\alpha}gn)^{\frac{\alpha}{4}}\sqrt{1+a}}\right\}$$

для довільного K, $1\leq K<\frac{(\sqrt{n}\varepsilon)^{\frac{\alpha}{2}}}{\left(C_1C_{\psi,\alpha}gn\right)^{\frac{\alpha}{4}}\sqrt{(1+a)}\ln\left(\frac{12eN}{\varepsilon K}\right)}$ і $0<\varepsilon<1$, де $C_{\psi,\alpha}$ визначена в лемі 1, $g=\ll\ \xi_{ij}\gg_{U_{1\alpha}}^2$, $a=\ R\left(1+\exp\left\{\left(\frac{8R}{\alpha}\Gamma\left(\frac{2}{\alpha}\right)\right)^{\frac{\alpha}{2}}\right\}\right)$- це стала з леми 2, C_1 - це деяка стала.

Доведення. З леми 4 випливає, що для довільного $x\in X_T$, де T- це множина індексів вимірності $K<n$, $X_T\subset\mathbf{R}^N$ буде справедливим

$$P\left\{|\parallel Ax\parallel_2^2-\parallel x\parallel_2^2|\geq\varepsilon\parallel x\parallel_2^2\right\}\leq 2\left(\frac{12}{\varepsilon}\right)^K\exp\left\{-\frac{n^{\frac{\alpha}{4}}\varepsilon^{\frac{\alpha}{2}}}{(C_1C_{\psi,\alpha}gn)^{\frac{\alpha}{4}}\sqrt{1+a}}\right\}.$$

Врахувавши, що $C_N^K\leq\left(\frac{eN}{K}\right)^K$ отримаємо, що для довільного $x\in\Sigma_K$, буде справедливим

$$P\{|\parallel Ax\parallel_2^2-\parallel x\parallel_2^2|\geq\varepsilon\parallel x\parallel_2^2\}\leq 2\left(\tfrac{eN}{K}\right)^K 2\left(\tfrac{12}{\varepsilon}\right)^K\exp\left\{-\frac{n^{\frac{\alpha}{4}}\varepsilon^{\frac{\alpha}{2}}}{\left(C_1C_{\psi,\alpha}gn\right)^{\frac{\alpha}{4}}\sqrt{1+a}}\right\}=$$
$$=2\exp\left\{K\ln\left(\tfrac{12eN}{\varepsilon K}\right)-\frac{n^{\frac{\alpha}{4}}\varepsilon^{\frac{\alpha}{2}}}{\left(C_1C_{\psi,\alpha}gn\right)^{\frac{\alpha}{4}}\sqrt{1+a}}\right\}.$$

Звідси випливає, що при $1 \le K < \frac{(\sqrt{n}\varepsilon)^{\frac{\alpha}{2}}}{\left(C_{S,\frac{\alpha}{2}}\tilde{C_S}g\right)^{\frac{\alpha}{4}}(1+a)\ln\left(\frac{12eN}{\varepsilon K}\right)}$ і $0 < \varepsilon < 1$ матриця A задовільняє обмеженим властивостям ізометрії з ймовірністю більшою за

$$p_n = 1 - 2\exp\left\{K\ln\left(\frac{12eN}{\varepsilon K}\right) - \frac{n^{\frac{\alpha}{4}}\varepsilon^{\frac{\alpha}{2}}}{(C_1C_{\psi,\alpha}gn)^{\frac{\alpha}{4}}\sqrt{1+a}}\right\}.$$

Зауважимо також, що $p_n \to 1$ при $n \to \infty$.

Висновки

В даній роботі запропоновано в якості матриці вимірювань в стискаючому зондуванні використовувати матриці, елементами яких є випадкові величини з простору Орліча $L_{U_\alpha}(\Omega)$, де $U_\alpha(x) = \exp\{|x|^\alpha\} - 1$ при $1 < \alpha \le 2$. Також доведено, що такі матриці задовільняють обмеженим властивостям ізометрії.

Список використаної літератури

1. B. Kashin, *The widths of certain finite dimensional sets and classes of smooth functions*, Izvestia Akad. Nauk SSSR. Ser. Mat. **41** (1977), 334–351.
2. A. Garnaev, E. Gluskin, *The widths of a Euclidean ball*, Dokl. AN SSSR **277** (1984), 1048–1052.
3. D. Donoho, *Compressed sensing*, IEEE Trans. Inf. Theory **52** (2006), №4, 1289–1306.
4. R. Baraniuk, M. Davenport, R. DeVore, M. Wakin *A Simple Proof of the Restricted Isometry Property for Random Matrices*, Business Media (2008).
5. R. DeVore, G.Petrova, P. Wojtaszczyk, *Instance-optimality in probability with an l1-minimization decoder*, Applied and Computational Harmonic Analysis **27** (2009), 275–288.
6. Трошкі В.Б. *Обмежені властивості ізометрії для матриць, елементи яких є випадкові величини з певних просторів Орліча* $L_U(\Omega)$ Теорія ймовір. та матем. статист. – 2014. – Вип. 91. – С. 179-189.
7. V. Buldygin, Yu. Kozachenko *Metric characterization of random variables and random processes*, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000.
8. Ю. Козаченко, Ю. Млавець *Простори Банаха випадкових величин* $F_\psi(\Omega)$, Теорія ймовірностей та матиматична статистика **86** (2012), 92–107.
9. Ю. Млавець, *Звязок просторів Орліча випадкових величин з просторами* $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$, Науковий вісник Ужгородського університету. Сер. математ. і інформ. **25** (2014), №1, 77-84.
10. G. Lorentz, M. von Golitschek, Yu. Makovoz *Constructive Approximation: Advanced Problems*, Grundlehren Math. Wiss., Springer-Verlag, Berlin (1996).
11. R. Guiliano Antonini, Yu. Kozachenko, T. Nikitina, Spaces of φ-subgaussian random variables, *Memorie di Matematica e Applicazioni* XXVII (1), 95–124 (2003).

Одержано 18.01.2015