УДК 517.95

О. Ю. Чмир (Львівський держ. ун-т безпеки життєдіяльності)

ХАРАКТЕР СТЕПЕНЕВИХ ОСОБЛИВОСТЕЙ РОЗВ'ЯЗКУ ПЕРШОЇ УЗАГАЛЬНЕНОЇ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ РІВНЯННЯ $\frac{\partial u}{\partial t} - \triangle u = |u|^{\beta_0} t^{\gamma}$

Using the Schauder method the character power singularities of the solution the first generalized boundary value problem for equation $\frac{\partial u}{\partial t} - \triangle u = |u|^{\beta_0} t^{\gamma}$ near boundary of domain are investigated. The sufficient conditions of solvability of the problem are obtained.

Використовуючи принцип Шаудера, досліджено характер степеневих особливостей розв'язку першої узагальненої крайової задачі для рівняння $\frac{\partial u}{\partial t} - \triangle u = |u|^{\beta_0} t^{\gamma}$ біля межі області. Встановлено достатні умови розв'язності цієї задачі.

Вступ. В багатьох працях наведено результати про існування та поведінку розв'язків лінійних та півлінійних еліптичних та параболічних рівнянь на межі області, коли функції задані на межі області є узагальненими (див., наприклад, [1] та бібліографію, а також [2, 3]).

Використовуючи дослідження проведені у статті [4] для нелінійних еліптичних крайових задач при заданих на межі функціях із сильними степеневими особливостями, продовжено вивчення нелінійних крайових задач для рівняння теплопровідності в узагальнених функціях. Так, зокрема, у статті [5] досліджено характер степеневих особливостей розв'язку першої узагальненої крайової задачі для рівняння теплопровідності у класі узагальнених функцій.

У працях [6]- [8], досліджується існування розв'язків крайових задач для напівлінійних параболічних рівнянь та систем рівнянь вигляду $(u_i)_t - \triangle u_i = f(u_1, ..., u_n)$ як локальних ([6]), так і глобальних ([7]), їх властивості.

У даній статті розглянуто першу узагальнену крайову задачу для рівняння $\frac{\partial u}{\partial t} - \triangle u = |u|^{\beta_0} t^{\gamma}$, де $\beta_0 \in (0, 1)$, $\gamma \in (-1, 0)$, коли задані на межі функції є узагальненими певного порядку сингулярності. Доведено існування її розв'язку у певному класі функцій із сильними степеневими особливостями, залежному від показників нелінійності у рівнянні та порядків сингулярностей узагальнених функцій на межі області. Зокрема, отримано умови зв'язку порядків сингулярностей узагалльнених функцій на межі області з показниками нелінійності правої частини рівняння. Для доведення розв'язності використано метод зведення такої задачі до інтегрального рівняння у певному ваговому функційному просторі, а також застосовано теорему Шаудера про нерухому точку.

1. Основні позначення та формулювання задачі.

Нехай $n \in \mathbb{N}$, Ω – обмежена область в $\mathbb{R}^n$ з межею $S = \partial\Omega$ класу C^{∞}, $Q = \Omega \times (0, T]$, $\Sigma = S \times (0, T]$, $0 < T < +\infty$.

Використовуватимемо позначення:

$||x - y|| = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2}$ – евклідова відстань в $\mathbb{R}^n$, $P = (x, t)$, $M = (y, \tau)$,

$d(x, t; y, \tau) = \sqrt{||x - y||^2 + |t - \tau|}$– параболічна відстань в $\mathbb{R}^{n+1}$;

η – мультиіндекс з компонентами $(\eta_1, ..., \eta_n)$, $\eta_i \in \mathbb{Z}_+$, $i = \overline{1, n}$, $|\eta| = \eta_1 + ... + \eta_n$ – довжина мультиіндексу η, $D_x^{\eta} = \frac{\partial^{|\eta|}}{\partial x_1^{\eta_1} \cdot ... \cdot \partial x_n^{\eta_n}}$.

Нехай $\varepsilon_0 > 0$ – таке задане число, що паралельна до S поверхня S_{ε_0} є класу C^∞ та надалі вважатимемо, що $\varepsilon_0 \leq 1$. Через $\widetilde{\varrho}(\sigma)$ позначатимемо нескінченно диференційовну невід'ємну функцію, яка має порядок σ при $\sigma \to 0$.

Нехай $\varrho_1(x)$, $x \in \overline{\Omega}$, – нескінченно диференційовна невід'ємна функція, яка додатна в Ω, має порядок відстані $d(x)$ від точки x до S біля S та $\varrho_1(x) \leq 1$, $x \in \overline{\Omega}$, наприклад $\varrho_1(x) = \begin{cases} \widetilde{\varrho}(d(x)), & d(x) \leq \frac{\varepsilon_0}{2}, \\ 1, & d(x) \geq \varepsilon_0; \end{cases}$

функція $\varrho_2(t) = \begin{cases} \widetilde{\varrho}(t), & t \leq \frac{\varepsilon_0}{2}, \\ 1, & t \geq \varepsilon_0, \end{cases}$ володіє властивостями функції $\widetilde{\varrho}(\sigma)$ і, крім того, $0 < \varrho_2(t) \leq 1$, $t \in (0, T]$.

Нехай $\varrho(x,t) = \begin{cases} \min[\varrho_1(x), \sqrt{\varrho_2(t)}], & d(x) < \varepsilon_0, \text{ або } t < \varepsilon_0, \\ 1, & d(x) \geq \varepsilon_0, \, t \geq \varepsilon_0, \end{cases}$

$0 \leq \varrho(x,t) \leq 1$, $(x,t) \in \overline{Q}$, звідки

$$\varrho(x,t) = \begin{cases} \varrho_1(x) & \text{при } d(x) \to 0, \\ \sqrt{\varrho_2(t)} & \text{при } t \to 0, \\ 1, & \text{всередині області } Q, \text{ а саме при } d(x) \geq \varepsilon_0 \text{ та } t \geq \varepsilon_0. \end{cases}$$

Далі використовуватимемо, що

$$M_1 \sigma \leq \widetilde{\varrho}(\sigma) \leq M_2 \sigma, \text{ при } \sigma \leq \frac{\varepsilon_0}{2}, \tag{1}$$

де M_1, M_2 – додатні числа.

Нехай $Q^1 = \{(x,t) \in Q : \varrho(x,t) = \varrho_1(x) \text{ та } d(x) \leq \frac{\varepsilon_0}{2}\}$,
$Q^2 = \{(x,t) \in Q : \varrho(x,t) = \sqrt{\varrho_2(t)} \text{ та } t \leq \frac{\varepsilon_0}{2}\}$, $\quad Q^3 = Q \setminus \overline{\{Q^1 \cup Q^2\}}$.

Нехай $D(\overline{Q}) = C^\infty(\overline{Q})$, $D(\overline{\Sigma}) = C^\infty(\overline{\Sigma})$, $D(\overline{\Omega}) = C^\infty(\overline{\Omega})$;
$D^0(\overline{Q}) = \{\varphi \in D(\overline{Q}) : \frac{\partial^k}{\partial t^k}\varphi \,|_{t=T} = 0, \; k = 0, 1, \dots\}$,
$D^0(\overline{\Sigma}) = \{\varphi \in D(\overline{\Sigma}) : \frac{\partial^k}{\partial t^k}\varphi \,|_{t=T} = 0, \; k = 0, 1, \dots\}$,
$D_0(\overline{\Omega}) = \{\varphi \in D(\overline{\Omega}) : \varphi|_S = 0\}$, ν – орт внутрішньої нормалі до S.

Надалі позначатимемо через $(D^0(\overline{\Sigma}))'$, $(D_0(\overline{\Omega}))'$ – простори лінійних неперервних функціоналів відповідно на просторах функцій $D^0(\overline{\Sigma})$, $D_0(\overline{\Omega})$, через $(\varphi, F)_1$ – значення узагальненої функції $F \in (D^0(\overline{\Sigma}))'$ на основній функції $\varphi \in D^0(\overline{\Sigma})$, через $(\varphi, F)_2$ – значення $F \in (D_0(\overline{\Omega}))'$ на $\varphi \in D_0(\overline{\Omega})$, а під $s(F)$ розумітимемо порядок сингулярності узагальненої функції F ([9, с. 123]).

Розглянемо першу узагальнену крайову задачу

$$Lu(x,t) \equiv \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - \triangle u(x,t) = f_0(x,t,u(x,t)), \quad (x,t) \in Q, \tag{2}$$

$$u \,|_{\Sigma} = F_1(x,t), \quad (x,t) \in \Sigma, \tag{3}$$

$$u \,|_{t=0} = F_2(x), \quad x \in \Omega. \tag{4}$$

Припущення 1. *Нехай функції f_0, F_1 та F_2 задовольняють умови:*
1) *функція $f_0(x,t,\mathrm{v})$ визначена в $Q \times (-\infty, +\infty)$,*
2) $F_1 \in (D^0(\overline{\Sigma}))'$, $0 \leq s(F_1) \leq q_1$,
3) $F_2 \in (D_0(\overline{\Omega}))'$, $0 \leq s(F_2) \leq q_2$.

При $k \in \mathbb{R}$ введемо функційні простори:
$X_k(\overline{Q}) = \{\psi \in D^0(\overline{Q}) : \psi(\cdot, 0) \in D_0(\overline{\Omega}), \; \psi \,|_{\overline{\Sigma}} = 0,$
$L^*\psi(x,t) = O(\varrho^k(x,t)), \varrho(x,t) \to 0\}$,

де L^* – оператор, формально спряжений до L, $L^*\mathrm{v} = -\big(\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial t} + \triangle^*\mathrm{v}\big)$,
$\mathcal{M}_k(Q)$=$\{\mathrm{v} : ||\mathrm{v}||_k = \int\limits_Q \varrho^k(x,t)|\mathrm{v}(x,t)|\, dxdt < +\infty\}$.

Нехай $\mathcal{M}_{k,C}(Q) = \{\mathrm{v} \in \mathcal{M}_k(Q) : ||\mathrm{v}||_k \le C\}$ – куля радіуса C у просторі $\mathcal{M}_k(Q)$.

Припустимо, що $k > k_0 = \max\{q_1;\, q_2 - 1\} + n$. Зауважимо, що $k_0 \ge n-1$ при $q_1 \ge 0$, $q_2 \ge 0$.

Означення 1. *Розв'язком задачі (2)-(4) називається функція $u \in \mathcal{M}_k(Q)$ така, що*

$$\int\limits_Q L^*\psi \cdot u\, dxdt = \int\limits_Q f_0(x,t,u(x,t)) \cdot \psi(x,t)\, dxdt + (\frac{\partial \psi(x,t)}{\partial \nu}, F_1(x,t))_1 +$$

$$+(\psi(\cdot,0), F_2(\cdot))_2 \qquad \textit{для довільної } \psi \in X_k(\overline{Q}).$$

Позначимо через $G(x,t;y,\tau)$ функцію Ґріна першої крайової задачі для рівняння теплопровідності, яка визначена в точках $(x,t;y,\tau) \in \overline{Q} \times \overline{Q}$ при $(x,t) \ne (y,\tau)$. Існування її та ряд властивостей одержуємо із [10,11]. З цих результатів випливає, що

1) $G(x,t;y,\tau) = 0$ при $t < \tau$;

2) для будь-яких мультиіндексів η, η_0
$|\frac{\partial^{\eta_0}}{\partial t^{\eta_0}} D^\eta_x G(x,t;y,\tau)| \le \widehat{C}_{\eta,\eta_0}\, [d(x,t;y,\tau)]^{-n-|\eta|-2\eta_0}$, де $\widehat{C}_{\eta,\eta_0}$ – додатні сталі;

3) для довільних η, $|\eta| < 2$, існують додатні сталі $\widehat{C}'_\eta$ такі, що
$\int\limits_Q |D^\eta_x G(x,t;y,\tau)|\, dxdt \le \widehat{C}'_\eta$ для довільних $(y,\tau) \in \overline{Q}$.

Подібно до результатів [2,12,13] доводимо таку властивість функції G.

Лема 1. *Нехай $(x,t) \in Q$, $r_1 > -1$, $r_1 + 2r_2 > -2$. Тоді*

$$\int\limits_Q G(x,t;y,\tau)\cdot\varrho^{r_1}(y,\tau)\cdot\tau^{r_2}\, dyd\tau = \begin{cases} O([\varrho_1(x)]^{r_1+1-n} + 1) & \textit{при } d(x) \to 0, \\ O([\varrho_2(t)]^{\frac{r_1+2r_2+2-n}{2}} + 1) & \textit{при } t \to 0, \\ O(1) & \textit{всередині області } Q. \end{cases}$$

Зауваження 1. *З теореми 2 [3] випливає, що розв'язок задачі (2)-(4) є розв'язком у просторі $\mathcal{M}_k(Q)$ інтегрального рівняння*

$$u(x,t) = \int\limits_0^t d\tau \int\limits_\Omega G(x,t;y,\tau) \cdot f_0(y,\tau,u(y,\tau))\, dy + (\frac{\partial G(x,t;y,\tau)}{\partial \nu_y}, F_1(y,\tau))_1 +$$

$$+(G(x,t;y,0), F_2(y))_2 \tag{5}$$

і навпаки.

Позначимо $(H\mathrm{v})(x,t) = \int\limits_0^t d\tau \int\limits_\Omega G(x,t;y,\tau) \cdot f_0(y,\tau,\mathrm{v}(y,\tau))\, dy$,
$h(x,t) = g_1(x,t) + g_2(x,t) = (\frac{\partial G(x,t;y,\tau)}{\partial \nu_y}, F_1(y,\tau))_1 + (G(x,t;y,0), F_2(y))_2$,
$(H_1\mathrm{v})(x,t) = (H\mathrm{v})(x,t) + h(x,t)$.

Рівняння (5) набуде вигляду $u(x,t) = (Hu)(x,t) + h(x,t)$.

Використовуючи теорему Шаудера [14, с. 291], у [5] показано існування сталої $C > 0$ такої, що оператор H_1 відображає $\mathcal{M}_{k,C}(Q)$ в себе, є неперервним оператором на $\mathcal{M}_{k,C}(Q)$ та доведено

Теорема 1. *Нехай виконуються припущення 1, $k > k_0$, функція f_0 задовольняє умови: існують сталі $\zeta \in (0,1)$, $M_3 > 0$, $M_4 > 0$, $C_0 > 0$ такі, що для довільної сталої $C > C_0$ та для довільних* $\mathrm{v}, \mathrm{w} \in \mathcal{M}_{k,C}(Q)$

$$\int\limits_Q |f_0(y,\tau,\mathrm{v}(y,\tau))|\, dyd\tau \le M_3 ||\mathrm{v}||_k^{\zeta}, \tag{6}$$

$$\int\limits_Q |f_0(y,\tau,\mathrm{v}(y,\tau)) - f_0(y,\tau,\mathrm{w}(y,\tau))|\, dyd\tau \le M_4 ||\mathrm{v}-\mathrm{w}||_k^{\zeta}. \tag{7}$$

Тоді існує розв'язок задачі (2)-(4) в просторі $\mathcal{M}_k(Q)$.

Наслідок 1. *Нехай виконуються припущення 1, $k > k_0$, $f_0(x,t,\mathrm{v}) = |\mathrm{v}|^{\beta_0} t^{\gamma}$. Тоді для всіх $\beta_0 \in (0, \frac{1}{k+1})$, $\gamma \in (-1 + \frac{\beta_0(k+2)}{2}, 0)$ існує розв'язок задачі (2)-(4) у просторі $\mathcal{M}_k(Q)$.*

Доведення. Покажемо, що функція $f_0(x,t,\mathrm{v}) = |\mathrm{v}|^{\beta_0} t^{\gamma}$ задовольняють умови теореми 1. Використовуючи нерівність Гельдера, матимемо

$$\int\limits_Q |\mathrm{v}(y,\tau)|^{\beta_0} \tau^{\gamma}\, dyd\tau = \int\limits_Q (\varrho^k(y,\tau)\cdot|\mathrm{v}(y,\tau)|)^{\beta_0} \tau^{\gamma} [\varrho(y,\tau)]^{-k\beta_0}\, dyd\tau \le$$

$$\le \Big(\int\limits_Q \varrho^k(y,\tau)\cdot|\mathrm{v}(y,\tau)| dyd\tau\Big)^{\beta_0} \cdot \Big(\int\limits_Q (\tau^{\gamma}[\varrho(y,\tau)]^{-k\beta_0})^{\frac{1}{1-\beta_0}} dyd\tau\Big)^{1-\beta_0} \le$$

$$\le ||\mathrm{v}||_k^{\beta_0} \Big(\int\limits_Q \tau^{\frac{\gamma}{1-\beta_0}} [\varrho(y,\tau)]^{-\frac{k\beta_0}{1-\beta_0}}\, dyd\tau\Big)^{1-\beta_0}.$$

Розглянемо $I = \int\limits_Q \tau^{\frac{\gamma}{1-\beta_0}} [\varrho(y,\tau)]^{-\frac{k\beta_0}{1-\beta_0}}\, dyd\tau$. Відповідно до розбиття області $Q = Q^1 \cup Q^2 \cup Q^3$ матимемо $I = I_1 + I_2 + I_3$, де в I_1 інтегрування є за областю Q^1, в I_2 – за Q^2, а в I_3 – за Q^3. Розглянемо кожен інтеграл окремо.

Використовуючи властивості функції $\varrho_1(y)$ та (1), матимемо

$$I_1 = \int\limits_{Q^1} \tau^{\frac{\gamma}{1-\beta_0}} [\varrho_1(y)]^{-\frac{k\beta_0}{1-\beta_0}}\, dyd\tau \le M_1^{-\frac{k\beta_0}{1-\beta_0}} \int\limits_{Q^1} \tau^{\frac{\gamma}{1-\beta_0}} \cdot [d(y)]^{-\frac{k\beta_0}{1-\beta_0}}\, dyd\tau \le$$

$\le C_1 \int\limits_{Q^1} [d(y)]^{-\frac{k\beta_0}{1-\beta_0}}\, dyd\tau$, де C_1 – додатна стала. Інтеграл в останній рівності збігається при $-\frac{k\beta_0}{1-\beta_0} > -1$.

Використовуючи властивості функції $\varrho_2(\tau)$ та (1), матимемо

$$I_2 = \int\limits_{Q^2} \tau^{\frac{\gamma}{1-\beta_0}} [\varrho_2(\tau)]^{-\frac{k\beta_0}{2(1-\beta_0)}}\, dyd\tau \le M_1^{-\frac{k\beta_0}{2(1-\beta_0)}} \int\limits_{Q^2} \tau^{\frac{\gamma}{1-\beta_0}} \cdot \tau^{-\frac{k\beta_0}{2(1-\beta_0)}}\, dyd\tau \le$$

$\le C_2 \int\limits_{Q^2} \tau^{\frac{\gamma}{1-\beta_0} - \frac{k\beta_0}{2(1-\beta_0)}}\, dyd\tau$, де C_2 – додатна стала. Інтеграл в останній рівності збігається при $\frac{2\gamma - k\beta_0}{2(1-\beta_0)} > -1$.

$$I_3 = \int\limits_{Q^3} \tau^{\frac{\gamma}{1-\beta_0}}\, dyd\tau \le \varepsilon_0^{\frac{\gamma}{1-\beta_0}} \int\limits_{Q^3} dyd\tau < +\infty.$$

Таким чином, при $\beta_0 \in (0, \frac{1}{k+1})$, $\gamma \in (-1 + \frac{\beta_0(k+2)}{2}, 0)$ функція f_0 задовольняє умову (6).

Використовуючи формулу $|a^{\mu} - b^{\mu}| \le |a-b|^{\mu}$ при a, $b > 0$, $\mu \in (0,1)$ та нерівність Гельдера, оцінюємо

$$\int\limits_Q ||\mathrm{v}(y,\tau)|^{\beta_0}\cdot\tau^{\gamma}-|\mathrm{w}(y,\tau)|^{\beta_0}\cdot\tau^{\gamma}|\,dyd\tau\le||\mathrm{v}-\mathrm{w}||_k^{\beta_0}\Big(\int\limits_Q \tau^{\frac{\gamma}{1-\beta_0}}[\varrho(y,\tau)]^{-\frac{k\beta_0}{1-\beta_0}}\,dyd\tau\Big)^{1-\beta_0},$$

де інтеграл збігається при $\beta_0\in(0,\frac{1}{k+1})$, $\gamma\in(-1+\frac{\beta_0(k+2)}{2},0)$. Отже, виконується умова (7).

Якщо β_0 та γ відомі, то можна отримати простори $\mathcal{M}_k(Q)$, для яких існує розв'язок $u\in\mathcal{M}_k(Q)$ задачі (2)-(4).

Зауваження 2. *Нехай виконуються припущення 1 на функції* F_1, F_2, $f_0(x,t,\mathrm{v})=|\mathrm{v}|^{\beta_0}t^{\gamma}$, *де* $\beta_0\in(0,\frac{1}{n+1})$, $\gamma\in(\frac{n\beta_0-2(1-\beta_0)}{2},\frac{\beta_0-1}{2}]$. *Тоді існує розв'язок задачі (2)-(4) у просторі* $\mathcal{M}_k(Q)$ *при* $\max\{q_1,q_2-1\}+n<k<\frac{2\gamma+2(1-\beta_0)}{\beta_0}$.

Зауваження 3. *Нехай виконуються припущення 1 на функції* F_1, F_2, $f_0(x,t,\mathrm{v})=|\mathrm{v}|^{\beta_0}t^{\gamma}$, *де* $\beta_0\in(0,\frac{1}{n+1})$, $\gamma\in(\frac{\beta_0-1}{2};0]$. *Тоді існує розв'язок задачі (2)-(4) у просторі* $\mathcal{M}_k(Q)$ *при* $\max\{q_1,q_2-1\}+n<k<-1+\frac{1}{\beta_0}$.

Використовуючи властивості узагальнених функцій скінченого порядку сингулярності [9, с. 123-134] та оцінки похідних функції Ґріна, з [5], одержуємо такі леми.

Лема 2. *Нехай виконуються припущення 1 на функції* F_1, F_2, $k>k_0$. *Тоді*

1) $$g_1(x,t)=\begin{cases}O([\varrho_1(x)]^{-(n+q_1+1)}) & \text{при } (x,t)\in Q^1;\\ O([\varrho_2(t)]^{-\frac{n+q_1+1}{2}}) & \text{при } (x,t)\in Q^2;\\ O(1) & \text{при } (x,t)\in Q^3;\end{cases}$$

$$g_2(x,t)=\begin{cases}O([\varrho_1(x)]^{-(n+q_2)}) & \text{при } (x,t)\in Q^1;\\ O([\varrho_2(t)]^{-\frac{n+q_2}{2}}) & \text{при } (x,t)\in Q^2;\\ O(1) & \text{при } (x,t)\in Q^3;\end{cases}$$

2) $h\in\mathcal{M}_k(Q)$, *а саме, існує додатна стала* M_5 *така, що* $||h||_k=M_5<+\infty$.

Лема 3. *Нехай* $r\ge0$. *Тоді для довільного* $\varepsilon>0$ *існує* $\eta=\eta(\varepsilon)>0$ *таке, що для довільної підобласті* $V\subset Q$, *міра якої* $m(V)$ *менша за* η, *і будь-якої точки* $(y,\tau)\in\overline{Q}$ *виконується нерівність* $\int\limits_V \varrho^r(x,t)\cdot|G(x,t;y,\tau)|\,dxdt<\varepsilon$.

2. Характер степеневих особливостей розв'язку першої узагальненої крайової задачі для рівняння теплопровідності.

При $\mu\in\mathbb{R}_-\cup\{0\}$ введемо функційний простір:

$$\mathcal{M}_\mu(Q,\,\partial Q)=\{\mathrm{v}\in C(Q):\,[\varrho(y,\tau)]^{-\mu}\mathrm{v}(y,\tau)\in C(\overline{Q});\qquad (||\mathrm{v};\,\partial Q||_\mu=$$
$$=\max\{\sup_{(y,\tau)\in\overline{Q^1}}[\varrho_1(y)]^{-\mu}|\mathrm{v}(y,\tau)|;\ \sup_{(y,\tau)\in\overline{Q^2}}[\varrho_2(\tau)]^{-\frac{\mu}{2}}|\mathrm{v}(y,\tau)|;\ \sup_{(y,\tau)\in\overline{Q^3}}|\mathrm{v}(y,\tau)|\}<+\infty)\}.$$

Оскільки для $\mathrm{v}\in\mathcal{M}_\mu(Q,\,\partial Q)$ при $k+\mu>-1$

$$||\mathrm{v}||_k=\int\limits_Q\varrho^k(y,\tau)|\mathrm{v}(y,\tau)|\,dyd\tau\le\Big[\int\limits_{Q^1}\varrho_1^{k+\mu}(y)\sup_{(y,\tau)\in\overline{Q^1}}(\varrho_1^{-\mu}(y)|\mathrm{v}(y,\tau)|)\,dyd\tau+$$
$$+\int\limits_{Q^2}\varrho_2^{\frac{k+\mu}{2}}(\tau)\sup_{(y,\tau)\in\overline{Q^2}}(\varrho_2^{-\frac{\mu}{2}}(\tau)|\mathrm{v}(y,\tau)|)\,dyd\tau+\int\limits_{Q^3}\sup_{(y,\tau)\in\overline{Q^3}}|\mathrm{v}(y,\tau)|\,dyd\tau\Big]=$$
$$=\widetilde{C}_1''\int\limits_{Q^1}[\varrho_1(y)]^{k+\mu}\,dyd\tau+\widetilde{C}_2''\int\limits_{Q^2}[\varrho_2(\tau)]^{\frac{k+\mu}{2}}\,dyd\tau+\widetilde{C}_3''\int\limits_{Q^3}dyd\tau\le\widehat{C}\cdot(\widetilde{C}_1''+\widetilde{C}_2''+\widetilde{C}_3'')<$$

$<+\infty$, де $\widehat{C}$ – додатна стала, $\widetilde{C}_i''=\widetilde{C}_i''(\mathrm{v})<+\infty$, $i=\overline{1,3}$, то $\mathcal{M}_\mu(Q,\partial Q)\subset\mathcal{M}_k(Q)$ при $k>-\mu-1$.

Нехай $\mathcal{M}_{\mu,\widetilde{C}}(Q,\,\partial Q)=\{\mathrm{v}\in\mathcal{M}_\mu(Q,\,\partial Q):\,||\mathrm{v};\,\partial Q||_\mu\le\widetilde{C}\}$ – замкнена куля радіуса $\widetilde{C}$ у просторі $\mathcal{M}_\mu(Q,\,\partial Q)$.

Лема 4. *Нехай функція* $f_0(x,t,\mathrm{v}) = |\mathrm{v}|^{\beta_0}t^{\gamma}$, *де* $\beta_0 \in (0, \frac{1}{n})$, $\gamma \in (\frac{n\beta_0-2}{2}, 0)$ *та*

$$\max\{-\frac{2(\gamma+1)}{\beta_0};\ -\frac{1}{\beta_0}\} < \mu \le \min\{\frac{1-n}{1-\beta_0};\ \frac{2-n+2\gamma}{1-\beta_0}\}, \tag{8}$$

то існує стала $\widetilde{K}_0 > 0$ *така, що при всіх* $\widetilde{C} > \widetilde{K}_0$ *оператор* H *відображає* $\mathcal{M}_{\mu,\widetilde{C}}(Q,\,\partial Q)$ *в себе.*

Доведення. Знайдемо оцінку $H\mathrm{v}$ при $\mathrm{v} \in \mathcal{M}_\mu(Q,\,\partial Q)$. Маємо
$|(H\mathrm{v})(x,t)| \le \int\limits_0^t d\tau \int\limits_\Omega |G(x,t;y,\tau)| \cdot |\mathrm{v}(y,\tau)|^{\beta_0}\tau^{\gamma}\,dy.$

Використовуючи лему 1 при $\mu\beta_0 > -1$, $\mu\beta_0 + 2\gamma > -2$, знаходимо
$|(H\mathrm{v})(x,t)| \le \widetilde{C}'_{\mu\beta_0}(\widetilde{C}''_1)^{\beta_0}\Big([\varrho_1(x)]^{\mu\beta_0+1-n} + 1\Big) \le$
$\le [\varrho_1(x)]^{\mu}\widetilde{C}'_{\mu\beta_0}(\widetilde{C}''_1)^{\beta_0}\Big([\varrho_1(x)]^{\mu(\beta_0-1)+1-n} + [\varrho_1(x)]^{-\mu}\Big)$, $(x,t) \in Q^1$;
$|(H\mathrm{v})(x,t)| \le \widetilde{C}'_{\frac{\mu\beta_0}{2}}(\widetilde{C}''_2)^{\beta_0}\Big([\varrho_2(t)]^{\frac{\mu\beta_0+2\gamma+2-n}{2}} + 1\Big) \le$
$\le [\varrho_2(t)]^{\frac{\mu}{2}}\widetilde{C}'_{\frac{\mu\beta_0}{2}}(\widetilde{C}''_2)^{\beta_0}\Big([\varrho_2(t)]^{\frac{\mu(\beta_0-1)+2\gamma+2-n}{2}} + [\varrho_2(t)]^{-\frac{\mu}{2}}\Big)$, $(x,t) \in Q^2$;
$|(H\mathrm{v})(x,t)| \le \widetilde{C}'_0(\widetilde{C}''_3)^{\beta_0}$, $(x,t) \in Q^3$, де $\widetilde{C}'_{\mu\beta_0}$, $\widetilde{C}'_{\frac{\mu\beta_0}{2}}$, $\widetilde{C}'_0$ – додатні сталі.

При виконанні умов (8)

$$\begin{cases} \mu > \frac{-2(\gamma+1)}{\beta_0} \\ \mu > -\frac{1}{\beta_0} \\ \mu \le -\frac{n-1}{1-\beta_0} \\ \mu \le -\frac{n-2-2\gamma}{1-\beta_0} \end{cases}$$

знаходимо $||H\mathrm{v};\,\partial Q||_\mu \le R_1$, $(x,t) \in \overline{Q}$, де $R_1 = \widetilde{C}'(\max\limits_{1\le i\le 3}\widetilde{C}''_i)^{\beta_0}$,
$\widetilde{C}' = \max\{\widetilde{C}'_{\mu\beta_0},\ \widetilde{C}'_{\frac{\mu\beta_0}{2}},\ \widetilde{C}'_0\}$.

Зауважимо, що при $\beta_0 \in (0,1)$, існує стала $\widetilde{K}_0 > 0$ така, що $R_1 \le \max\limits_{1\le i\le 3}\widetilde{C}''_i = \widetilde{C}$ при $\widetilde{C} > \widetilde{K}_0$. Отже, за умов (8) при $\beta_0 \in (0,\frac{1}{n})$, $\gamma \in (-1,0)$, $\widetilde{C} > \widetilde{K}_0$ оператор $H : \mathcal{M}_{\mu,\widetilde{C}}(Q,\,\partial Q) \to \mathcal{M}_{\mu,\widetilde{C}}(Q,\,\partial Q)$.

Використовуючи властивості функції Ґріна, узагальнених функцій та лему 2, у [5] доведено

Лема 5. *Нехай виконуються припущення 1 щодо функцій* F_1, F_2 *та* $\mu \le -k_0 - 1$. *Тоді* $h \in \mathcal{M}_{\mu,\widetilde{C}}(Q,\,\partial Q)$, *а саме, існує додатна стала* R_2 *така, що* $||h;\,\partial Q||_\mu \le R_2 < +\infty$.

Лема 6. *Нехай* $\beta_0 \in (0,\frac{1}{n})$, $\gamma \in (\frac{n\beta_0-2}{2}, 0)$ *та* $\max\{-\frac{2(\gamma+1)}{\beta_0};\ -\frac{1}{\beta_0}\} < \mu < \min\{\frac{1-n}{1-\beta_0};\ \frac{2-n+2\gamma}{1-\beta_0}\}$. *Тоді для довільного* $\varepsilon > 0$ *існує* $\eta = \eta(\varepsilon) > 0$ *таке, що для довільної підобласті* $V \subset Q$, *міра якої* $m(V) < \eta$, *для довільних* $(x,t) \in Q^1 \cup Q^2$ *виконується*

$$[\varrho_1(x)]^{-\mu}\int\limits_{V\cap Q^1}[\varrho_1(y)]^{\mu\beta_0}\tau^{\gamma}|G(x,t;y,\tau)|\,dyd\tau < \varepsilon, \tag{9}$$

$$[\varrho_2(t)]^{-\frac{\mu}{2}}\int\limits_{V\cap Q^1}[\varrho_1(y)]^{\mu\beta_0}\tau^{\gamma}|G(x,t;y,\tau)|\,dyd\tau < \varepsilon, \tag{10}$$

$$[\varrho_1(x)]^{-\mu} \int\limits_{V\cap Q^2} [\varrho_2(\tau)]^{\frac{\mu\beta_0}{2}} \tau^{\gamma} |G(x,t;y,\tau)|\, dyd\tau < \varepsilon, \tag{11}$$

$$[\varrho_2(t)]^{-\frac{\mu}{2}} \int\limits_{V\cap Q^2} [\varrho_2(\tau)]^{\frac{\mu\beta_0}{2}} \tau^{\gamma} |G(x,t;y,\tau)|\, dyd\tau < \varepsilon \tag{12}$$

та для довільних $(x,t)\in\overline{Q}$ *виконується*

$$\int\limits_{V\cap Q^3} |G(x,t;y,\tau)|\, dyd\tau < \varepsilon. \tag{13}$$

Доведення. Доведемо виконання (9). Нехай V – довільна підобласть в Q, $(x,t)\in\overline{Q^1}$ – довільна точка, а $\sigma\in(0,\frac{\varepsilon_0}{2})$ – яке-небудь число. Враховуючи властивості функції Ґріна та лему 1 при $\mu\beta_0>-1$, $\mu\beta_0+2\gamma>-2$, матимемо

$$[\varrho_1(x)]^{-\mu} \int\limits_{(y,\tau)\in\{V\cap Q^1:\varrho_1(y)<\sigma\}} [\varrho_1(y)]^{\mu\beta_0}\tau^{\gamma}|G(x,t;y,\tau)|\, dyd\tau \le \widetilde{C}'_{\mu\beta_0}[\varrho_1(x)]^{-\mu}\times$$

$$\times(1+[\varrho_1(x)]^{\mu\beta_0+1-n}) \le \widetilde{C}'_{\mu\beta_0}(\sigma^{-\mu}+\sigma^{\mu(\beta_0-1)+1-n}) \le 2\widetilde{C}'_{\mu\beta_0}\sigma^{\mu(\beta_0-1)+1-n}. \tag{14}$$

Зауважимо, що $\mu(\beta_0-1)+1-n>0$.

Нехай $\varepsilon\in(0,1)$ – довільно вибране. Зафіксуємо його. З (14) випливає, що при $\sigma_0=\sigma_0(\varepsilon)=\min\{\left(\frac{\varepsilon}{4\widetilde{C}'_{\mu\beta_0}}\right)^{\frac{1}{\mu(\beta_0-1)+1-n}}, \frac{\varepsilon_0}{2}\}$ одержуємо $[\varrho_1(x)]^{-\mu} \int\limits_{(y,\tau)\in\{V\cap Q^1:\varrho_1(y)<\sigma_0\}} [\varrho_1(y)]^{\mu\beta_0}\tau^{\gamma}\cdot|G(x,t;y,\tau)|\, dyd\tau < \frac{\varepsilon}{2}$.

Враховуючи оцінки функції Ґріна і те, що в області Q^1 $\varrho(y,\tau)=\varrho_1(y)$ та $||x-y||^2+|t-\tau|\ge||x-y||^2\ge d^2(y)\ge C'\varrho_1^2(y)$, де $C'>0$, при довільній підобласті V області Q такій, що $m(V)<\frac{\varepsilon}{2\widehat{C}''}\cdot\sigma_0^{-\mu\beta_0+n}$, $\widehat{C}''$ – додатна стала та $(x,t)\in\overline{Q^1}$ матимемо $[\varrho_1(x)]^{-\mu} \int\limits_{(y,\tau)\in\{V\cap Q^1:\varrho_1(y)\ge\sigma_0\}} [\varrho_1(y)]^{\mu\beta_0}\tau^{\gamma}|G(x,t;y,\tau)|\, dyd\tau \le$ $\le \widehat{C}_0(C')^{-n}[\varrho_1(x)]^{-\mu} \int\limits_{(y,\tau)\in\{V\cap Q^1:\varrho_1(y)\ge\sigma_0\}} [\varrho_1(y)]^{\mu\beta_0-n}\tau^{\gamma}\, dyd\tau \le \frac{\widehat{C}''}{\sigma_0^{-\mu\beta_0+n}}m(V) < \frac{\varepsilon}{2}$, а отже, існує $\eta_1=\eta_1(\varepsilon)=\frac{\varepsilon}{2\widehat{C}''}\cdot\sigma_0^{-\mu\beta_0+n}=\frac{\varepsilon}{2\widehat{C}''}\left(\min\{\left(\frac{\varepsilon}{4\widetilde{C}'_{\mu\beta_0}}\right)^{\frac{1}{\mu(\beta_0-1)+1-n}}, \frac{\varepsilon_0}{2}\}\right)^{-\mu\beta_0+n}$ таке, що при $m(V)<\eta_1(\varepsilon)$ та $(x,t)\in\overline{Q^1}$ випливає

$[\varrho_1(x)]^{-\mu} \int\limits_{(y,\tau)\in V\cap Q^1} [\varrho_1(y)]^{\mu\beta_0}\tau^{\gamma}|G(x,t;y,\tau)|\, dyd\tau \le$

$\le [\varrho_1(x)]^{-\mu} \int\limits_{(y,\tau)\in\{V\cap Q^1:\varrho_1(y)<\sigma_0\}} [\varrho_1(y)]^{\mu\beta_0}\tau^{\gamma}|G(x,t;y,\tau)|\, dyd\tau +$

$+ [\varrho_1(x)]^{-\mu} \int\limits_{(y,\tau)\in\{V\cap Q^1:\varrho_1(y)\ge\sigma_0\}} [\varrho_1(y)]^{\mu\beta_0}\tau^{\gamma}|G(x,t;y,\tau)|\, dyd\tau < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$

З подібних міркувань, одержуємо (10).

Доведемо (11). Нехай $(x,t)\in\overline{Q^1}$, тобто $\varrho_1(x)<[\varrho_2(t)]^{\frac{1}{2}}$, $\sigma\in(0,\frac{\varepsilon_0}{2})$. Враховуючи оцінки функції Ґріна та лему 1 при $\frac{\mu\beta_0}{2}>-1$, $\mu\beta_0+2\gamma>-2$, матимемо

$$[\varrho_1(x)]^{-\mu} \int\limits_{(y,\tau)\in\{V\cap Q^2:\varrho_2(\tau)<\sigma\}} [\varrho_2(\tau)]^{\frac{\mu\beta_0}{2}}\tau^{\gamma}|G(x,t;y,\tau)|\, dyd\tau \le \widetilde{C}'_{\frac{\mu\beta_0}{2}}[\varrho_2(t)]^{-\frac{\mu}{2}}\times$$

$$\times(1+[\varrho_2(t)]^{\frac{\mu\beta_0+2\gamma+2-n}{2}}) \le \widetilde{C}'_{\frac{\mu\beta_0}{2}}(\sigma^{-\frac{\mu}{2}}+\sigma^{\frac{(\beta_0-1)\mu+2\gamma+2-n}{2}}) \le 2\widetilde{C}'_{\frac{\mu\beta_0}{2}}\sigma^{\frac{(\beta_0-1)\mu+2\gamma+2-n}{2}}. \quad (15)$$

Зауважимо, що $\frac{(\beta_0-1)\mu+2\gamma+2-n}{2} > 0$.

З (15) випливає, що при $\sigma_1 = \sigma_1(\varepsilon) = \min\{\Big(\frac{\varepsilon}{4\widetilde{C}'_{\frac{\mu\beta_0}{2}}}\Big)^{\frac{2}{\mu(\beta_0-1)+2\gamma+2-n}}, \frac{\varepsilon_0}{2}\}$ одержуємо $[\varrho_1(x)]^{-\mu}\int\limits_{(y,\tau)\in\{V\cap Q^2:\varrho_2(\tau)<\sigma_1\}}[\varrho_2(\tau)]^{\frac{\mu\beta_0}{2}}\tau^\gamma|G(x,t;y,\tau)|\,dyd\tau < \frac{\varepsilon}{2}$.

Враховуючи оцінки функції Ґріна і те, що в області Q^2 $\varrho(y,\tau) = [\varrho_2(\tau)]^{\frac{1}{2}} \le \varrho_1(y)$ та $||x-y||^2+|t-\tau| \ge d^2(y) \ge C'\varrho_1^2(y) \ge C''\varrho_2(\tau)$, де $C''>0$, при довільній $V\subset Q$ такій, що $m(V) < \frac{\varepsilon}{2\widehat{C}'''}\sigma_1^{\frac{-\mu\beta_0+n-2\gamma}{2}}$ та $(x,t)\in\overline{Q^1}$ матимемо $[\varrho_1(x)]^{-\mu}\int\limits_{(y,\tau)\in\{V\cap Q^2:\varrho_2(\tau)\ge\sigma_1\}}[\varrho_2(\tau)]^{\frac{\mu\beta_0}{2}}\tau^\gamma|G(x,t;y,\tau)|\,dyd\tau \le$

$$\le \widehat{C}_0(C'')^{-\frac{n}{2}}[\varrho_1(x)]^{-\mu}\int\limits_{(y,\tau)\in\{V\cap Q^2:\varrho_2(\tau)\ge\sigma_1\}}[\varrho_2(\tau)]^{\frac{\mu\beta_0-n}{2}}\tau^\gamma\,dyd\tau \le$$

$\le \widehat{C}'''\int\limits_{(y,\tau)\in\{V\cap Q^2:\varrho_2(\tau)\ge\sigma_1\}}[\varrho_2(\tau)]^{\frac{\mu\beta_0-n+2\gamma}{2}}\,dyd\tau \le \frac{\widehat{C}'''}{\sigma_1^{\frac{-\mu\beta_0+n-2\gamma}{2}}}m(V) < \frac{\varepsilon}{2}$, а отже, існує $\eta_2=\eta_2(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{2\widehat{C}'''}\sigma_1^{\frac{-\mu\beta_0+n-2\gamma}{2}} = \frac{\varepsilon}{2\widehat{C}'''}\Big(\min\{\Big(\frac{\varepsilon}{4\widetilde{C}'_{\frac{\mu\beta_0}{2}}}\Big)^{\frac{2}{\mu(\beta_0-1)+2\gamma+2-n}}, \frac{\varepsilon_0}{2}\}\Big)^{\frac{-\mu\beta_0+n-2\gamma}{2}}$ таке, що при $m(V)<\eta_2(\varepsilon)$ та $(x,t)\in\overline{Q^1}$ випливає

$$[\varrho_1(x)]^{-\mu}\int\limits_{(y,\tau)\in V\cap Q^2}[\varrho_2(\tau)]^{\frac{\mu\beta_0}{2}}\tau^\gamma|G(x,t;y,\tau)|\,dyd\tau \le$$

$$\le [\varrho_1(x)]^{-\mu}\int\limits_{(y,\tau)\in\{V\cap Q^2:\varrho_2(\tau)<\sigma_1\}}[\varrho_2(\tau)]^{\frac{\mu\beta_0}{2}}\tau^\gamma|G(x,t;y,\tau)|\,dyd\tau +$$

$$+ [\varrho_1(x)]^{-\mu}\int\limits_{(y,\tau)\in\{V\cap Q^2:\varrho_2(\tau)\ge\sigma_1\}}[\varrho_2(\tau)]^{\frac{\mu\beta_0}{2}}\tau^\gamma|G(x,t;y,\tau)|\,dyd\tau < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

З подібних міркувань, одержуємо (12).

За властивостями функції Ґріна та рівномірної збіжності інтегралів за заданим $\varepsilon>0$ можна вказати $\eta_3=\eta_3(\varepsilon)>0$ (η_3 не залежить від точки $(x,t)\in\overline{Q}$) таке, що для довільної підобласті $V\subset Q$, міра якої $m(V)<\eta_3$ виконується (13). При $\eta<\min\{\eta_1;\eta_2;\eta_3\}$ виконуються всі оцінки (9)-(13).

Теорема 2. *Нехай виконуються припущення 1, функція* $f_0(x,t,\mathrm{v}) = |\mathrm{v}|^{\beta_0}t^\gamma$, *де* $\beta_0\in(0,\frac{1}{n+1})$, $\max\{-(1-\beta_0);\ \frac{n\beta_0-2}{2}\} < \gamma < 0$, $\max\{q_1,\ q_2-1\} < \min\{\frac{1}{\beta_0};\ \frac{2(\gamma+1)}{\beta_0}\} - n - 1$, $\max\{-\frac{2(\gamma+1)}{\beta_0};\ -\frac{1}{\beta_0};\ -k-1\} < \mu \le \min\{\frac{2-n+2\gamma}{1-\beta_0};\ \frac{2\gamma}{1-\beta_0};\ -k_0-1\}$. *Тоді існує розв'язок* $u\in\mathcal{M}_\mu(Q,\ \partial Q)$ *задачі (2)-(4), який при* $\mu>-k-1$ *належить до простору* $\mathcal{M}_k(Q)$, *де* $\max\{q_1,q_2-1\}+n<k<\min\{-1+\frac{1}{\beta_0};\ \frac{2\gamma+2(1-\beta_0)}{2}\}$.

Доведення. Використаємо теорему Шаудера. З умов теореми щодо μ випливає виконання умов лем 4, 5 щодо μ. З оцінок, одержаних при доведенні лем 4 та 5, випливає існування сталої $\widetilde{K}_0>0$ такої, що для довільних $\mathrm{v}\in\mathcal{M}_{\mu,\widetilde{C}}(Q,\ \partial Q)$ та $\beta_0\in(0,1)$ матимемо $||H_1\mathrm{v};\ \partial Q||_\mu \le \widetilde{C}'(\max\limits_{1\le i\le3}\widetilde{C}''_i)^{\beta_0}+R_2 \le \widetilde{C}$ при $\widetilde{C}>\widetilde{K}_0$. Звідси та із лем 4, 5 одержуємо, що при $\beta_0\in(0;\frac{1}{n})$, $\widetilde{C}>\widetilde{K}_0$ оператор $H_1:\mathcal{M}_{\mu,\widetilde{C}}(Q,\ \partial Q)\to\mathcal{M}_{\mu,\widetilde{C}}(Q,\ \partial Q)$, а множина $\{H_1\mathrm{v}:\mathrm{v}\in\mathcal{M}_{\mu\,\widetilde{C}}(Q,\ \partial Q)\}$ – рівномірно обмежена.

Покажемо, що множина $\{H_1\mathrm{v}:\ \mathrm{v}\in\mathcal{M}_{\mu,\widetilde{C}}(Q,\ \partial Q)\}$ – одностайно неперервна, тобто для довільного $\varepsilon > 0$ існує $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ таке, що для довільних $(z, z_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $||z|| < \delta$, $|z_0| < \delta$ та довільних $\mathrm{v} \in \mathcal{M}_{\mu, \widetilde{C}}(Q, \partial Q)$

$$||(H_1\mathrm{v})(x+z, t+z_0) - (H_1\mathrm{v})(x,t);\, \partial Q||_\mu \leq$$

$$\leq \max\{ \sup_{(x,t)\in\overline{Q^1}} |[\varrho_1(x+z)]^{-\mu}(H\mathrm{v})(x+z,t+z_0) - [\varrho_1(x)]^{-\mu}(H\mathrm{v})(x,t)|;$$

$$\sup_{(x,t)\in\overline{Q^2}} |[\varrho_2(t+z_0)]^{-\frac{\mu}{2}}(H\mathrm{v})(x+z,t+z_0) - [\varrho_2(t)]^{-\frac{\mu}{2}}(H\mathrm{v})(x,t)|;$$

$$\sup_{(x,t)\in\overline{Q^3}} |(H\mathrm{v})(x+z,t+z_0) - (H\mathrm{v})(x,t)|\} +$$

$$+\max\{ \sup_{(x,t)\in\overline{Q^1}} |[\varrho_1(x+z)]^{-\mu}h(x+z,t+z_0) - [\varrho_1(x)]^{-\mu}h(x,t)|;$$

$$\sup_{(x,t)\in\overline{Q^2}} |[\varrho_2(t+z_0)]^{-\frac{\mu}{2}}h(x+z,t+z_0) - [\varrho_2(t)]^{-\frac{\mu}{2}}h(x,t)|;$$

$$\sup_{(x,t)\in\overline{Q^3}} |h(x+z,t+z_0) - h(x,t)|\} < \varepsilon$$

Вважаємо $[\varrho_1(x+z)]^{-\mu} = 0$, $[\varrho_2(t+z_0)]^{-\frac{\mu}{2}} = 0$,
$[\varrho_1(x+z)]^{-\mu}G(x+z,t+z_0;y,\tau) = 0$, $[\varrho_2(t+z_0)]^{-\frac{\mu}{2}}G(x+z,t+z_0;y,\tau) = 0$,
$[\varrho_1(x+z)]^{-\mu}(H\mathrm{v})(x+z,t+z_0) = 0$, $[\varrho_2(t+z_0)]^{-\frac{\mu}{2}}(H\mathrm{v})(x+z,t+z_0) = 0$,
$[\varrho_1(x+z)]^{-\mu}h(x+z,t+z_0) = 0$, $[\varrho_2(t+z_0)]^{-\frac{\mu}{2}}h(x+z,t+z_0) = 0$, якщо $(x+z,t+z_0) \notin Q$.

Зафіксуємо $\varepsilon > 0$. З леми 5 випливає, що $[\varrho_1(x)]^{-\mu} \cdot h(x,t) \in C(\overline{Q})$, $[\varrho_2(t)]^{-\frac{\mu}{2}} \cdot h(x,t) \in C(\overline{Q})$. Тому існує $\delta' = \delta'(\varepsilon) > 0$ таке, що для довільних $(z, z_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $||z|| < \delta'$, $|z_0| < \delta'$ виконується

$$\max\{ \sup_{(x,t)\in\overline{Q^1}} |[\varrho_1(x+z)]^{-\mu}h(x+z,t+z_0) - [\varrho_1(x)]^{-\mu}h(x,t)|;$$
$$\sup_{(x,t)\in\overline{Q^2}} |[\varrho_2(t+z_0)]^{-\frac{\mu}{2}}h(x+z,t+z_0) - [\varrho_2(t)]^{-\frac{\mu}{2}}h(x,t)|;$$
$$\sup_{(x,t)\in\overline{Q^3}} |h(x+z,t+z_0) - h(x,t)|\} < \tfrac{\varepsilon}{2}.$$

Розглянемо для довільних $(x,t) \in \overline{Q^1}$ та довільних $\mathrm{v} \in \mathcal{M}_{\mu, \widetilde{C}}(Q, \partial Q)$

$$\mathcal{I}^1(x,t;z,z_0) = |[\varrho_1(x+z)]^{-\mu}(H\mathrm{v})(x+z,t+z_0) - [\varrho_1(x)]^{-\mu}(H\mathrm{v})(x,t)| \leq$$
$$\leq \int_0^t d\tau \int_\Omega |[\varrho_1(x+z)]^{-\mu}G(x+z,t+z_0;y,\tau) - [\varrho_1(x)]^{-\mu}G(x,t;y,\tau)| \cdot |f_0(y,\tau,\mathrm{v}(y,\tau))|\, dy +$$
$$+ [\varrho_1(x+z)]^{-\mu} \int_t^{t+z_0} d\tau \int_\Omega |G(x+z,t+z_0;y,\tau)| \cdot |f_0(y,\tau,\mathrm{v}(y,\tau))|\, dy = \mathcal{I}^1_1(x,t;z,z_0) +$$
$$+ \mathcal{I}^1_2(x,t;z,z_0).$$

Нехай $\widehat{g}_1(x,t;y,\tau) \overset{def}{=} [\varrho_1(x)]^{-\mu}G(x,t;y,\tau)$.

Функція $f_0(x,t,z)$ визначена в $Q \times (-\infty, +\infty)$ та має вигляд $f_0(x,t,\mathrm{v}) = |\mathrm{v}|^{\beta_0}t^\gamma$. Тоді при $(x,t) \in \overline{Q^1}$ матимемо

$$\mathcal{I}^1_1(x,t;z,z_0) \leq \int_{Q^1} |\widehat{g}_1(x+z,t+z_0;y,\tau) - \widehat{g}_1(x,t;y,\tau)|(\widetilde{C}''_1[\varrho_1(y)]^\mu)^{\beta_0}\tau^\gamma\, dyd\tau +$$
$$+ \int_{Q^2} |\widehat{g}_1(x+z,t+z_0;y,\tau) - \widehat{g}_1(x,t;y,\tau)|(\widetilde{C}''_2[\varrho_2(\tau)]^{\frac{\mu}{2}})^{\beta_0}\tau^\gamma\, dyd\tau +$$
$$+ \int_{Q^3} |\widehat{g}_1(x+z,t+z_0;y,\tau) - \widehat{g}_1(x,t;y,\tau)|(\widetilde{C}''_3)^{\beta_0}\tau^\gamma\, dyd\tau =$$
$$= \mathcal{I}^1_{11}(x,t;z,z_0) + \mathcal{I}^1_{12}(x,t;z,z_0) + \mathcal{I}^1_{13}(x,t;z,z_0).$$

I$_1$. Нехай $\eta_{1,1} > 0$ – досить мале і довільне число, $Q^1_{\eta_{1,1}}$ – підобласть області Q^1 така, що $dist(Q^1_{\eta_{1,1}}, \Sigma) \geq \eta_{1,1} > 0$. Розглянемо при $(x,t) \in \overline{Q^1}$

$\mathcal{I}^1_{11}(x,t;z,z_0) = \int\limits_{Q^1 \setminus Q^1_{\eta_{1,1}}} |\widehat{g}_1(x+z,t+z_0;y,\tau) - \widehat{g}_1(x,t;y,\tau)| (\widetilde{C}''_1)^{\beta_0} [\varrho_1(y)]^{\mu\beta_0} \tau^\gamma \, dyd\tau +$

$+ \int\limits_{Q^1_{\eta_{1,1}}} |\widehat{g}_1(x+z,t+z_0;y,\tau) - \widehat{g}_1(x,t;y,\tau)| (\widetilde{C}''_1)^{\beta_0} [\varrho_1(y)]^{\mu\beta_0} \tau^\gamma \, dyd\tau =$

$= \mathcal{I}^1_{111}(x,t;z,z_0) + \mathcal{I}^1_{112}(x,t;z,z_0)$.

Нехай $\delta_0 > 0$ – фіксоване число. За заданим $\delta_0 > 0$ вибираємо число $\eta_{1,1} < \frac{\varepsilon_0}{2}$ таке, щоб $m(Q^1 \setminus Q^1_{\eta_{1,1}}) \leq \delta_0$ та $\eta_{1,1} < \left(\frac{\varepsilon}{24 \widehat{C}'_0 \cdot (\widetilde{C}''_1)^{\beta_0}} \right)^{\frac{1}{\mu\beta_0 - \mu}}$.

За лемою 6 існує $\delta_0 = \delta_0(\varepsilon) > 0$, існує відповідне $\eta_{1,1} > 0$ такі, що для довільних $(x,t) \in \overline{Q^1}$ та $(z,z_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$ таких, що $(x+z, t+z_0) \in Q^1$,

$$\int\limits_{Q^1 \setminus Q^1_{\eta_{1,1}}} [\varrho_1(y)]^{\mu\beta_0} \tau^\gamma |\widehat{g}_1(x,t;y,\tau)| \, dyd\tau < \frac{\varepsilon}{48 (\widetilde{C}''_1)^{\beta_0}}, \tag{16}$$

$$\int\limits_{Q^1 \setminus Q^1_{\eta_{1,1}}} [\varrho_1(y)]^{\mu\beta_0} \tau^\gamma |\widehat{g}_1(x+z,t+z_0;y,\tau)| \, dyd\tau < \frac{\varepsilon}{48 (\widetilde{C}''_1)^{\beta_0}}, \tag{17}$$

Тоді з (16), (17) при $(x,t) \in \overline{Q^1}$ матимемо $\mathcal{I}^1_{111}(x,t;z,z_0) \leq$
$\leq \int\limits_{Q^1 \setminus Q_{\eta^1_{1,1}}} (|\widehat{g}_1(x+z,t+z_0;y,\tau)| + |\widehat{g}_1(x,t;y,\tau)|) (\widetilde{C}''_1)^{\beta_0} [\varrho_1(y)]^{\mu\beta_0} \tau^\gamma \, dyd\tau \leq \frac{\varepsilon}{24}$, а отже,
$\sup\limits_{(x,t) \in \overline{Q^1}} \mathcal{I}^1_{111}(x,t;z,z_0) < \frac{\varepsilon}{24}$.

Нехай $\widehat{g}_{11}'(x,t;y,\tau) \stackrel{def}{=} \widehat{g}_1(x,t;y,\tau) (\widetilde{C}''_1)^{\beta_0} [\varrho_1(y)]^{\mu\beta_0} \tau^\gamma$.

Виберемо $0 < \eta_{1,2} < \frac{\eta_{1,1}}{2}$. Для довільної $(x,t) \in Q^1_{\frac{\eta_{1,1}}{2}}$ та числа $\eta_{1,2}$ визначимо множини $U^1_{\eta_{1,2}}(x,t) \stackrel{def}{=} \{(y,\tau) \in Q^1_{\eta_{1,1}} : ||x-y|| \leq \eta_{1,2}, \ |t-\tau| \leq \eta^2_{1,2}\}$.

Обчислимо $m(U^1_{\eta_{1,2}}(x,t)) = \int\limits_{U^1_{\eta_{1,2}}(x,t)} dyd\tau = \int\limits_{||x-y|| \leq \eta_{1,2}} dy \int\limits_{|t-\tau| \leq \eta^2_{1,2}} d\tau = 2\sigma_n \eta^{n+2}_{1,2}$, де σ_n – площа поверхні сфери одиничного радіуса в $\mathbb{R}^n$. Якщо вибрати $\eta_{1,2} < \min\{\frac{\eta_{1,1}}{2}; \ (\frac{\delta_0}{2\sigma_n})^{\frac{1}{n+2}}\}$, то $m(U^1_{\eta_{1,2}}(x,t)) < \delta_0$. Тоді з (16), (17) для довільних $(x,t) \in \overline{Q^1}$ та $(z,z_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$ таких, що $(x+z, t+z_0) \in Q^1$

$$\int\limits_{U^1_{\eta_{1,2}}(x,t)} |\widehat{g}_{11}'(x,t;y,\tau)| \, dyd\tau < \frac{\varepsilon}{72}; \qquad \int\limits_{U^1_{\eta_{1,2}}(x,t)} |\widehat{g}_{11}'(x+z,t+z_0;y,\tau)| \, dyd\tau < \frac{\varepsilon}{72}. \tag{18}$$

Виберемо $\delta_{1,1} < \min\{\delta_0; \ \frac{\eta_{1,2}}{2}\}$. При $(x,t) \in Q^1_{\frac{\eta_{1,1}}{2}}$, $(z,z_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $||z|| \leq \delta_{1,1}$ $(< \frac{1}{4}\eta_{1,1})$, $|z_0| \leq \delta_{1,1} (< \frac{1}{4}\eta_{1,1})$ маємо $(x+z, t+z_0) \in Q^1_{\frac{\eta_{1,1}}{4}}$. При $(x,t) \in Q^1_{\frac{\eta_{1,1}}{4}}$, $(y,\tau) \in Q^1_{\eta_{1,1}} \setminus U^1_{\eta_{1,2}}(x,t)$, $||x-y|| \geq \eta_{1,2}$, $|t-\tau| \geq \eta^2_{1,2}$, а отже, $(x,t) \neq (y,\tau)$. Тому функція $\widehat{g}_1(x,t;y,\tau)$ рівномірно неперервна в
$V = \{(x,t;y,\tau) : (x,t) \in \overline{Q^1_{\frac{\eta_{1,1}}{4}}}, (y,\tau) \in \overline{Q^1_{\eta_{1,1}} \setminus U^1_{\eta_{1,2}}(x,t)}\}$. Тоді існує $\delta_{1,2} = \delta_{1,2}(\varepsilon) \in (0, \delta_{1,1}]$ таке, що для довільних $(z,z_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $||z|| < \delta_{1,2}$, $|z_0| < \delta_{1,2}$, $(x,t) \in \overline{Q^1_{\frac{\eta_{1,1}}{2}}} \subset \overline{Q^1_{\frac{\eta_{1,1}}{4}}}$, $(y,\tau) \in \overline{Q^1_{\eta_{1,1}} \setminus U^1_{\eta_{1,2}}(x,t)}$ при $\mu\beta_0 > -1$, виконується $|\widehat{g}_1(x+z,t+z_0;y,\tau) - \widehat{g}_1(x,t;y,\tau)| < \frac{\varepsilon}{72 A^1_1}$, де

$A_1^1 = \int\limits_{Q^1_{\eta_{1,1}} \setminus U^1_{\eta_{1,2}}(x,t)} (\widetilde{C}_1'')^{\beta_0} [\varrho_1(y)]^{\mu\beta_0} \tau^\gamma \, dy d\tau$, а тоді

$$\int\limits_{Q^1_{\eta_{1,1}} \setminus U^1_{\eta_{1,2}}(x,t)} |\widehat{g}_{11}'(x+z, t+z_0; y, \tau) - \widehat{g}_{11}'(x,t;y,\tau)| \, dy d\tau <$$

$$< \frac{\varepsilon}{72 A_1^1} \int\limits_{Q^1_{\eta_{1,1}} \setminus U^1_{\eta_{1,2}}(x,t)} (\widetilde{C}_1'')^{\beta_0} [\varrho_1(y)]^{\mu\beta_0} \tau^\gamma \, dy d\tau \le \frac{\varepsilon}{72}. \tag{19}$$

Отже, при $(x,t) \in Q^1_{\frac{\eta_{1,1}}{2}}$ із (18), (19) випливає існування $\delta_{1,2} = \delta_{1,2}(\varepsilon) > 0$ такого, що для довільних $(z, z_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $||z|| < \delta_{1,2}$, $|z_0| < \delta_{1,2}$
$\mathcal{I}^1_{112}(x,t;z,z_0) = \int\limits_{Q^1_{\eta_{1,1}}} |\widehat{g}_{11}'(x+z,t+z_0;y,\tau) - \widehat{g}_{11}'(x,t;y,\tau)| \, dy d\tau \le$

$\le \int\limits_{U^1_{\eta_{1,2}}(x,t)} |\widehat{g}_{11}'(x,t;y,\tau)| \, dy d\tau + \int\limits_{U^1_{\eta_{1,2}}(x,t)} |\widehat{g}_{11}'(x+z,t+z_0;y,\tau)| \, dy d\tau +$

$+ \int\limits_{Q^1_{\eta_{1,1}} \setminus U^1_{\eta_{1,2}}(x,t)} |\widehat{g}_{11}'(x+z,t+z_0;y,\tau) - \widehat{g}_{11}'(x,t;y,\tau)| \, dy d\tau < \frac{\varepsilon}{24}$, а отже,

$\sup\limits_{(x,t) \in \overline{Q^1_{\frac{\eta_{1,1}}{2}}}} \mathcal{I}^1_{112}(x,t;z,z_0) < \frac{\varepsilon}{24}$.

При $(x,t) \in \overline{Q^1 \setminus Q^1_{\frac{\eta_{1,1}}{2}}}$, $(z,z_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $||z|| \le \delta_{1,1} (< \frac{\eta_{1,1}}{4})$, $|z_0| \le \delta_{1,1} (< \frac{\eta_{1,1}}{4})$ буде $(x+z, t+z_0) \in Q^1 \setminus Q^1_{\frac{3\eta_{1,1}}{4}} \subset Q^1$ або $(x+z,t+z_0) \notin Q^1$. За рівномірною неперервністю функції $\widehat{g}_1(x,t;y,\tau)$ на замкненій множині
$V_1 = \overline{(Q^1 \setminus Q^1_{\frac{3\eta_{1,1}}{4}})} \times \overline{Q^1_{\eta_{1,1}}}$, враховуючи, що $-\mu \ge 0$, $[\varrho_1(x)]^{-\mu} \le 1$, одержуємо: існує $\delta_{1,3} = \delta_{1,3}(\varepsilon) \in (0, \delta_{1,1}]$ таке, що для довільних $(x,t) \in \overline{Q^1 \setminus Q^1_{\frac{\eta_{1,1}}{2}}} \subset \overline{Q^1 \setminus Q^1_{\frac{3\eta_{1,1}}{4}}}$, $(y,\tau) \in \overline{Q^1_{\eta_{1,1}}}$ $(z,z_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $||z|| < \delta_{1,3}$, $|z_0| < \delta_{1,3}$ виконується
$|\widehat{g}_1(x+z,t+z_0;y,\tau) - \widehat{g}_1(x,t;y,\tau)| < \frac{\varepsilon}{24 A_2^1}$, де $A_2^1 = \int\limits_{Q^1_{\eta_{1,1}}} (\widetilde{C}_1'')^{\beta_0} [\varrho_1(y)]^{\mu\beta_0} \tau^\gamma \, dy d\tau$,

звідки $\sup\limits_{\substack{(x,t) \in \overline{Q^1 \setminus Q^1_{\frac{\eta_{1,1}}{2}}} \\ (x+z,t+z_0) \in Q^1}} \mathcal{I}^1_{112}(x,t;z,z_0) \le \frac{\varepsilon}{24 A_2^1} \int\limits_{Q^1_{\eta_{1,1}}} (\widetilde{C}_1'')^{\beta_0} [\varrho_1(y)]^{\mu\beta_0} \tau^\gamma \, dy d\tau = \frac{\varepsilon}{24}$.

Для тих точок $(x,t) \in \overline{Q^1 \setminus Q^1_{\frac{\eta_{1,1}}{2}}}$, $(y,\tau) \in Q^1_{\eta_{1,1}}$, $(z,z_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $||z|| < \delta_{1,1}$, $|z_0| < \delta_{1,1}$, для яких $(x+z,t+z_0) \notin Q^1$, матимемо
$\sup\limits_{\substack{(x,t) \in \overline{Q^1 \setminus Q^1_{\frac{\eta_{1,1}}{2}}} \\ (x+z,t+z_0) \notin Q^1}} \mathcal{I}^1_{112}(x,t;z,z_0) \le \sup\limits_{\substack{(x,t) \in \overline{Q^1 \setminus Q^1_{\frac{\eta_{1,1}}{2}}} \\ (x+z,t+z_0) \notin Q^1}} \int\limits_{Q^1_{\eta_{1,1}}} |\widehat{g}_1(x,t;y,\tau)| (\widetilde{C}_1'')^{\beta_0} \eta_{1,1}^{\mu\beta_0} \tau^\gamma \, dy d\tau \le$
$\le \widehat{C}_0' (\widetilde{C}_1'')^{\beta_0} \eta_{1,1}^{\mu\beta_0 - \mu} \le \frac{\varepsilon}{24}$, де остання нерівність виконується згідно з вибором числа $\eta_{1,1}$. Зауважимо, що при $\mu < 0$ також $\mu\beta_0 - \mu > 0$.

Показано, що існує $\widetilde{\delta}_1 = \min\{\delta_{1,2}; \delta_{1,3}\} > 0$ таке, що для довільних $(x,t) \in \overline{Q^1}$, $(z,z_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $||z|| < \widetilde{\delta}_1$, $|z_0| < \widetilde{\delta}_1$ $\mathcal{I}^1_{11}(x,t;z,z_0) < \frac{\varepsilon}{12}$.

$\mathbf{I_2}$. Нехай $Q^2_{\eta_{1,3}}$ – підобласть області Q^2 така, що $dist(Q^2_{\eta_{1,3}}, \Sigma) \ge \eta_{1,3} > 0$. Розглянемо для довільних $(x,t) \in \overline{Q^1}$
$\mathcal{I}^1_{12}(x,t;z,z_0) = \int\limits_{Q^2 \setminus Q^2_{\eta_{1,3}}} |\widehat{g}_1(x+z,t+z_0;y,\tau) - \widehat{g}_1(x,t;y,\tau)| (\widetilde{C}_2'' [\varrho_2(\tau)]^{\frac{\mu}{2}})^{\beta_0} \tau^\gamma \, dy d\tau +$

$+ \int\limits_{Q^2_{\eta_{1,3}}} |\widehat{g}_1(x+z, t+z_0; y,\tau) - \widehat{g}_1(x,t;y,\tau)| (\widetilde{C}''_2 [\varrho_2(\tau)]^{\frac{\mu}{2}})^{\beta_0} \tau^{\gamma}\, dy d\tau =$

$= \mathcal{I}^1_{121}(x,t;z,z_0) + \mathcal{I}^1_{122}(x,t;z,z_0).$

За заданим $\delta_0 > 0$ вибираємо число $\eta_{1,3} < \frac{\varepsilon_0}{2}$ таке, щоб $m(Q^2 \setminus Q^2_{\eta_{1,3}}) \le \delta_0$ та $\eta_{1,3} < \left(\frac{\varepsilon}{24\widehat{C}'_0 \cdot (\widetilde{C}''_2)^{\beta_0}}\right)^{\frac{2}{\mu\beta_0 + 2\gamma - 2\mu}}$.

Використовуючи результати леми 6, одержуємо: існує $\delta_0 = \delta_0(\varepsilon) > 0$, існує відповідне $\eta_{1,3}$ такі, що для довільних $(x,t) \in \overline{Q^1}$ та $(z,z_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$ таких, що $(x+z, t+z_0) \in Q^1$, матимемо $\mathcal{I}^1_{121}(x,t;z,z_0) \le \int\limits_{Q^2 \setminus Q^2_{\eta_{1,3}}} (|\widehat{g}_1(x+z,t+z_0;y,\tau)| +$

$+ |\widehat{g}_1(x,t;y,\tau)|)(\widetilde{C}''_2)^{\beta_0} [\varrho_2(\tau)]^{\frac{\mu\beta_0}{2}} \tau^{\gamma}\, dy d\tau \le \frac{\varepsilon}{24}$, а отже, $\sup\limits_{(x,t)\in\overline{Q^1}} \mathcal{I}^1_{121}(x,t;z,z_0) < \frac{\varepsilon}{24}$.

Розглянемо

$\sup\limits_{(x,t)\in\overline{Q^1}} \mathcal{I}^1_{122}(x,t;z,z_0) = \sup\{ \sup\limits_{(x,t)\in\overline{Q^1_{\frac{\eta_{1,3}}{2}}}} \mathcal{I}^1_{122}(x,t;z,z_0); \sup\limits_{(x,t)\in\overline{Q^1 \setminus Q^1_{\frac{\eta_{1,3}}{2}}}} \mathcal{I}^1_{122}(x,t;z,z_0)\}.$

Нехай $\widehat{g}'_{12}(x,t;y,\tau) \stackrel{def}{=} \widehat{g}_1(x,t;y,\tau)(\widetilde{C}''_2)^{\beta_0}[\varrho_2(\tau)]^{\frac{\mu\beta_0}{2}}\tau^{\gamma}$. Виберемо $\eta_{1,4} < \frac{\eta_{1,3}}{2}$ та розглянемо $Q^1_{\eta_{1,4}} = \{(\xi,\xi_0) \in Q^1_{\frac{\eta_{1,3}}{2}} : d(\xi,\xi_0; Q^2_{\eta_{1,3}}) < \eta_{1,4}\}$.

Виберемо $\eta_{1,5} < \frac{\eta_{1,3}}{2}$. Для довільної точки $(x,t) \in Q^1_{\frac{\eta_{1,3}}{2}} \cap Q^1_{\eta_{1,4}}$ та числа $\eta_{1,5}$ визначимо множини $U^2_{\eta_{1,5}}(x,t) \stackrel{def}{=} \{(y,\tau) \in Q^2_{\eta_{1,3}} : ||x-y|| \le \eta_{1,5},\ |t-\tau| \le \eta^2_{1,5}\}$. Подібно, як і в попередньому випадку, можна показати, що $m(U^2_{\eta_{1,5}}(x,t)) = 2\sigma_n \cdot \eta^{n+2}_{1,5}$, де σ_n – площа поверхні сфери одиничного радіуса в $\mathbb{R}^n$. Якщо вибрати $\eta_{1,5} < \min\{\frac{\eta_{1,3}}{2}; (\frac{\delta_0}{2\sigma_n})^{\frac{1}{n+2}}\}$, то $m(U^2_{\eta_{1,5}}(x,t)) < \delta_0$. Тоді з леми 6 для довільних $(x,t) \in Q^1_{\frac{\eta_{1,3}}{2}} \cap Q^1_{\eta_{1,4}}$ та $(z,z_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$ таких, що $(x+z,t+z_0) \in Q^1$ випливає

$$\int\limits_{U^2_{\eta_{1,5}}(x,t)} |\widehat{g}'_{12}(x,t;y,\tau)|\, dy d\tau < \frac{\varepsilon}{72}; \quad \int\limits_{U^2_{\eta_{1,5}}(x,t)} |\widehat{g}'_{12}(x+z,t+z_0;y,\tau)|\, dy d\tau < \frac{\varepsilon}{72}. \quad (20)$$

Виберемо $\delta_{1,4} < \min\{\delta_0; \frac{\eta_{1,5}}{2}\}$. Функція $\widehat{g}_1(x,t;y,\tau)$ рівномірно неперервна в області $V_2 = \{(x,t;y,\tau) : (x,t) \in \overline{Q^1_{\frac{\eta_{1,3}}{4}} \cap Q^1_{\eta_{1,4}}},\ (y,\tau) \in \overline{Q^2_{\eta_{1,3}} \setminus U^2_{\eta_{1,5}}(x,t)}\}$. Тоді існує $\delta_{1,5} = \delta_{1,5}(\varepsilon) \in (0,\delta_{1,4}]$ таке, що для довільних $(z,z_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $||z|| < \delta_{1,5}$, $|z_0| < \delta_{1,5}$, $(x,t) \in \overline{Q^1_{\frac{\eta_{1,3}}{2}} \cap Q^1_{\eta_{1,4}}} \subset \overline{Q^1_{\frac{\eta_{1,3}}{4}} \cap Q^1_{\eta_{1,4}}}$, $(y,\tau) \in \overline{Q^2_{\eta_{1,3}} \setminus U^2_{\eta_{1,5}}(x,t)}$ при $\mu\beta_0 + 2\gamma > -2$, виконується $|\widehat{g}_1(x+z,t+z_0;y,\tau) - \widehat{g}_1(x,t;y,\tau)| < \frac{\varepsilon}{72A^1_3}$, де $A^1_3 = \int\limits_{Q^2_{\eta_{1,3}} \setminus U^2_{\eta_{1,5}}(x,t)} (\widetilde{C}''_2)^{\beta_0}[\varrho_2(\tau)]^{\frac{\mu\beta_0}{2}}\tau^{\gamma}\, dy d\tau$, а тоді

$$\int\limits_{Q^2_{\eta_{1,3}} \setminus U^2_{\eta_{1,5}}(x,t)} |\widehat{g}'_{12}(x+z,t+z_0;y,\tau) - \widehat{g}'_{12}(x,t;y,\tau)|\, dy d\tau \le \frac{\varepsilon}{72}. \quad (21)$$

Отже, при $(x,t) \in Q^1_{\frac{\eta_{1,3}}{2}} \cap Q^1_{\eta_{1,4}}$ із (20), (21) одержуємо: існує $\delta_{1,5} = \delta_{1,5}(\varepsilon) > 0$ таке, що для довільних $(z,z_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $||z|| < \delta_{1,5}$, $|z_0| < \delta_{1,5}$
$\mathcal{I}^1_{122}(x,t;z,z_0) = \int\limits_{Q^2_{\eta_{1,3}}} |\widehat{g}'_{12}(x+z,t+z_0;y,\tau) - \widehat{g}'_{12}(x,t;y,\tau)|\, dy d\tau \le$

$\leq \int\limits_{U^2_{\eta_{1,5}}(x,t)} |\widehat{g}'_{12}(x,t;y,\tau)|\,dyd\tau + \int\limits_{U^2_{\eta_{1,5}}(x,t)} |\widehat{g}'_{12}(x+z,t+z_0;y,\tau)|\,dyd\tau +$

$+ \int\limits_{Q^2_{\eta_{1,3}}\setminus U^2_{\eta_{1,5}}(x,t)} |\widehat{g}'_{12}(x+z,t+z_0;y,\tau) - \widehat{g}'_{12}(x,t;y,\tau)|\,dyd\tau < \frac{\varepsilon}{24}$, а отже,

$\sup\limits_{\overline{(x,t)\in Q^1_{\frac{\eta_{1,3}}{2}}\cap Q^1_{\eta_{1,4}}}} \mathfrak{I}^1_{122}(x,t;z,z_0) < \frac{\varepsilon}{24}.$

При $(x,t) \in \overline{Q^1_{\frac{\eta_{1,3}}{2}} \setminus Q^1_{\eta_{1,4}}}$, $(z,z_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $||z|| \leq \delta_{1,4}(< \frac{1}{4}\eta_{1,3})$, $|z_0| \leq \delta_{1,4}$ $(< \frac{1}{4}\eta_{1,3})$, маємо $(x+z,t+z_0) \in Q^1_{\frac{\eta_{1,3}}{4}}$. При $(x,t) \in \overline{Q^1_{\frac{\eta_{1,3}}{4}} \setminus Q^1_{\eta_{1,4}}}$, $(y,\tau) \in Q^2_{\eta_{1,3}}$, $(x,t) \neq (y,\tau)$, тому функція $\widehat{g}_1(x,t;y,\tau)$ – рівномірно неперервна в $V_3 = \{(x,t;y,\tau) : (x,t) \in \overline{Q^1_{\frac{\eta_{1,3}}{4}} \setminus Q^1_{\eta_{1,4}}}, (y,\tau) \in \overline{Q^2_{\eta_{1,3}}}\}$. Тоді існує $\delta_{1,6} = \delta_{1,6}(\varepsilon) \in (0,\delta_{1,4}]$ таке, що для довільних $(z,z_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $||z|| < \delta_{1,6}$, $|z_0| < \delta_{1,6}$, $(x,t) \in \overline{Q^1_{\frac{\eta_{1,3}}{2}} \setminus Q^1_{\eta_{1,4}}} \subset \overline{Q^1_{\frac{\eta_{1,3}}{4}} \setminus Q^1_{\eta_{1,4}}}$, $(y,\tau) \in \overline{Q^2_{\eta_{1,3}}}$ при $\mu\beta_0 + 2\gamma > -2$, виконується $|\widehat{g}_1(x+z,t+z_0;y,\tau) - \widehat{g}_1(x,t;y,\tau)| < \frac{\varepsilon}{72A^1_4}$, де

$A^1_4 = \int\limits_{Q^2_{\eta_{1,3}}} (\widetilde{C}''_2)^{\beta_0}[\varrho_2(\tau)]^{\frac{\mu\beta_0}{2}}\tau^{\gamma}\,dyd\tau$, а тоді

$\sup\limits_{\overline{(x,t)\in Q^1_{\frac{\eta_{1,3}}{2}}\setminus Q^1_{\eta_{1,4}}}} \int\limits_{Q^2_{\eta_{1,3}}} |\widehat{g}'_{12}(x+z,t+z_0;y,\tau) - \widehat{g}'_{12}(x,t;y,\tau)|\,dyd\tau \leq \frac{\varepsilon}{72}.$

При $(x,t) \in \overline{Q^1 \setminus Q^1_{\frac{\eta_{1,3}}{2}}}$, $(z,z_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $||z|| \leq \delta_{1,4}(< \frac{\eta_{1,3}}{4})$, $|z_0| \leq \delta_{1,4}(< \frac{\eta_{1,3}}{4})$ буде $(x+z,t+z_0) \in Q^1 \setminus Q^1_{\frac{3\eta_{1,3}}{4}} \subset Q^1$, або $(x+z,t+z_0) \notin Q^1$. При $(x,t) \in \overline{Q^1 \setminus Q^1_{\frac{3\eta_{1,3}}{4}}}$, $(y,\tau) \in Q^2_{\eta_{1,3}}$, $||x-y|| \geq \frac{\eta_{1,3}}{4}$, $|t-\tau| \geq \eta^2_{1,3}(1-(\frac{3}{4})^2)$, а тоді $(x,t) \neq (y,\tau)$. Тому за рівномірною неперервністю функції $\widehat{g}_1(x,t;y,\tau)$ на замкненій множині $V_4 = \overline{(Q^1 \setminus Q^1_{\frac{3\eta_{1,3}}{4}})} \times \overline{Q^2_{\eta_{1,3}}}$, враховуючи, що $-\mu \geq 0$, $[\varrho_1(x)]^{-\mu} \leq 1$, одержуємо: існує $\delta_{1,7} = \delta_{1,7}(\varepsilon) \in (0,\delta_{1,4}]$ таке, що для довільних $(x,t) \in \overline{(Q^1 \setminus Q^1_{\frac{\eta_{1,3}}{2}})} \subset \overline{(Q^1 \setminus Q^1_{\frac{3\eta_{1,3}}{4}})}$, $(y,\tau) \in \overline{Q^2_{\eta_{1,3}}}$ $(z,z_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $||z|| < \delta_{1,7}$, $|z_0| < \delta_{1,7}$, виконується $|\widehat{g}_1(x+z,t+z_0;y,\tau) - \widehat{g}_1(x,t;y,\tau)| < \frac{\varepsilon}{24A^1_4}$, звідки

$\sup\limits_{\substack{\overline{(x,t)\in Q^1\setminus Q^1_{\frac{\eta_{1,3}}{2}}} \\ (x+z,t+z_0)\in Q^1}} \mathfrak{I}^1_{122}(x,t;z,z_0) < \frac{\varepsilon}{24A^1_4} \int\limits_{Q^2_{\eta_{1,3}}} (\widetilde{C}''_2)^{\beta_0}[\varrho_2(\tau)]^{\frac{\mu\beta_0}{2}}\tau^{\gamma}\,dyd\tau = \frac{\varepsilon}{24}.$

Для тих точок $(x,t) \in \overline{Q^1 \setminus Q^1_{\frac{\eta_{1,3}}{2}}}$, $(y,\tau) \in Q^2_{\eta_{1,3}}$, $(z,z_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $||z|| < \delta_{1,4}$, $|z_0| < \delta_{1,4}$, для яких $(x+z,t+z_0) \notin Q^1$, матимемо

$\sup\limits_{\substack{\overline{(x,t)\in Q^1\setminus Q^1_{\frac{\eta_{1,3}}{2}}} \\ (x+z,t+z_0)\notin Q^1}} \mathfrak{I}^1_{122}(x,t;z,z_0) \leq \sup\limits_{\substack{\overline{(x,t)\in Q^1\setminus Q^1_{\frac{\eta_{1,3}}{2}}} \\ (x+z,t+z_0)\notin Q^1}} \int\limits_{Q^2_{\eta_{1,3}}} |\widehat{g}_1(x,t;y,\tau)|(\widetilde{C}''_2)^{\beta_0}\eta_{1,3}^{\frac{\mu\beta_0}{2}}\tau^{\gamma}\,dyd\tau \leq$

$\leq \widehat{C}'_0(\widetilde{C}''_2)^{\beta_0}\eta_{1,3}^{\frac{\mu\beta_0}{2}+\gamma-\mu} \leq \frac{\varepsilon}{24}$, де остання нерівність виконується згідно з вибором числа $\eta_{1,3}$. Зауважимо, що при $\mu < \frac{2\gamma}{1-\beta_0}$ також $\frac{\mu\beta_0}{2} + \gamma - \mu > 0$.

Показано існування $\widetilde{\delta_2} = \min\{\delta_{1,5};\delta_{1,6};\delta_{1,7}\} > 0$ такого, що для довільних $(x,t) \in \overline{Q^1}$, $(z,z_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $||z|| < \widetilde{\delta_2}$, $|z_0| < \widetilde{\delta_2}$ $\mathfrak{I}^1_{12}(x,t;z,z_0) < \frac{\varepsilon}{12}$.

I₃. Розглянемо для довільних $(x,t) \in \overline{Q^1}$

$\mathfrak{I}^1_{13}(x,t;z,z_0) = \widetilde{A}_2 \int\limits_{Q^3} |\widehat{g}_1(x+z,t+z_0;y,\tau) - \widehat{g}_1(x,t;y,\tau)|\,dyd\tau$, де $\widetilde{A}_2 = (\widetilde{C}''_3)^{\beta_0}(\frac{\varepsilon_0}{2})^{\gamma}$.

За заданим $\delta_0 > 0$ вибираємо число $\eta_{1,6} < \frac{\varepsilon_0}{2}$ таке, щоб $m(Q^1 \backslash Q^1_{\frac{\eta_{1,6}}{2}}) \le \delta_0$. Тоді $\sup\limits_{(x,t)\in\overline{Q^1}} \mathcal{I}^1_{13}(x,t;z,z_0) = \max\{ \sup\limits_{(x,t)\in\overline{Q^1_{\frac{\eta_{1,6}}{2}}}} \mathcal{I}^1_{13}(x,t;z,z_0); \sup\limits_{(x,t)\in\overline{Q^1\backslash Q^1_{\frac{\eta_{1,6}}{2}}}} \mathcal{I}^1_{13}(x,t;z,z_0)\}$.

Вибираємо також $\eta_{1,6} < \left(\frac{\varepsilon}{12\widetilde{A}_2\widetilde{C}'_0}\right)^{-\frac{1}{\mu}}$.

Розглянемо для довільних $(x,t) \in \overline{Q^1_{\frac{\eta_{1,6}}{2}}}$ інтеграл $\mathcal{I}^1_{13}(x,t;z,z_0)$.

Виберемо $\delta_{1,8} < \min\{\delta_0, \frac{\eta_{1,6}}{4}\}$. При $(x,t) \in \overline{Q^1_{\frac{\eta_{1,6}}{2}}}$, $(z,z_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $||z|| \le \delta_{1,8}$ $(< \frac{\eta_{1,6}}{4})$, $|z_0| \le \delta_{1,8} (< \frac{\eta_{1,6}}{4})$ маємо $(x+z, t+z_0) \in \overline{Q^1_{\frac{\eta_{1,6}}{4}}} \subset Q^1$. Функція $\widehat{g}_1(x,t;y,\tau)$ – рівномірно неперервна в області $V_5 = \{(x,t;y,\tau) : (x,t) \in \overline{Q^1_{\frac{\eta_{1,6}}{4}}}, (y,\tau) \in \overline{Q^3}\}$. Тому існує $\delta_{1,9} = \delta_{1,9}(\varepsilon) \in (0, \delta_{1,8}]$ таке, що для довільних $(x,t) \in \overline{Q^1_{\frac{\eta_{1,6}}{2}}} \subset \overline{Q^1_{\frac{\eta_{1,6}}{4}}}$, $(y,\tau) \in \overline{Q^3}$, $(z,z_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $||z|| < \delta_{1,9}$, $|z_0| < \delta_{1,9}$
$|\widehat{g}_1(x+z,t+z_0;y,\tau) - \widehat{g}_1(x,t;y,\tau)| < \frac{\varepsilon}{12m(Q)\widetilde{A}_2}$, а тоді

$$\sup\limits_{(x,t)\in\overline{Q^1_{\frac{\eta_{1,6}}{2}}}} \widetilde{A}_2 \int\limits_{Q^3} |\widehat{g}_1(x+z,t+z_0;y,\tau) - \widehat{g}_1(x,t;y,\tau)|\, dyd\tau \le \frac{\varepsilon\cdot\widetilde{A}_2}{12m(Q)\widetilde{A}_2} \int\limits_{Q^3} dyd\tau \le \frac{\varepsilon}{12}.$$

Розглянемо для довільних $(x,t) \in \overline{Q^1 \setminus Q^1_{\frac{\eta_{1,6}}{2}}}$
$\widetilde{A}_2 \int\limits_{Q^3} |\widehat{g}_1(x+z,t+z_0;y,\tau) - \widehat{g}_1(x,t;y,\tau)|\, dyd\tau = \mathcal{I}_{131}(x,t;z,z_0) + \mathcal{I}_{132}(x,t;z,z_0)$, де в $\mathcal{I}_{131}(x,t;z,z_0)$ інтегрування є за $Q^3_{\eta_{1,6}}$, в $\mathcal{I}_{132}(x,t;z,z_0)$ – за $Q^3 \backslash Q^3_{\eta_{1,6}}$, $Q^3_{\eta_{1,6}}$ – підобласть області Q^3 така, що відстань від довільної точки $(y,\tau) \in Q^3$ до межі області Q^3 більша або рівна $\eta_{1,6}$. За заданим $\delta_0 > 0$ вибираємо число $\eta_{1,6} < \frac{\varepsilon_0}{2}$ таке, щоб $m(Q^3 \setminus Q^3_{\eta_{1,6}}) \le \delta_0$.

За рівномірною неперервністю функції $\widehat{g}_1(x,t;y,\tau)$ в області $V_6 = \{(x,t;y,\tau) : (x,t) \in \overline{Q^1 \setminus Q^1_{\frac{3\eta_{1,6}}{4}}}, (y,\tau) \in \overline{Q^3_{\eta_{1,6}}}\}$ одержуємо: існує $\delta_{1,10} = \delta_{1,10}(\varepsilon) \in (0, \delta_{1,8}]$ таке, що для довільних $(x,t) \in \overline{Q^1 \setminus Q^1_{\frac{\eta_{1,6}}{2}}} \subset \overline{Q^1 \setminus Q^1_{\frac{3\eta_{1,6}}{4}}}$, $(y,\tau) \in \overline{Q^3_{\eta_{1,6}}}$, $(z,z_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $||z|| < \delta_{1,10}$, $|z_0| < \delta_{1,10}$, виконується
$|\widehat{g}_1(x+z,t+z_0;y,\tau) - \widehat{g}_1(x,t;y,\tau)| < \frac{\varepsilon}{12m(Q)\widetilde{A}_2}$, а тоді

$$\sup\limits_{(x,t)\in\overline{Q^1\backslash Q^1_{\frac{\eta_{1,6}}{2}}}} \mathcal{I}_{131}(x,t;z,z_0) \le \frac{\varepsilon}{12m(Q)\widetilde{A}_2} \cdot \widetilde{A}_2 \int\limits_{Q^3_{\eta_{1,6}}} dyd\tau \le \frac{\varepsilon}{12}.$$

За лемою 3 (враховуючи, що $-\mu \ge 0$, $[\varrho_1(x)]^{-\mu} \le 1$) існує $\delta_0 = \delta_0(\varepsilon) > 0$, існує відповідне $\eta_{1,6}$ такі, що для довільних $(x,t) \in \overline{Q^1 \setminus Q^1_{\frac{\eta_{1,6}}{2}}}$ та $(z,z_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$ таких, що $(x+z,t+z_0) \in Q^1$ матимемо

$$\sup\limits_{(x,t)\in\overline{Q^1\backslash Q^1_{\frac{\eta_{1,6}}{2}}}} \mathcal{I}_{132}(x,t;z,z_0) \le \widetilde{A}_2 \sup\limits_{(x,t)\in\overline{Q^1\backslash Q^1_{\frac{\eta_{1,6}}{2}}}} \Bigg(\int\limits_{Q^3\backslash Q^3_{\eta_{1,6}}} |\widehat{g}_1(x+z,t+z_0;y,\tau)|\, dyd\tau +$$
$$+ \int\limits_{Q^3\backslash Q^3_{\eta_{1,6}}} |\widehat{g}_1(x,t;y,\tau)|)\, dyd\tau\Bigg) \le \frac{\varepsilon}{12\widetilde{A}_2} \cdot \widetilde{A}_2 \le \frac{\varepsilon}{12}.$$

При $(x,t) \in \overline{Q^1 \setminus Q^1_{\frac{\eta_{1,6}}{2}}}$, $(y,\tau) \in \overline{Q^3}$, $(z,z_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $||z|| < \delta_{1,8}$, $|z_0| < \delta_{1,8}$, для яких $(x+z,t+z_0) \notin Q^1$, з використанням леми 1 матимемо

$$\sup_{\substack{(x,t)\in\overline{Q^1\setminus Q^1_{\eta_{1,6}}}\\(x+z,t+z_0)\notin Q^1}} \mathcal{I}^1_{13}(x,t;z,z_0) \le \widetilde{A}_2\eta_{1,6}^{-\mu} \sup_{\substack{(x,t)\in\overline{Q^1\setminus Q^1_{\eta_{1,6}}}\\(x+z,t+z_0)\notin Q^1}} \int\limits_{Q^3} |G(x,t;y,\tau)|\,dyd\tau \le \widetilde{C}'_0\cdot\widetilde{A}_2\cdot\eta_{1,6}^{-\mu} \le \tfrac{\varepsilon}{12},$$

де остання нерівність виконується згідно з вибором числа $\eta_{1,6}$.

Показано, що існує $\widetilde{\delta_3} = \min\{\delta_{1,9};\delta_{1,10}\} > 0$ таке, що для довільних $(x,t)\in\overline{Q^1}$, $(z,z_0)\in\mathbb{R}^{n+1}$, $||z||<\widetilde{\delta_3}$, $|z_0|<\widetilde{\delta_3}$ $\quad\mathcal{I}^1_{13}(x,t;z,z_0)<\frac{\varepsilon}{12}$.

Розглянемо

$$\mathcal{I}^1_2(x,t;z,z_0) = [\varrho_1(x+z)]^{-\mu}\int\limits_t^{t+z_0} d\tau\int\limits_\Omega |G(x+z,t+z_0;y,\tau)|\cdot|f_0(y,\tau,\mathrm{v}(y,\tau))|\,dy.$$

Проводячи подібні міркування та враховуючи, що $m(\Omega\times(t,t+z_0)) = m(\Omega)\cdot|z_0|$, за лемою 6 одержуємо: існує $\widetilde{\delta_4}=\widetilde{\delta_4}(\varepsilon)>0$ таке, що для довільних $(z,z_0)\in\mathbb{R}^{n+1}$, $||z||<\widetilde{\delta_4}$, $|z_0|<\widetilde{\delta_4}$ та довільних $\mathrm{v}\in\mathcal{M}_{\mu,\widetilde{C}}(Q,\,\partial Q)$ $\quad\sup\limits_{(x,t)\in\overline{Q^1}}\mathcal{I}^1_2(x,t;z,z_0)<\frac{\varepsilon}{4}$.

Отже, існує $\widehat{\delta_1}=\min\{\widetilde{\delta_1};\widetilde{\delta_2};\widetilde{\delta_3};\widetilde{\delta_4}\}>0$ таке, що для довільних $(z,z_0)\in\mathbb{R}^{n+1}$, $||z||<\widehat{\delta_1}$, $|z_0|<\widehat{\delta_1}$ виконується $\quad\sup\limits_{(x,t)\in\overline{Q^1}}\mathcal{I}^1(x,t;z,z_0)<\frac{\varepsilon}{2}$.

Подібно проводимо оцінки інтегралів при $(x,t)\in\overline{Q^2}$ та $(x,t)\in\overline{Q^3}$ і доводимо існування $\widehat{\delta_2},\ \widehat{\delta_3}>0$ таких, що для довільних $(z,z_0)\in\mathbb{R}^{n+1}$, $||z||<\min\{\widehat{\delta_2};\ \widehat{\delta_3}\}$, $|z_0|<\min\{\widehat{\delta_2};\ \widehat{\delta_3}\}$ виконується $\sup\limits_{(x,t)\in\overline{Q^2}}\mathcal{I}^2(x,t;z,z_0)<\frac{\varepsilon}{2}$ та $\sup\limits_{(x,t)\in\overline{Q^3}}\mathcal{I}^3(x,t;z,z_0)<\frac{\varepsilon}{2}$.

Зауважимо, що при оцінюванні інтеграла $\mathcal{I}^2$, коли $(x,t)\in\overline{Q^2}$, $(y,\tau)\in Q^1$ виникає додаткова умова $\mu\beta_0-\frac{\mu}{2}>0$, а коли $(x,t)\in\overline{Q^2}$, $(y,\tau)\in Q^2$ – умова $\frac{\mu\beta_0}{2}+\gamma-\frac{\mu}{2}>0$.

Отже, множина $\{H_1\mathrm{v}:\mathrm{v}\in\mathcal{M}_{\mu,\widetilde{C}}(Q,\,\partial Q)\}$ – одностайно неперервна. Таким чином, оператор H_1 є компактним на $\mathcal{M}_{\mu,\widetilde{C}}(Q,\,\partial Q)$.

Покажемо, що H_1 – неперервний оператор на $\mathcal{M}_{\mu,\widetilde{C}}(Q,\,\partial Q)$.

Знайдемо оцінку $H_1\mathrm{v}-H_1\mathrm{w}$ при $\mathrm{v},\,\mathrm{w}\in\mathcal{M}_{\mu,\widetilde{C}}(Q,\,\partial Q)$. Маємо

$|H_1\mathrm{v}-H_1\mathrm{w}|\le\int\limits_0^t d\tau\int\limits_\Omega |G(x,t;y,\tau)|\cdot||\mathrm{v}(y,\tau)|^{\beta_0}-|\mathrm{w}(y,\tau)|^{\beta_0}|\cdot\tau^\gamma\,dy$. Використовуючи лему 1 при $\mu\beta_0>-1$, $\mu\beta_0+2\gamma>-2$, знаходимо

$$\int\limits_0^t d\tau\int\limits_\Omega |G(x,t;y,\tau)|\cdot||\mathrm{v}(y,\tau)|^{\beta_0}-|\mathrm{w}(y,\tau)|^{\beta_0}|\tau^\gamma\,dy \le \int\limits_0^t d\tau\int\limits_\Omega[\varrho_1(y)]^{\mu\beta_0}|G(x,t;y,\tau)|\times$$

$$\times\Big(\sup_{(y,\tau)\in\overline{Q^1}}[\varrho_1(y)]^{-\mu}||\mathrm{v}(y,\tau)|-|\mathrm{w}(y,\tau)||\Big)^{\beta_0}\tau^\gamma\,dy \le ||\mathrm{v}-\mathrm{w};\,\partial Q||_\mu^{\beta_0}\int\limits_0^t d\tau\int\limits_\Omega[\varrho_1(y)]^{\mu\beta_0}\times$$

$$\times|G(x,t;y,\tau)|\tau^\gamma\,dy\le||\mathrm{v}-\mathrm{w};\,\partial Q||_\mu^{\beta_0}\widetilde{C}'_{\mu\beta_0}\Big([\varrho_1(x)]^{\mu\beta_0+1-n}+1\Big),\ (x,t)\in Q^1;$$

$$\int\limits_0^t d\tau\int\limits_\Omega |G(x,t;y,\tau)|\cdot||\mathrm{v}(y,\tau)|^{\beta_0}-|\mathrm{w}(y,\tau)|^{\beta_0}|\tau^\gamma\,dy \le \int\limits_0^t d\tau\int\limits_\Omega[\varrho_2(\tau)]^{\frac{\mu\beta_0}{2}}|G(x,t;y,\tau)|\times$$

$$\times\Big(\sup_{(y,\tau)\in\overline{Q^2}}[\varrho_2(\tau)]^{-\frac{\mu}{2}}||\mathrm{v}(y,\tau)|-|\mathrm{w}(y,\tau)||\Big)^{\beta_0}\tau^\gamma\,dy\le$$

$$\le||\mathrm{v}-\mathrm{w};\,\partial Q||_\mu^{\beta_0}\widetilde{C}'_{\frac{\mu\beta_0}{2}}\Big([\varrho_2(t)]^{\frac{\mu\beta_0+2\gamma+2-n}{2}}+1\Big),\ (x,t)\in Q^2;$$

$$\int\limits_0^t d\tau\int\limits_\Omega |G(x,t;y,\tau)|\cdot||\mathrm{v}(y,\tau)|^{\beta_0}-|\mathrm{w}(y,\tau)|^{\beta_0}|\cdot\tau^\gamma\,dy \le \int\limits_0^t d\tau\int\limits_\Omega|G(x,t;y,\tau)|\times$$

$$\times\Big(\sup_{(y,\tau)\in\overline{Q^3}}|\mathrm{v}(y,\tau)-\mathrm{w}(y,\tau)|\Big)^{\beta_0}\cdot\tau^\gamma\,dy\le\widetilde{C}'_0||\mathrm{v}-\mathrm{w};\,\partial Q||_\mu^{\beta_0},\ (x,t)\in Q^3.$$

При $\mathrm{v},\,\mathrm{w}\in\mathcal{M}_{\mu,\widetilde{C}}(Q,\,\partial Q)$ одержуємо

$$||H_1\mathrm{v}-H_1\mathrm{w};\,\partial Q||_{\mu}=\max\{\sup_{(x,t)\in\overline{Q^1}}[\varrho_1(x)]^{-\mu}|H_1\mathrm{v}-H_1\mathrm{w}|;\ \sup_{(x,t)\in\overline{Q^2}}[\varrho_2(t)]^{-\frac{\mu}{2}}|H_1\mathrm{v}-H_1\mathrm{w}|;$$
$$\sup_{(x,t)\in\overline{Q^3}}|H_1\mathrm{v}-H_1\mathrm{w}|\}\le||\mathrm{v}-\mathrm{w};\,\partial Q||_{\mu}^{\beta_0}\max\{\sup_{(x,t)\in\overline{Q^1}}\widetilde{C}'_{\mu\beta_0}\Big([\varrho_1(x)]^{\mu(\beta_0-1)+1-n}+[\varrho_1(x)]^{-\mu}\Big);$$
$$\sup_{(x,t)\in\overline{Q^2}}\widetilde{C}'_{\frac{\mu\beta_0}{2}}\Big([\varrho_2(t)]^{\frac{\mu(\beta_0-1)+2\gamma+2-n}{2}}+[\varrho_2(t)]^{-\frac{\mu}{2}}\Big);\ \widetilde{C}'_0\}.$$

Звідси, враховуючи умови на μ випливає, що H_1 неперервний оператор в $\mathcal{M}_{\mu,\widetilde{C}}(Q,\,\partial Q)$. За теоремою Шаудера та за умов лем 4, 5, 6, рівняння (5) має розв'язок $u\in\mathcal{M}_{\mu}(Q,\,\partial Q)$.

З нерівності на μ, одержуємо умови $\max\{q_1,\,q_2-1\}<\frac{1}{\beta_0}-n-1$, $\max\{q_1,\,q_2-1\}<\frac{2(\gamma+1)}{\beta_0}-n-1$, які зв'язують порядки сингулярностей крайових, початкової функцій із виглядом функції у правій частині рівняння (2).

Висновок. У статті розглянуто крайову задачу для рівняння $\frac{\partial u}{\partial t}-\triangle u=|u|^{\beta_0}t^{\gamma}$, де $\beta_0\in(0,1)$, $\gamma\in(-1,0)$, коли задані на межі функції є узагальненими з просторів типу D'. Використовуючи властивості функції Ґріна цієї задачі та теорему Шаудера про нерухому точку, встановлено характер поведінки розв'язку цієї задачі біля межі області.

Список використаної літератури

1. *Лопушанська Г.П.* Крайові задачі у просторі узагальнених функцій D'. – Л.: Вид-во Львів. нац. ун-ту ім. І. Франка, 2002. – 285 с.
2. *Лопушанська Г. П.* Про розв'язок параболічної граничної задачі із сильними степеневими особливостями в правих частинах // Математичні Студії. – 2001. – **15**, № 2. – С. 179–190.
3. *Чмир О.Ю.* Про формулювання узагальненої крайової задачі для півлінійного параболічного рівняння // Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2003. – Вип. 62. – С. 134–143.
4. *Lopushanska H.* Solutions with strong power singularities to nonlinear elliptic boundary value problems // Матем. вісник НТШ. – 2006. – Т. 3. – С. 247–260.
5. *Лопушанська Г.П., Чмир О.Ю.* Узагальнені крайові значення розв'язків рівняння $u_t=\triangle u+F_0(x,t,u)$ // Математичні Студії. – 2004. – **22**, № 1. – С. 45–56.
6. *Sun Ren-bin.* Local existence and blow-up for degenerate parabolic systems // J. Xiamen Univ. Natur. Sci. – 2003. – **42**, № 2. – p. 148–149.
7. *Duan Zhi-wen, Zhou Li.* Global and blow-up solutions for non-linear degenerate parabolic system // Math. Meth. Appl. Sci. – 2003. – **26**, № 7. – p. 557–587.
8. *Boccardo L., Gallouët Th.* Non-linear elliptic and parabolic equations involving measure data//J. Funct. Anal. – 1989. – Vol. 87. – p. 149–169.
9. *Шилов Г.Е.* Математический анализ. – М.: Наука. – 1965. – 328 с.
10. *Ивасишен С.Д.* Матрицы Грина параболических граничных задач. – К.: Выща школа. – 1990. – 200 с.
11. *Эйдельман С.Д.* Параболические системы. – М.: Наука. – 1964. – 443с.
12. *Ивасишен С.Д.* О композиции параболических ядер // Укр. мат. журн. – 1980. – **32**, № 1. – С. 35–45.
13. *Лопушанська Г.П., Чмир О.Ю.* Про деякі властивості спряжених операторів Ґріна параболічної крайової задачі // Наук. вісник Чернів. ун-ту: зб. наук. пр. Математика. Чернівці ЧДУ. – 2004. – Вип. 191-192. – С. 82–88.
14. *Люстерник Л.А., Соболев В.И.* Элементы функционального анализа. – М.: Наука, 1965. – 520 с.

Одержано 25.03.2015