УДК 519.21, 519.718

**В. К. Ясинський, Т. О. Лукашів** (Чернівецький нац. ун-т)

# ПРО СТОХАСТИЧНУ СТІЙКІСТЬ НЕЛІНІЙНИХ СИСТЕМ ІТО-СКОРОХОДА З ЗАГАЮВАННЯМИ

We obtain the sufficient contitions of the asymptotic uniformely stochastic stability of a trivial solution of the Cauchy problem for the stochastic differential-difference Ito-Skorokhod equation with many constant delays.

Одержано достатні умови асимптотичної рівномірно стохастичної стійкості тривіального розв'язку задачі Коші для стохастичного диференціально-різницевого рівняння Іто-Скорохода з багатьма сталими загаюваннями.

**1. Вступ.** Питання вивчення асимптотичної рівномірно стохастичної стійкості вивчено у монографії Скорохода А.В., Гіхмана Й.І. [1]. Для стохастичних диференціаль-но-функціональних рівнянь це питання вивчалося Царковим Є.Ф. [2]. У даній роботі розглянуто більш широкий клас стохастичних систем Іто-Скорохода.

**2. Постановка задачі.** Нехай на ймовірнісному базисі $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{F} := \{\mathfrak{F}_t, t \geq t_0\}, \mathbf{P})$ задано випадковий процес $x(t) \in \mathbf{R}^n$ для $t \geq t_0 \geq 0$, як розв'язок системи стохастичних диференціально-різницевих рівнянь з пуассоновими перемиканнями і з багатьма сталими загаюваннями [1]

$$dx(t) = \sum_{i=1}^{k} a_i(t, x(t), x(t-\Delta_i))dt+$$

$$+\sum_{j=1}^{l} \left[ b_j(t, x(t), x(t-\Delta_j))dw_j(t) + \int\limits_U c_j(t, x(t), x(t-\Delta_j), u)\widetilde{\nu_j}(du, dt) \right], \forall t \geq t_0, \tag{1}$$

з початковими умовами

$$x(t)|_{t\in[-\Delta,0]} = \varphi(t,\omega) \in \mathbf{D}, \tag{2}$$

де $\Delta \equiv \sup\limits_{i,j}(\Delta_i, \Delta_j)$, $i = \overline{1,k}, j = \overline{1,l}$; коефіцієнти $a_i : \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$, $b_j : \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \to M_n(\mathbf{R}^n)$ – $n \times n$ - матриця, $c_j : \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \times U \to \mathbf{R}^n$ неперервні за всіма аргументами; $w_j(t) \equiv w_j(t,\omega) \in \mathbf{R}^n$ – попарно-незалежні вінерові процеси; $\widetilde{\nu_j}(du, dt) \equiv \nu_j(du, dt) - dt\Pi(du)$ – скалярні попарно-незалежні центровані пуассонові міри, $t\Pi(A) = \int\limits_A \frac{dudt}{|u|^{n+1}} < \infty$ [3], [4], причому $w_i$ та $\widetilde{\nu}_j$ – попарно-незалежні; $\mathbf{D} \equiv \mathbf{D}([-\Delta, 0], \mathbf{R}^n)$ – простір Скорохода неперервних справа функцій, які мають лівосторонні границі [3].

**Лема 1.** *[4] Нехай:*

1) *коефіцієнти системи (1) неперервні за всіма аргументами;*

*2) виконуються умови Ліпшиця за другим і третім аргументом:*

$$\sum_{i=1}^{k}\left|a_i(t,x^1,y^1)-a_i(t,x^2,y^2)\right|+\sum_{j=1}^{l}\left\|b_j(t,x^1,y^1)-b_j(t,x^2,y^2)\right\|+$$

$$+\int\limits_U\left|c_j(t,x^1,y^1,u)-c_j(t,x^2,y^2,u)\right|\Pi(du)\le L\left(|x^1-y^1|+|x^2-y^2|\right),$$

*де $L>0$ – дійсна стала, $\forall x^1,x^2,y^1,y^2\in\mathbf{D}$;*

*3) виконується умова рівномірної обмеженості за $t$.*

*Тоді:*

*1) задача Коші (1), (2) має єдиний з точністю до стохастичної еквівалентності розв'язок $x(t)\in\mathbf{R}^n$, $\forall t\in[0,T]$ в просторі Скорохода $\mathbf{D}$;*

*2) виконується оцінка*

$$\mathbf{E}\left\{\sup_{t_0\le t\le T}|x(t)|^2\right\}\le N\mathbf{E}\left\{\sup_{-\Delta+t_0\le t\le t_0}|\varphi(t)|^2\right\},$$

*стала $N$ не залежить від сталої Ліпшиця $L$ і $T>0$.*

Надалі вважатимемо, що $t_0=0$ і для існування тривіального розв'язку системи (1), (2)

$$a_i(t,0,0)\equiv 0; b_j(t,0,0)\equiv 0_{n\times n}; c_j(t,0,0,u)\equiv 0.$$

Вірне наступне твердження [4].

**Лема 2.** *Нехай:*

*1) задано невід'ємний випадковий процес $\xi(t)\equiv\xi(t,\omega)\in\mathbf{R}^n$ з простору Скорохода $\mathbf{D}$;*

*2) для довільного розбиття*

$$0=t_0<t_1<t_2<...<t_{n-1}<t_n=T$$

*та умовного математичного сподівання виконано нерівність*

$$\mathbf{E}\left\{\xi(t_n)|\sigma(\xi(t_0),\xi(t_1),...,\xi(t_{n-1}))\right\}\le\xi(t_{n-1}).$$

*Тоді для $\forall C>0$ має місце нерівність*

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{0\le t\le T}\xi(t)>C\right\}\le\frac{1}{C}\mathbf{E}\xi(0).$$

**3. Достатні умови асимптотичної рівномірно-стохастичної стійкості.** Будемо розглядати задачу стійкості тривіального розв'язку $x(t) \equiv 0$ системи (1), (2) у наступному сенсі [5] – [7].

**Означення 1.** *Тривіальний розв'язок $x(t) \equiv 0$ системи (1), (2) назвемо рівномірно стохастично стійким, якщо для $\forall \varepsilon_i > 0, i = 1, 2$ існує таке $\delta > 0$, що для*

$$\mathbf{E}\left\{\sup_{-\Delta \le t \le 0} |\varphi(t)|\right\} \le \delta, \tag{3}$$

*виконується нерівність $\mathbf{P}\{|x(t)| \le \varepsilon_2\} \ge 1 - \varepsilon_1, \forall t \in [0; T]$.*

**Означення 2.** *Тривіальний розв'язок задачі (1), (2) $x(t) \equiv 0$ асимптотично рівномірно стохастично стійкий, якщо він стохастично рівномірно стійкий (означення 1) та*

$$\mathbf{P}\left\{\lim_{t \to \infty} |x(t)| = 0\right\} = 1.$$

**Теорема 1.** *При виконанні умов леми 1 достатньою умовою асимптотичної рівномірно стохастичної стійкості тривіального розв'язку задачі Коші (1), (2) є виконання на розв'язках системи нерівності*

$$F(t, x(t), k, l) := 2\sum_{i=1}^{k} x'(t) a_i(t, x(t), x(t - \Delta_i)) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{l}\Big[Sp b_j(t, x(t), x(t - \Delta_j)) b'_j(t, x(t), x(t - \Delta_j)) +$$

$$+ \int_U |c_j(t, x(t), x(t - \Delta_j), u)|^2 \Pi(du)\Big] \le -f_\Delta(x_t), \tag{4}$$

*де $f : \mathbf{D} \to \mathbf{R}^1$ – додатно визначений неперервний та обмежений функціонал на відрізках траєкторії $x_t \equiv x(t + \theta)$, $-\Delta \le \theta \le 0$, $\Delta \equiv \sup\limits_{1 \le i \le k, 1 \le j \le l} \{\Delta_i, \Delta_j\}$, такий, що з $f(\varphi) \equiv 0$ випливає $\varphi(\theta) \equiv 0$; "штрих" – операція транспонування.*

***Доведення.*** Розглянемо новий випадковий процес як квадрат модуля розв'язку задачі (1), (2):

$$z(t) = |x(t)|^2 \equiv \sum_{i=1}^{n} x_i^2(t).$$

Диференціал $dz(t)$ за загальною заміною Іто [1], [4] буде мати вигляд

$$dz(t) = 2\sum_{i=1}^{k} x'(t) a_i(t, x(t), x(t - \Delta_i)) x(t) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{l} Sp b_j(t, x(t), x(t - \Delta_j)) b'(t, x(t), x(t - \Delta_j)) +$$

$$+\int\limits_U \Bigg[|x(t)+c_j(t,x(t),x(t-\Delta_j),u)|^2-$$

$$-|x(t)|^2-2(x(t)+c_j(t,x(t),x(t-\Delta_j),u))\Bigg]\Pi(du)+$$

$$+2x'(t)b(t,x(t),x(t-\Delta_j))dw_j(t)+$$

$$+\int\limits_U \left\{|x(t)+c_j(t,x(t),x(t-\Delta_j),u)|^2-|x(t)|^2\right\}\widetilde{\nu}(du,dt)=$$

$$=2\sum_{i=1}^{k} x'(t)a_i(t,x(t),x(t-\Delta_j))+$$

$$+\sum_{j=1}^{l}\Bigg[Spb_j(t,x(t),x(t-\Delta_j))b_j'(t,x(t),x(t-\Delta_j))+$$

$$+\int\limits_U |c_j(t,x(t),x(t-\Delta_j),u)|^2\Pi(du)\Bigg].$$

Перейдемо до інтегральної форми запису одержаного стохастичного диференціалу $dz(t)$ і використаємо умову (4), в результаті одержимо нерівність для $t\to\Delta$

$$z(t)\le|\varphi(0)|^2+2\sum_{i=1}^{k}\int\limits_{\Delta}^{t} x'(\tau)a_i(\tau,x(\tau),x(\tau-\Delta_i))d\tau+$$

$$+\sum_{j=1}^{l}\Bigg[\int\limits_{\Delta}^{t} Spb_j(\tau,x(\tau),x(\tau-\Delta_j))b_j'(\tau,x(\tau),x(\tau-\Delta_j))d\tau+$$

$$+\int\limits_{\Delta}\int\limits_U |c_j(\tau,x(\tau),x(\tau-\Delta_j),u)|^2\Pi(du)d\tau\Bigg]+$$

$$+2\sum_{j=1}^{l}\Bigg[\int\limits_{\Delta}^{t} x'(\tau)b_j(\tau,x(\tau),x(\tau-\Delta_j))dw_j+$$

$$+\int\limits_{\Delta}\int\limits_U x'(\tau)c_j(\tau,x(\tau),x(\tau-\Delta_j),u)\widetilde{\nu}_j(du,d\tau)+$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{\Delta}^{t}\int\limits_U |c_j(\tau,x(\tau),x(\tau-\Delta_j),u)|^2\widetilde{\nu}_j(du,d\tau)\Bigg]\le$$

$$\le|\varphi(0)|^2-\int\limits_{\Delta}^{t} f_\Delta(x_\tau)d\tau+\beta(t)+\gamma,$$

де відповідно позначено

$$\gamma \equiv 2\sum_{i=1}^{k}\left[\int_0^{\Delta} x'(\tau)a_i(\tau,x(\tau),x(\tau-\Delta_i))d\tau\right]+$$

$$+\sum_{j=1}^{l}\left[\int_0^{\Delta} Spb_j(\tau,x(\tau),x(\tau-\Delta_j))b_j'(\tau,x(\tau),x(\tau-\Delta_j))d\tau+\right.$$

$$\left.+\int_{\Delta}^{t}\int_U |c_j(\tau,x(\tau),x(\tau-\Delta_j),u)|^2\Pi(du)\right];$$

$$\beta(t) \equiv \sum_{j=1}^{l}\left[2\int_0^{t} x'(\tau)b_j(\tau,x(\tau),x(\tau-\Delta_j))dw_j(\tau)+\right.$$

$$+2\int_0^{t}\int_U x'(\tau)c_j(\tau,x(\tau),x(\tau-\Delta_j),u)\widetilde{\nu}_j(du,d\tau)+$$

$$\left.+\int_0^{t}\int_U |c_j(\tau,x(\tau),x(\tau-\Delta_j),u)|^2\widetilde{\nu}_j(du,d\tau)\right].$$

I) Доведемо спочатку рівномірно стохастичну стійкість тривіального розв'язку системи (1), (2). На інтервалі $[0,T]$ можна провести оцінку [2] для $\gamma$:

$$|\gamma| \le C_1 \sup_{0\le t\le\Delta}\left\{K_0|x(\tau)|^2 + L_0|x(\tau)||\varphi(\tau-\Delta)| + L_0|\varphi(\tau-\Delta)|^2\right\};$$

$$\mathbf{E}\left\{|\gamma|^2\right\} \le C_2 \sup_{0\le\tau\le\Delta}|\varphi(\tau)|;$$

де $C_1$ залежить від сталої Ліпшиця $L$, а $C_2$ – від сталої Ліпшиця $L$ та $K$.

Отже, $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta_1 \equiv \delta_1\left(\sup\limits_{0\le\tau\le\Delta}|\varphi(\tau)|^2\right) > 0$ таке, що $\mathbf{P}\left\{|\gamma| \le \frac{\varepsilon}{2}\right\} \ge 1 - \frac{2\delta_1}{\varepsilon}$. Оскільки $\beta(t)$ є мартингалом [1] на розв'язку, що задовольняє нерівність $|\beta(t)| > > |\varphi(0)|^2$, то $\forall t \in [0,T]$ за лемою 2 має місце нерівність

$$\frac{\varepsilon}{2} \le \mathbf{P}\left\{\sup_{t\in[0,T]}\left(|\beta(t)| + |\varphi(0)|^2\right) < \varepsilon\right\} \le \frac{2|\varphi(0)|^2}{\varepsilon}.$$

Враховуючи вище одержані оцінки, матимемо

$$\mathbf{P}\left\{\omega : \sup_{t\in[0,T]}|x(t)|^2 \le \varepsilon\right\} \le \mathbf{P}\left\{|\gamma(t)|^2 > \frac{\varepsilon}{2}\right\} +$$

$$+\mathbf{P}\left\{\sup_{t\in[0,T]}\left(|\beta(t)|^2 + |\varphi(0)|^2\right) \ge \frac{\varepsilon}{2}\right\} \le \frac{\delta_1}{\varepsilon}. \quad (5)$$

Це означає, що розв'язок $x(t) \equiv 0$ системи (1), (2) стохастично рівномірно стійкий за означенням 1.

II) Доведення асимптотичної рівномірно стохастичної стійкості розв'язку $x(t) \equiv 0$ системи (1), (2).

Це рівносильне доведенню $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = 0$ на $\omega$-множині, ймовірнісна міра якої рівна 1, якщо $\sup\limits_{-\Delta\le\tau\le 0} |\varphi(\tau)|$ як завгодно близький до 0. Дійсно, $\omega$-множина з (5) задовольняє цю умову, а саме:

$$|x(t)|^2 \le |\varphi(0)|^2 + \gamma - \int\limits_0^t f_\Delta(x_\tau)d\tau + \beta(t) \le \varepsilon - \int\limits_0^t f_\Delta(x_\tau)d\tau. \tag{6}$$

Ліва частина нерівності (6) додатна, тому інтеграл правої частини (6) повинен збігатися за умовою 1) теореми 1. Отже, в силу неперервності функціонала $f_\Delta(x_\tau)$ $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = 0$, бо $\lim\limits_{\tau\to\infty} f_\Delta(x_\tau) = 0$, що завершує доведення теореми 1.

**Теорема 2.** *Нехай умова (4) теореми 1 виконується на розв'язках $x(t)$ системи (1), (2) і при цьому виконується нерівність*

$$|x(t-\tau)|^2 < \alpha |x(t)|^2, \tag{7}$$

*де $0 \le \tau \le \Delta$, $\alpha > 1$. Тоді розв'язок $x(t) \equiv 0$ задачі Коші (1), (2) асимптотично рівномірно стохастично стійкий.*

***Доведення.*** I) Доведення рівномірно стохастичної стійкості тривіального розв'язку $x(t) \equiv 0$ системи (1), (2).

Виберемо $\forall \varepsilon > 0$ і розглянемо $\omega$-множину

$$B_\varepsilon \equiv \left\{\omega : |\gamma(t)| \le \frac{\varepsilon}{2}\right\} \cap \left\{\omega : \sup_{t\in[0,T]} |\beta(t)| < \frac{\varepsilon}{2}\right\}.$$

Доведемо еквівалентний означенню 1 факт: якщо $x(t)$ для $\omega \in B_\varepsilon$ потрапив до смуги $|x(t)| < \delta$, то $x(t)$ її ніколи не залишить.

Дійсно, нехай $\forall \eta > 0$ існує $\delta > 0$, що з нерівності $\sup\limits_{\tau\in[-\Delta,0]} |\varphi(\tau)| < \delta$ випливає $\mathbf{P}\{B_\varepsilon\} \ge 1 - \eta(\delta)$. Тоді за умовою (4) матимемо $\sup\limits_{t\in[0,T]} |x(t)|^2 < \varepsilon$ на траєкторії, яка задовольняє нерівність $|x(t-\tau)|^2 < \alpha|x(t)|^2$, причому $\lim\limits_{\delta\to\infty} \eta(\delta) = 0$.

Нехай знайдеться хоча б одна траєкторія $y(t)$ системи (1), (2) для якої $\sup\limits_{t\ge 0} |y(t)| > \varepsilon$ на $\omega$-множині $B_\varepsilon$. Тоді в перший момент виходу з $\varepsilon$-смуги матимемо нерівність $|y(t^* - \tau)|^2 < |y(t^*)|^2, \forall \tau \in [0, t^*]$. Що означатиме, що в момент часу $t^*$ знаходимося на кривій за умови (7). Одержали протиріччя, тобто тривіальний розв'язок системи (1) рівномірно стохастично стійкий.

II) Доведення асимптотичної рівномірно асимптотичної стійкості розв'язку $x(t) \equiv 0$ задачі (1), (2). Позначимо через $\delta_0 > 0$ максимальний рівень над яким деяка траєкторія знаходиться для $t \ge 0$ та $\omega \in B_\varepsilon$.

Якщо такий рівень існує для довільного розв'язку $x(t)$ задачі (1), (2), то $x(t) \equiv 0$ асимптотично стійкий. Далі міркування від супротивного. Існує $\delta_0 > 0$, але $\forall\eta > 0$ існує $T > 0$ таке, що даний розв'язок (1), (2) задовольняє нерівність $|x(T+\tau)|^2 < \delta_0^2 + \eta, \forall\omega \in B_\varepsilon$ і $\tau > 0$. Вибираємо $\eta = \delta_0^2(\alpha - 1)$ таким, щоби $\frac{\delta_0^2+\eta}{\delta_0^2}|x(T+\tau)|^2 > \delta_0^2 + \eta > |x(T+\tau-\tau_1)|^2$, де $0 \le \tau_1 \le \Delta$.

Тоді для $\forall\omega \in B_\varepsilon$ матимемо $|x(T+\tau)|^2 \le \delta_0^2 - \int\limits_T^t f_\Delta(x_\tau)d\tau$.

Звідки $\lim\limits_{\tau\to\infty} f_\Delta(x_\tau) = 0$, тобто $|x(T+t)| < \delta_0$ для $\forall t > 0$, що суперечить припущенню. Теорема 2 доведена.

**Теорема 3.** *При виконанні умов леми 1 достатньою умовою асимптотичної рівномірно стохастичної стійкості розв'язку $x(t) \equiv 0$ задачі Коші (1), (2) є виконання на розв'язках нерівності*

$$F(t, x(t), k, l) \le -f_\Delta(x_t) + \beta\left[|x(t)|^2 - |x(t-\Delta)|^2\right], \tag{8}$$

*де праву частину (8) при $\beta > 0$ слід розглядати як додатно визначений неперервно-обмежений функціонал.*

***Доведення.*** Повторює міркування теореми 1, якщо вибрати функціонал вигляду

$$z(t) = |x(t)|^2 + \beta\int\limits_{t-\Delta}^{t} |x(\tau)|^2 d\tau, \beta > 0.$$

Зауважимо, що умова (8) для практичного застосування більш придатна, бо права частина, як правило, одержується як квадратична форма відносно фазових змінних $x(t), x(t-\Delta_i), x(t-\Delta_j)$.

### 4. Модельні задачі

**Модельна задача 1.** Нехай $x(t) \in \mathbf{R}^1$ визначено як сильний розв'язок рівняння Іто-Скорохода для $\forall t \ge 0$, $\Delta > 0$, $a_1 > 0$:

$$dx(t) = \left[-a_1x(t) + a_2x(t-\Delta)\right]dt + b_1x(t)dw(t) + c_1x(t)\int\limits_U g(u)\widetilde{\nu}(du, dt). \tag{9}$$

**Розв'язання.** Для доведення асимптотичної рівномірно-стохастичної стійкості розв'язку $x(t)$ системи (9) слід розглянути функціонал

$$z(t) = \frac{x^2(t)}{2} + \alpha\int\limits_{t-\Delta}^{t} x^2(\tau)d\tau, \alpha > 0.$$

Тоді вираз $F(t, x(t), k, l)$, визначений (4), набуде вигляду

$$F(t, x(t), x(t-\Delta)) = -a_1x^2(t) - a_2x(t)x(t-\Delta) + \left(\frac{b_1^2}{2} + c_1\int\limits_U \frac{g^2(u)}{u^2}du\right)x^2(t) +$$

$$+\alpha x^2(t) - \alpha x^2(t-\Delta) = \left(-a_1 + \alpha + \frac{b_1}{2} + c_1^2\int\limits_U \frac{g^2(u)}{u^2}du\right)x^2(t) -$$

$$-a_2x(t)x(t-\Delta)-\alpha x^2(t-\Delta).$$

Зліва маємо квадратичну форму відносно фазових змінних $x(t), x(t-\Delta)$, яка буде від'ємно визначеною тоді і тільки тоді, коли її матриця

$$A=\begin{pmatrix}-a_1+\alpha+\frac{b_1}{2}+c_1^2\int\limits_U\frac{g^2(u)}{u^2}du & -\frac{a_2}{2}\\ \frac{a_2}{2} & -\alpha\end{pmatrix}$$

від'ємно визначена, що еквівалентно виконанню нерівностей

$$-a_1+\alpha+\frac{b_1}{2}+c_1^2\int\limits_U\frac{g^2(u)}{u^2}du<0;$$

$$-\alpha\left(-a_1+\alpha+\frac{b_1}{2}+c_1^2\int\limits_U\frac{g^2(u)}{u^2}du\right)-\frac{a_2^2}{4}>0.$$

Отже, достатньою умовою асимптотичної рівномірно стохастичної стійкості розв'язку $x(t)\equiv 0$ рівняння Іто-Скорохода (9) є виконання в просторі параметрів $a_1$, $a_2$, $b_1$, $c_1$, $\alpha$ нерівності

$$\alpha\left(a_1-\alpha-\frac{b_1}{2}-c_1^2\int\limits_U\frac{g^2(u)}{u^2}du\right)>\frac{a_2^2}{4}. \quad \blacksquare$$

**Модельна задача 2.** Ймовірнісною моделлю регулювання об'єкта за звуком є стохастичне диференціально-різницеве рівняння (СДРР) Іто-Скорохода

$$dx(t)=\left[ax(t)+bx(t-1)\right]dt+\sigma x(t)dw(t)+x(t-1)\int\limits_{\mathbf{R}^1}c(u)\widetilde{\nu}(du,dt). \qquad (10)$$

**Розв'язання.** Умова (4) набуде вигляду

$$2\Big[ax(t)+bx(t-1)\Big]x(t)+\sigma^2x^2(t)+x^2(t-1)\int\limits_U c^2(u)\Pi(du)=$$

$$=\left(2a+\sigma^2\right)x^2+2bx(t)x(t-1)+\int\limits_U c^2(u)\Pi(du)\cdot x^2(t-1)<0.$$

За умовою Сільвестра квадратична форма відносно $x(t)$, $x(t-1)$ від'ємно визначена тоді і тільки тоді, коли виконуються нерівності

$$\sigma^2<-2a;\left(\sigma^2+2a\right)\int\limits_{\mathbf{R}^1}c^2(u)du>b^2. \qquad \blacksquare$$

**Модельна задача 3.** Розглянемо стохастичне скалярне рівняння, яке є стохастичною моделлю процесів, що містять транспортне, технологічне або інформаційне загаювання:

$$dx(t)=-\left[ax(t)-bx(t-h)\right]dt+\sigma x(t-h)dw(t)+$$

$$+\gamma \int_{\mathbf{R}^1} x(t)c(u)\widetilde{\nu}(du,dt), \quad h>0. \tag{11}$$

**Розв'язання.** Перевіримо виконання умови (4) для СДРР (11). Умовою асимптотичної рівномірно стохастичної стійкості тривіального розв'язку (11) є виконання нерівностей

$$-\left(ax(t)-bx(t-h)\right)x(t)+\frac{\sigma^2}{2}x^2(t-h)+\gamma^2\int_{\mathbf{R}^1} c(u)\Pi(du)\cdot x^2(t)=$$

$$\left(-a+\gamma^2\int_{\mathbf{R}^1} c(u)\Pi(du)\right)x^2(t)-bx(t)x(t-h)+\frac{\sigma^2}{2}x^2(t-h)<0,$$

Звідси, за умовою Сільвестра, достатніми умовами асимптотичної рівномірно стохастичної стійкості тривіального розв'язку СДРР (11) є виконання нерівностей

$$-a+\gamma^2\int_{\mathbf{R}^1} c(u)\Pi(du)<0,$$

$$\left(-a+\gamma^2\int_{\mathbf{R}^1} c(u)\Pi(du)\right)\cdot\frac{\sigma^2}{2}>-b^2. \blacksquare \tag{12}$$

Зауважимо, що умова (12) не містить загаювання $h$, що є підтвердженням слабкості одержаних умов наведених теорем 1 і 2.

Зауважимо, що як показали модельні задачі 1 і 2, для дослідження стохастичних диференціально-різницевих рівнянь Іто-Скорохода із запізненням слід розглядати функціонали Ляпунова-Красовського [5] – [7].

## Список використаної літератури


1. *Гихман И.И., Скороход А.В.* Стохастические дифференциальные уравнения. – К.: Наукова думка, 1968. – 354 с.
2. *Свердан М.Л., Царков Є.Ф., Ясинський В.К.* Стійкість у стохастичному моделюванні складних динамічних систем. – Снятин: Вид-во "Над Прутом", 1996. – 448 с.
3. *Биллингсли П.* Сходимость вероятностных мер. – М.: Наука, 1977. – 352 с.
4. *Гихман И.И., Скороход А.В.* Стохастические дифференциальные уравнения и их применения. – К.: Наукова думка, 1982. – 612 с.
5. *Ясинский В.К., Ясинский И.В.* Устойчивость и оптимальное управление стохастическими динамическими системами со всей предисторией. – К.: ТВіМС, 2004. – 363 с.
6. *Ясинський В.К. , Ясинський Є.В.* Задачі стійкості і стабілізації динамічних систем зі скінченною післядією. – К.: ТВіМС, 2005. – 580 с.
7. *Ясинський В.К., Ясинський Є.В., Юрченко І.В.* Стабілізація у динамічних системах випадкової структури. – Чернівці: Вид-во "Золоті литаври", 2011. – 738 с.
8. *Королюк В.С., Ясинський В.К.* Курс теорії ймовірностей, випадкових процесів і математичної статистики. – Чернівці: Вид-во "Золоті литаври", 2005. – 525 с.
9. *Королюк В.С., Ясинський В.К.* Теорія ймовірностей. Комп'ютерний практикум. – Чернівці: Вид-во "Золоті литаври", 2011. – 487 с.


Одержано 08.04.2015