УДК 519.21

Д. В. Затула (Київський нац. ун-т ім. Т. Шевченка)

ПРО РОЗПОДІЛ НОРМ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ У ПРОСТОРАХ ГЕЛЬДЕРА

In this article we obtain estimations for distributions of norms of random processes from Banach spaces $\mathbb{F}_\psi(\Omega)$ of random variables and investigate Hölder continuity of such processes on a compact metric space.

У роботі знайдені оцінки розподілів норм випадкових процесів з банахових просторів $\mathbb{F}_\psi(\Omega)$ випадкових величин та досліджена гельдерова неперервність таких процесів на метричному компактному просторі.

Вступ. Розглянемо метричний простір $(\mathbb{T},\, \rho)$ і випадковий процес $X = (X(t),\, t \in \mathbb{T})$. Для процесу X модулями неперервності є такі функції f, що з ймовірністю 1 виконується нерівність:

$$\limsup_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{\sup\limits_{0<\rho(t,s)\le\varepsilon} |X(t)-X(s)|}{f(\varepsilon)} \le 1.$$

Питання про знаходження модулів неперервності та умов Гельдера для гаусових процесів детально розглянуто у роботі [1]. Ці результати були узагальнені для деяких класів процесів з просторів Орліча у [2, 3], а також у [4, 5]. Досліджена ліпшицева неперервність для φ-субгаусових процесів та знайдені оцінки розподілу ліпшицевих норм таких процесів у роботі [6]. Оцінки розподілів норм випадкових процесів з просторів $L_p(\Omega)$, $1 \le p < \infty$ знайдені у роботі [7].

Простори випадкових величин $\mathbb{F}_\psi(\Omega)$ — це банахові простори з нормою

$$\|\xi\|_\psi = \sup_{u\ge 1} \frac{(\mathsf{E}|\xi|^u)^{1/u}}{\psi(u)},$$

де $\psi(u) > 0$ — деяка монотонно зростаюча функція. Такі простори були введені у роботі [8], а властивості випадкових величин та процесів з просторів $\mathbb{F}_\psi(\Omega)$ розглянуто у [9]. У загальному випадку модулі неперервності та, відповідно, оцінки розподілів норм випадкових процесів з просторів $\mathbb{F}_\psi(\Omega)$ знайдено у [10].

У даній роботі знайдено модулі неперервності для випадкових процесів з просторів $\mathbb{F}_\psi(\Omega)$ з екпоненційною функцією ψ, визначених на компактному просторі $(\mathbb{T},\, \rho)$. Зокрема, оцінено ймовірності

$$\mathsf{P}\left\{\sup_{0<\rho(t,s)\le v} \frac{|X(t)-X(s)|}{f(\rho(t,s))} > x\right\}$$

та наведено умови, за яких траєкторії таких випадкових процесів з просторів $\mathbb{F}_\psi(\Omega)$ задовольняють умову Гельдера.

Гельдерова неперервність випадкових процесів може бути застосована, наприклад, у вивченні швидкості наближення функцій тригонометричними поліномами.

Означення та умова А простору $\mathbb{F}_\psi(\Omega)$. У цьому розділі наведемо кілька означень, технічних результатів та необхідну умову, які будуть використані при доведенні основних результатів.

Означення 1 (див. [9]). *Нехай $\psi(u) > 0$, $u \geq 1$ – деяка монотонно зростаюча функція така, що $\psi(u) \to \infty$ при $u \to \infty$. Випадкова величина ξ належить простору $\mathbb{F}_\psi(\Omega)$, якщо виконується наступна умова:*

$$\sup_{u\geq 1} \frac{(\mathsf{E}|\xi|^u)^{1/u}}{\psi(u)} \leq \infty.$$

У роботі [8] (див. також [9]) доведено, що $\mathbb{F}_\psi(\Omega)$ є простором з нормою

$$\|\xi\|_\psi = \sup_{u\geq 1} \frac{(\mathsf{E}|\xi|^u)^{1/u}}{\psi(u)}.$$

Теорема 1 (див. [9]). *Якщо випадкова величина ξ належить простору $\mathbb{F}_\psi(\Omega)$, то $\forall x > 0$ виконується наступна нерівність:*

$$\mathsf{P}\{|\xi| > x\} \leq \inf_{u\geq 1} \frac{\|\xi\|_\psi^u \cdot (\psi(u))^u}{x^u}. \tag{1}$$

Надалі будемо розглядати простори $\mathbb{F}_\psi(\Omega)$, які задовольняють наступній умові. Нехай ξ_1, ..., ξ_n — випадкові величини з простору $\mathbb{F}_\psi(\Omega)$. Позначимо $\eta = \max\limits_{1\leq k\leq n} |\xi_k|$, $a = \max\limits_{1\leq k\leq n} \|\xi_k\|_\psi$.

Умова А (див. [10]). *Існують функція $z(x) > 0$, монотонно зростаюча функція $U(n)$ та дійсне число $x_0 > 0$, що $\forall x > x_0$ виконується наступна нерівність:*

$$\mathsf{P}\{\eta > x \cdot a \cdot U(n)\} \leq \frac{1}{n} \exp\{-z(x)\}.$$

Для експоненційної функції $\psi(u)$ умова А набуває наступного вигляду.

Теорема 2. *Нехай $\psi(u) = e^{\alpha u^\beta}$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$. Тоді наступна нерівність виконується при $\forall x \geq \exp\left\{\left(\frac{\ln 3}{c\sqrt[\beta]{2}(\ln 3 - 1)}\right)^{\frac{2\beta}{\beta+1}}\right\}$, $c = \frac{\beta}{\alpha^{1/\beta}} \cdot (\beta+1)^{-\frac{\beta+1}{\beta}}$:*

$$\mathsf{P}\left\{\eta > x \cdot a \cdot \exp\left\{(\ln(n+2))^{\frac{2\beta}{\beta+1}}\right\}\right\} \leq \frac{1}{n} \exp\left\{-\frac{\beta}{\alpha^{1/\beta}} \cdot \left(\frac{2}{\beta+1}\right)^{\frac{\beta+1}{\beta}} (\ln x)^{\frac{\beta+1}{2\beta}}\right\}.$$

Доведення. У цьому випадку нерівність (1) набуває наступного вигляду (див. [9]):

$$\mathsf{P}\{|\xi| > x\} \leq \exp\left\{-\frac{\beta}{\alpha^{1/\beta}} \cdot \frac{1}{(\beta+1)^{\frac{\beta+1}{\beta}}} \cdot \left(\ln \frac{x}{\|\xi\|_\psi}\right)^{\frac{\beta+1}{\beta}}\right\}$$

при $x > \|\xi\|_\psi$. Позначимо $c := \frac{\beta}{\alpha^{1/\beta}} \cdot (\beta+1)^{-\frac{\beta+1}{\beta}}$. Тоді $\forall x > \left(\exp\left\{(\ln 3)^{\frac{2\beta}{\beta+1}}\right\}\right)^{-1}$:

$$
\begin{aligned}
&\mathsf{P}\{\eta > x\cdot a\cdot U(n)\} = \mathsf{E}\mathbb{1}\{\omega:\,\eta > x\cdot a\cdot U(n)\} \le\\
&\le \sum_{k=1}^{n} \mathsf{E}\mathbb{1}\{\eta = |\xi_k|\}\cdot \mathbb{1}\{\omega:\,|\xi_k| > x\cdot a\cdot U(n)\} \le\\
&\le n\cdot \max_{1\le k\le n} \mathsf{P}\{|\xi_k| > x\cdot a\cdot U(n)\} \le\\
&\le n\cdot \max_{1\le k\le n} \exp\left\{-c\cdot\left(\ln\frac{x\cdot a\cdot U(n)}{\|\xi_k\|_\psi}\right)^{\frac{\beta+1}{\beta}}\right\} \le\\
&\le n\cdot \max_{1\le k\le n} \exp\left\{-c\cdot\left(\ln\frac{x\cdot a\cdot U(n)}{a}\right)^{\frac{\beta+1}{\beta}}\right\} =\\
&= \frac{1}{n}\cdot n^2\cdot \exp\left\{-c\cdot(\ln(x\cdot U(n)))^{\frac{\beta+1}{\beta}}\right\}.
\end{aligned}
$$

Візьмемо $U(n) = \exp\left\{(\ln(n+2))^{\frac{2\beta}{\beta+1}}\right\}$, позначимо $d_n = c\,(\ln(x\cdot U(n)))^{\frac{\beta+1}{\beta}}$. Виконується наступна рівність:

$$n^2\cdot\exp\{-d_n\} = \exp\{2\ln n - d_n\}.$$

Легко бачити, що якщо справджується нерівність

$$\frac{2\ln n}{1-\frac{1}{\ln 3}} \le d_n,$$

тобто при $x \ge \exp\left\{\left(\frac{\ln 3}{c\sqrt[\beta]{2}(\ln 3-1)}\right)^{\frac{2\beta}{\beta+1}}\right\}$, то має місце наступна нерівність:

$$2\ln n - d_n \le -d_n\cdot\frac{1}{\ln(n+2)}.$$

Дійсно, $\forall n\ge 1$:

$$x \ge \exp\left\{\left(\frac{\ln 3}{c\sqrt[\beta]{2}(\ln 3-1)}\right)^{\frac{2\beta}{\beta+1}}\right\} \Leftrightarrow \frac{2}{1-\frac{1}{\ln 3}} \le c\cdot 2^{\frac{\beta+1}{\beta}}(\ln x)^{\frac{\beta+1}{2\beta}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2}{1-\frac{1}{\ln(n+2)}} \le c\cdot 2^{\frac{\beta+1}{\beta}}(\ln x)^{\frac{\beta+1}{2\beta}} \Leftrightarrow \frac{2\ln n}{1-\frac{1}{\ln(n+2)}} \le c\cdot 2^{\frac{\beta+1}{\beta}}(\ln x)^{\frac{\beta+1}{2\beta}}\ln n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2\ln n}{1-\frac{1}{\ln(n+2)}} \le c\cdot 2^{\frac{\beta+1}{\beta}}(\ln x)^{\frac{\beta+1}{2\beta}}\ln(n+2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left|\begin{array}{c}\text{Якщо } a>0,\ b>0, \text{ то } 2\sqrt{ab}\le a+b \Rightarrow 2\sqrt{\ln x}\cdot(\ln(n+2))^{\frac{\beta}{\beta+1}} \le\\ \le \ln x + (\ln(n+2))^{\frac{2\beta}{\beta+1}} = \ln\left(x\cdot\exp\left\{(\ln(n+2))^{\frac{2\beta}{\beta+1}}\right\}\right)\end{array}\right| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2\ln n}{1-\frac{1}{\ln(n+2)}} \le c\cdot\left(\ln\left(x\cdot\exp\left\{(\ln(n+2))^{\frac{2\beta}{\beta+1}}\right\}\right)\right)^{\frac{\beta+1}{\beta}}.$$

Тоді $\forall x \geq \exp\left\{\left(\frac{\ln 3}{c\sqrt[\beta]{2}(\ln 3-1)}\right)^{\frac{2\beta}{\beta+1}}\right\}$ маємо наступне:

$$\mathsf{P}\left\{\eta > x\cdot a\cdot \exp\left\{(\ln(n+2))^{\frac{2\beta}{\beta+1}}\right\}\right\} \leq \frac{1}{n}\cdot\exp\left\{-d_n\cdot\frac{1}{\ln(n+2)}\right\} =$$

$$= \frac{1}{n}\cdot\exp\left\{-c\cdot\left(\ln\left(x\cdot\exp\left\{(\ln(n+2))^{\frac{2\beta}{\beta+1}}\right\}\right)\right)^{\frac{\beta+1}{\beta}}\cdot\frac{1}{\ln(n+2)}\right\} =$$

$$\leq \left|\begin{array}{c}\text{Якщо } a>0,\ b>0, \text{ то } \frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}\ \Rightarrow\ \ln\left(x\cdot\exp\left\{(\ln(n+2))^{\frac{2\beta}{\beta+1}}\right\}\right) = \\ = \ln x + (\ln(n+2))^{\frac{2\beta}{\beta+1}} \geq 2\sqrt{\ln x}\cdot(\ln(n+2))^{\frac{\beta}{\beta+1}}\end{array}\right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{n}\cdot\exp\left\{-\frac{\beta}{\alpha^{1/\beta}}\cdot\left(\frac{2}{\beta+1}\right)^{\frac{\beta+1}{\beta}}(\ln x)^{\frac{\beta+1}{2\beta}}\cdot\ln(n+2)\cdot\frac{1}{\ln(n+2)}\right\} =$$

$$= \frac{1}{n}\exp\left\{-\frac{\beta}{\alpha^{1/\beta}}\cdot\left(\frac{2}{\beta+1}\right)^{\frac{\beta+1}{\beta}}(\ln x)^{\frac{\beta+1}{2\beta}}\right\}.$$

Означення 2 (див. [4]). *Нехай $(\mathbb{T},\,\rho)$ — метричний простір. Метричною масивністю $N_{(\mathbb{T},\,\rho)}(u) := N(u)$, $u>0$ називається мінімальна кількість точок в u-сітці простору $\mathbb{T}$ відносно метрики ρ.*

Означення 3 (див. [9]). *Випадковий процес $X = (X(t),\, t\in\mathbb{T})$ належить простору $\mathbb{F}_\psi(\Omega)$, якщо для всіх $t\in\mathbb{T}$ випадкова величина $X(t)\in\mathbb{F}_\psi(\Omega)$.*

Означення 4 (див. [4,6]). *Функція $q = \{q(t), t\in\mathbb{R}\}$ називається модулем неперервності, якщо $q(t)\geq 0$, $q(0)=0$ та $q(t+s)\leq q(t)+q(s)$ при $t>0$, $s>0$.*

Означення 5 (див. [4,6]). *Нехай $(\mathbb{T},\,\rho)$ – метричний простір, q – модуль неперервності. Тоді сім'я функцій $\{x(t),\, t\in\mathbb{T}\}$, для яких*

$$\sup_{\substack{t,s\in\mathbb{T}\\ t\neq s}}\frac{|x(t)-x(s)|}{q(\rho(t,s))} < \infty$$

(або ж $\sup\limits_{\rho(t,s)\leq h}|x(t)-x(s)| = o(q(h))$ при $h\to 0$), називається простором Ліпшиця $\Lambda_q(\mathbb{T},\,\rho)$ (або ж $\Lambda_q^0(\mathbb{T},\,\rho)$).

Теорема про модулі неперервності випадкових процесів з просторів $\mathbb{F}_\psi(\Omega)$ випадкових величин. Сформулюємо теорему про модулі неперервності випадкових процесів з просторів $\mathbb{F}_\psi(\Omega)$ випадкових величин у загальному випадку та для експоненційної функції $\psi(u)$.

Теорема 3 (див. [10]). *Нехай $(\mathbb{T},\,\rho)$ – деякий компактний метричний простір. Розглянемо сепарабельний випадковий процес $X = (X(t),\, t\in\mathbb{T})$ з банахового простору $\mathbb{F}_\psi(\Omega)$, що задовольняє умові A з функціями $U(n)$, $z(x)$ та $x_0>0$. Припустимо, що існує монотонно зростаюча неперервна функція $\sigma = \{\sigma(h),\, h\geq 0\}$ така, що $\sigma(0)=0$ та виконується наступна нерівність:*

$$\sup_{\rho(t,s)\leq h}\|X(t)-X(s)\|_\psi \leq \sigma(h). \tag{2}$$

Нехай $N(\varepsilon) = N_\rho(\mathbb{T}, \varepsilon)$ — *метрична масивність простору* $(\mathbb{T}, \rho)$. *Також нехай* $\varepsilon_0 = \sigma^{(-1)}\left(\sup\limits_{t,s\in\mathbb{T}} \rho(t,s)\right)$; $\int\limits_0^{\sigma(\varepsilon)} U(B^2N^2(\sigma^{(-1)}(t)))dt < \infty$, $\varepsilon > 0$.

Тоді для $x > x_0$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ *виконується наступна нерівність:*

$$\mathsf{P}\left\{\sup_{0<\rho(t,s)\le\varepsilon} \frac{|X(t)-X(s)|}{f_B(\rho(t,s))} > x\right\} \le \frac{2B^2+B}{(B^2-1)N(\varepsilon)} \cdot \exp\{-z(x)\},$$

де $B > 1$ – *деяке число,*

$$f_B(\varepsilon) = (6+4\sqrt{2}) \int\limits_0^{\sigma(\varepsilon)} U(BN(\sigma^{(-1)}(t)))dt +$$
$$+ (5+2\sqrt{6}) \int\limits_0^{\sigma(\varepsilon)} U(B^2N^2(\sigma^{(-1)}(t)))dt,\ \varepsilon > 0.$$

Зауваження 1. *Якщо* $\psi(u) = e^{\alpha u^\beta}$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, *то, згідно із теоремою 2, простір* $\mathbb{F}_\psi(\Omega)$ *задовольняє умові A з функціями* $U(n) = \exp\left\{(\ln(n+2))^{\frac{2\beta}{\beta+1}}\right\}$, $z(x) = \frac{\beta}{\alpha^{1/\beta}}\left(\frac{2}{\beta+1}\right)^{\frac{\beta+1}{\beta}} (\ln x)^{\frac{\beta+1}{2\beta}}$ *і* $x_0 = \exp\left\{\left(\frac{\ln 3}{b\sqrt[\beta]{2}(\ln 3-1)}\right)^{\frac{2\beta}{\beta+1}}\right\}$, $b = \frac{\beta}{\alpha^{1/\beta}} \cdot (\beta+1)^{-\frac{\beta+1}{\beta}}$. *Тоді функція* $f_B(\varepsilon)$ *набуває вигляду:*

$$f_B(\varepsilon) = (6+4\sqrt{2}) \int\limits_0^{\sigma(\varepsilon)} \exp\left\{\left(\ln\left(BN\left(\sigma^{(-1)}(t)\right)+2\right)\right)^{\frac{2\beta}{\beta+1}}\right\} dt +$$
$$+ (5+2\sqrt{6}) \int\limits_0^{\sigma(\varepsilon)} \exp\left\{\left(\ln\left(B^2N^2\left(\sigma^{(-1)}(t)\right)+2\right)\right)^{\frac{2\beta}{\beta+1}}\right\} dt.$$

Наслідок 1. *Нехай* $(\mathbb{T}, \rho)$ – *деякий компактний метричний простір та* $X = (X(t), t \in \mathbb{T})$ — *сепарабельний випадковий процес з банахового простору* $\mathbb{F}_\psi(\Omega)$, *де* $\psi(u) = e^{\alpha u^\beta}$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$. *Припустимо, що існує монотонно зростаюча неперервна функція* $\sigma = \{\sigma(h), h \ge 0\}$ *така, що* $\sigma(0) = 0$ *та виконується нерівність (2). Також нехай* $N(\varepsilon)$ — *метрична масивність простору* $(\mathbb{T}, \rho)$, $\varepsilon_0 = \sigma^{(-1)}\left(\sup\limits_{t,s\in\mathbb{T}} \rho(t,s)\right)$; $\int\limits_0^{\sigma(\varepsilon)} \exp\left\{\left(\ln\left(B^2N^2\left(\sigma^{(-1)}(t)\right)+2\right)\right)^{\frac{2\beta}{\beta+1}}\right\} dt < \infty$, $\varepsilon > 0$.

Тоді для $x > \exp\left\{\left(\frac{\ln 3}{b\sqrt[\beta]{2}(\ln 3-1)}\right)^{\frac{2\beta}{\beta+1}}\right\}$, $b = \frac{\beta}{\alpha^{1/\beta}} \cdot (\beta+1)^{-\frac{\beta+1}{\beta}}$ *та* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ *виконується наступна нерівність:*

$$\mathsf{P}\left\{\sup_{0<\rho(t,s)\le\varepsilon} \frac{|X(t)-X(s)|}{f_B(\rho(t,s))} > x\right\} \le$$
$$\le \frac{2B^2+B}{(B^2-1)N(\varepsilon)} \cdot \exp\left\{-\frac{\beta}{\alpha^{1/\beta}} \cdot \left(\frac{2}{\beta+1}\right)^{\frac{\beta+1}{\beta}} (\ln x)^{\frac{\beta+1}{2\beta}}\right\},$$

де $B > 1$ *– деяке число,*

$$f_B(\varepsilon) = (6+4\sqrt{2}) \int\limits_0^{\sigma(\varepsilon)} \exp\left\{ \left(\ln\left(BN\left(\sigma^{(-1)}(t)\right)+2\right)\right)^{\frac{2\beta}{\beta+1}} \right\} dt +$$

$$+ (5+2\sqrt{6}) \int\limits_0^{\sigma(\varepsilon)} \exp\left\{ \left(\ln\left(B^2N^2\left(\sigma^{(-1)}(t)\right)+2\right)\right)^{\frac{2\beta}{\beta+1}} \right\} dt.$$

Умова Гельдера для випадкових процесів з просторів $\mathbb{F}_\psi(\Omega)$ випадкових величин з експоненційною функцією $\psi(u)$.

Теорема 4 (див. [10]). *Нехай виконуються усі припущення теореми 3. Тоді з ймовірністю 1:*

$$\limsup_{\varepsilon\downarrow 0} \frac{\sup\limits_{0<\rho(t,s)\le\varepsilon} |X(t)-X(s)|}{f_B(\varepsilon)} \le 1,$$

де

$$f_B(\varepsilon) = (6+4\sqrt{2}) \int\limits_0^{\sigma(\varepsilon)} U(BN(\sigma^{(-1)}(t)))dt +$$

$$+ (5+2\sqrt{6}) \int\limits_0^{\sigma(\varepsilon)} U(B^2N^2(\sigma^{(-1)}(t)))dt, \ \varepsilon > 0.$$

Аналогічно має місце теорема у випадку експоненційної функції $\psi(u)$.

Теорема 5. *Нехай виконуються усі припущення наслідку 1. Тоді з ймовірністю 1:*

$$\limsup_{\varepsilon\downarrow 0} \frac{\sup\limits_{0<\rho(t,s)\le\varepsilon} |X(t)-X(s)|}{f_B(\varepsilon)} \le 1,$$

де

$$f_B(\varepsilon) = (6+4\sqrt{2}) \int\limits_0^{\sigma(\varepsilon)} \exp\left\{ \left(\ln\left(BN\left(\sigma^{(-1)}(t)\right)+2\right)\right)^{\frac{2\beta}{\beta+1}} \right\} dt +$$

$$+ (5+2\sqrt{6}) \int\limits_0^{\sigma(\varepsilon)} \exp\left\{ \left(\ln\left(B^2N^2\left(\sigma^{(-1)}(t)\right)+2\right)\right)^{\frac{2\beta}{\beta+1}} \right\} dt, \ \varepsilon > 0.$$

Наслідок 2. *За виконання умов теореми 5 для достатньо малих* v*:*

$$\sup_{\rho(t,s)\le v} |X(t)-X(s)| \le (6+4\sqrt{2}) \int\limits_0^{\sigma(v)} \exp\left\{ \left(\ln\left(BN\left(\sigma^{(-1)}(t)\right)+2\right)\right)^{\frac{2\beta}{\beta+1}} \right\} dt +$$

$$+ (5+2\sqrt{6}) \int\limits_0^{\sigma(v)} \exp\left\{ \left(\ln\left(B^2N^2\left(\sigma^{(-1)}(t)\right)+2\right)\right)^{\frac{2\beta}{\beta+1}} \right\} dt$$

з ймовірністю 1.

Теорема 6. *Нехай виконуються усі припущення наслідку 1 за умови, що* $\sigma(h) = dh^c$, $h, c, d > 0$ *та простір* $\mathbb{T} = [0, T]$. *Тоді для* $\varepsilon \in \left(0, \sqrt[c]{\frac{T}{d}}\right)$, $B > 1$, $\forall x > \exp\left\{\left(\frac{\ln 3}{b\sqrt[\beta]{2}(\ln 3 - 1)}\right)^{\frac{2\beta}{\beta+1}}\right\}$, $b = \frac{\beta}{\alpha^{1/\beta}} \cdot (\beta+1)^{-\frac{\beta+1}{\beta}}$ *та за умови, що* $\beta \in (0, 1)$, *виконується наступна нерівність:*

$$\mathsf{P}\left\{\sup_{0<\rho(t,s)\le\varepsilon} \frac{|X(t) - X(s)|}{g_B(\rho(t,s))} > x\right\} \le$$

$$\le \frac{2B^2 + B}{(B^2-1)N(\varepsilon)} \cdot \exp\left\{-\frac{\beta}{\alpha^{1/\beta}}\left(\frac{2}{\beta+1}\right)^{\frac{\beta+1}{\beta}} (\ln x)^{\frac{\beta+1}{2\beta}}\right\},$$

де

$$g_B(\varepsilon) = (5 + 2\sqrt{6}) \cdot \left(\exp\left\{\left(\ln\left(B^2T\sqrt[c]{d}\left(\frac{T\sqrt[c]{d}}{4} + 1\right) + B^2 + 2\right)\right)^{\frac{2\beta}{\beta+1}}\right\} - \right.$$

$$\left. - \exp\left\{\left(\ln\left(B^2T\sqrt[c]{d}\left(\frac{T\sqrt[c]{d}}{4} + 1\right) + \varepsilon\sqrt[c]{d}(B^2+2)\right)\right)^{\frac{2\beta}{\beta+1}}\right\}\right) +$$

$$+ d\varepsilon^c\left((6 + 4\sqrt{2}) \cdot \exp\left\{\left(\ln\left(\sqrt[c]{d}\left(\frac{BT}{2} + \varepsilon(B+2)\right)\right)\right)^{\frac{2\beta}{\beta+1}}\right\} + \right.$$

$$\left. + \ (5 + 2\sqrt{6}) \cdot \exp\left\{\left(\ln\left(B^2T\sqrt[c]{d}\left(\frac{T\sqrt[c]{d}}{4} + 1\right) + \varepsilon\sqrt[c]{d}(B^2+2)\right)\right)^{\frac{2\beta}{\beta+1}}\right\}\right).$$

Більше того, у метриці $\rho(t,s) = |t - s|$, $t, s \in [0, T]$, *справджується умова Гельдера для випадкового процесу* X:

$$|X(t) - X(s)| = O(|t-s|^c), \quad c \in (0, 1).$$

Доведення. Оберненою функцією до функції $\sigma(h)$ є $\sigma^{(-1)}(h) = \sqrt[c]{\frac{h}{d}}$. Тоді функція $f_B(\varepsilon)$ із наслідку 1 набуває вигляду:

$$f_B(\varepsilon) = (6 + 4\sqrt{2}) \int_0^{d\varepsilon^c} \exp\left\{\left(\ln\left(BN\left(\sqrt[c]{\frac{t}{d}}\right) + 2\right)\right)^{\frac{2\beta}{\beta+1}}\right\} dt +$$

$$+ (5 + 2\sqrt{6}) \int_0^{d\varepsilon^c} \exp\left\{\left(\ln\left(B^2N^2\left(\sqrt[c]{\frac{t}{d}}\right) + 2\right)\right)^{\frac{2\beta}{\beta+1}}\right\} dt.$$

Оскільки простір $\mathbb{T} = [0, T]$, то справджується нерівність для метричної масивності:

$$N\left(\sqrt[c]{\frac{u}{d}}\right) = N\left(\sigma^{(-1)}(u)\right) \le \frac{T}{2\sigma^{(-1)}(u)} + 1 = \frac{T}{2\sqrt[c]{\frac{u}{d}}} + 1 = \frac{T}{2}\sqrt[c]{\frac{d}{u}} + 1.$$

Тому ми можемо обмежити зверху інтеграли функції $f_B(\varepsilon)$:

$$\int_0^{d\varepsilon^c} \exp\left\{\left(\ln\left(BN\left(\sqrt[c]{\frac{t}{d}}\right)+2\right)\right)^{\frac{2\beta}{\beta+1}}\right\}dt \leq$$

$$\leq \int_0^{d\varepsilon^c} \exp\left\{\left(\ln\left(B\cdot\left(\frac{T}{2}\sqrt[c]{\frac{d}{t}}+1\right)+2\right)\right)^{\frac{2\beta}{\beta+1}}\right\}dt =: I_1;$$

$$\int_0^{d\varepsilon^c} \exp\left\{\left(\ln\left(B^2N^2\left(\sqrt[c]{\frac{t}{d}}\right)+2\right)\right)^{\frac{2\beta}{\beta+1}}\right\}dt \leq$$

$$\leq \int_0^{d\varepsilon^c} \exp\left\{\left(\ln\left(B^2\cdot\left(\frac{T}{2}\sqrt[c]{\frac{d}{t}}+1\right)^2+2\right)\right)^{\frac{2\beta}{\beta+1}}\right\}dt =: I_2.$$

Умовою скінченності цих інтегралів є $\frac{2\beta}{\beta+1} < 1 \Leftrightarrow \beta \in (0,1)$. У такому разі можемо оцінити та обчислити інтеграли I_1 та I_2:

$$I_1 \leq d\varepsilon^c \cdot \exp\left\{\left(\ln\left(\sqrt[c]{d}\left(\frac{BT}{2}+\varepsilon(B+2)\right)\right)\right)^{\frac{2\beta}{\beta+1}}\right\};$$

$$I_2 \leq \exp\left\{\left(\ln\left(B^2T\sqrt[c]{d}\left(\frac{T\sqrt[c]{d}}{4}+1\right)+B^2+2\right)\right)^{\frac{2\beta}{\beta+1}}\right\} +$$

$$+(d\varepsilon^c-1)\cdot\exp\left\{\left(\ln\left(B^2T\sqrt[c]{d}\left(\frac{T\sqrt[c]{d}}{4}+1\right)+\varepsilon\sqrt[c]{d}(B^2+2)\right)\right)^{\frac{2\beta}{\beta+1}}\right\}.$$

Оскільки

$$\varepsilon_0 = \sigma^{(-1)}\left(\sup_{t,s\in\mathbb{T}}\rho(t,s)\right) = \sqrt[c]{\frac{\sup\limits_{t,s\in[0,T]}\rho(t,s)}{d}} = \sqrt[c]{\frac{T}{d}},$$

то, згідно із наслідком 1, для $\varepsilon \in \left(0, \sqrt[c]{\frac{T}{d}}\right)$, $B > 1$, $\forall x > \exp\left\{\left(\frac{\ln 3}{b\sqrt[\beta]{2}(\ln 3-1)}\right)^{\frac{2\beta}{\beta+1}}\right\}$, $b = \frac{\beta}{\alpha^{1/\beta}}\cdot(\beta+1)^{-\frac{\beta+1}{\beta}}$ та за умови, що $\beta \in (0,1)$, виконується наступна нерівність:

$$\mathsf{P}\left\{\sup_{0<\rho(t,s)\leq\varepsilon}\frac{|X(t)-X(s)|}{g_{B,1}(\rho(t,s))+g_{B,2}(\rho(t,s))\cdot(\rho(t,s))^c} > x\right\} \leq$$

$$\leq \frac{2B^2+B}{(B^2-1)N(\varepsilon)}\cdot\exp\left\{-\frac{\beta}{\alpha^{1/\beta}}\left(\frac{2}{\beta+1}\right)^{\frac{\beta+1}{\beta}}(\ln x)^{\frac{\beta+1}{2\beta}}\right\},$$

де

$$g_{B,1}(\varepsilon) = (5+2\sqrt{6})\cdot\left(\exp\left\{\left(\ln\left(B^2T\sqrt[c]{d}\left(\frac{T\sqrt[c]{d}}{4}+1\right)+B^2+2\right)\right)^{\frac{2\beta}{\beta+1}}\right\}-\right.$$

$$\left.-\exp\left\{\left(\ln\left(B^2T\sqrt[c]{d}\left(\frac{T\sqrt[c]{d}}{4}+1\right)+\varepsilon\sqrt[c]{d}(B^2+2)\right)\right)^{\frac{2\beta}{\beta+1}}\right\}\right),$$

$$g_{B,2}(\varepsilon) = d\left((6+4\sqrt{2})\cdot\exp\left\{\left(\ln\left(\sqrt[c]{d}\left(\frac{BT}{2}+\varepsilon(B+2)\right)\right)\right)^{\frac{2\beta}{\beta+1}}\right\}+\right.$$

$$\left.+(5+2\sqrt{6})\cdot\exp\left\{\left(\ln\left(B^2T\sqrt[c]{d}\left(\frac{T\sqrt[c]{d}}{4}+1\right)+\varepsilon\sqrt[c]{d}(B^2+2)\right)\right)^{\frac{2\beta}{\beta+1}}\right\}\right).$$

Також, відповідно до наслідку 2, має місце нерівність:

$$\sup_{0<\rho(t,s)\le\varepsilon}|X(t)-X(s)| \le g_{B,1}(\varepsilon)+g_{B,2}(\varepsilon)\cdot\varepsilon^c.$$

Більше того, оскільки $g_{B,1}(\varepsilon)\le g_{B,1}(0)$ та $g_{B,2}(\varepsilon)\le g_{B,2}(\varepsilon_0)$, то справджується наступна нерівність:

$$\sup_{0<\rho(t,s)\le\varepsilon}|X(t)-X(s)| \le g_{B,1}(0)+g_{B,2}(\varepsilon_0)\cdot\varepsilon^c.$$

Отже, якщо обрати метрику $\rho(t,s)=|t-s|$, $t,s\in[0,T]$, то матимемо:

$$|X(t)-X(s)| = O(|t-s|^c),\quad c\in(0,1).$$

Наступна теорема випливає з наслідку 1.

Теорема 7. *Нехай $X=(X(t),\,t\in\mathbb{T})$ — випадковий процес, для якого виконуються припущення наслідку 1. Якщо $f_B(\varepsilon)\le q_B(\varepsilon)$ в околі нуля, де q_B — деякий модуль неперервності, то з ймовірністю 1 процес X належить простору $\Lambda_q(\mathbb{T},\,\rho)$ і виконується наступна нерівність:*

$$\mathsf{P}\left\{\sup_{0<\rho(t,s)\le\varepsilon}\frac{|X(t)-X(s)|}{q_B(\rho(t,s))}>x\right\}\le$$

$$\le\frac{2B^2+B}{(B^2-1)N(\varepsilon)}\cdot\exp\left\{-\frac{\beta}{\alpha^{1/\beta}}\cdot\left(\frac{2}{\beta+1}\right)^{\frac{\beta+1}{\beta}}(\ln x)^{\frac{\beta+1}{2\beta}}\right\}.\quad(3)$$

Якщо ж $f_B(\varepsilon)=o(q_B(\varepsilon))$, то з ймовірністю 1 процес X належить простору $\Lambda_q^0(\mathbb{T},\,\rho)$ та для достатньо малих ε має місце нерівність (3).

Наслідок 3. *Нехай функція $\sigma(h)=dh^c$, $c,d,h>0$. Розглянемо випадковий процес $X=(X(t),\,t\in\mathbb{T})$, для якого виконуються припущення наслідку 1, та деякий модуль неперервності q_B. Якщо*

$$\int\limits_{0}^{d\varepsilon_0^c} \frac{\exp\left\{\left(\ln\left(B^2N^2\left(\sqrt[c]{\frac{t}{d}}\right)+2\right)\right)^{\frac{2\beta}{\beta+1}}\right\}}{q_B(t)}dt < \infty,$$

то з ймовірністю 1 процес X належить простору $\Lambda_q^0(\mathbb{T}, \rho)$.

Доведення. Функцію $f_B(\varepsilon)$ із наслідку 1 можна обмежити наступним чином:

$$\begin{aligned}
f_B(\varepsilon) &= (6+4\sqrt{2})\int\limits_0^{d\varepsilon^c}\exp\left\{\left(\ln\left(BN\left(\sqrt[c]{\frac{t}{d}}\right)+2\right)\right)^{\frac{2\beta}{\beta+1}}\right\}dt + \\
&+ (5+2\sqrt{6})\int\limits_0^{d\varepsilon^c}\exp\left\{\left(\ln\left(B^2N^2\left(\sqrt[c]{\frac{t}{d}}\right)+2\right)\right)^{\frac{2\beta}{\beta+1}}\right\}dt = \\
&= (6+4\sqrt{2})\int\limits_0^{d\varepsilon^c} q_B(t)\cdot\frac{\exp\left\{\left(\ln\left(BN\left(\sqrt[c]{\frac{t}{d}}\right)+2\right)\right)^{\frac{2\beta}{\beta+1}}\right\}}{q_B(t)}dt + \\
&+ (5+2\sqrt{6})\int\limits_0^{d\varepsilon^c} q_B(t)\cdot\frac{\exp\left\{\left(\ln\left(B^2N^2\left(\sqrt[c]{\frac{t}{d}}\right)+2\right)\right)^{\frac{2\beta}{\beta+1}}\right\}}{q_B(t)}dt \le
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\le (6+4\sqrt{2})q_B(\varepsilon)\int\limits_0^{d\varepsilon^c}\frac{\exp\left\{\left(\ln\left(BN\left(\sqrt[c]{\frac{t}{d}}\right)+2\right)\right)^{\frac{2\beta}{\beta+1}}\right\}}{q_B(t)}dt + \\
&+ (5+2\sqrt{6})q_B(\varepsilon)\int\limits_0^{d\varepsilon^c}\frac{\exp\left\{\left(\ln\left(B^2N^2\left(\sqrt[c]{\frac{t}{d}}\right)+2\right)\right)^{\frac{2\beta}{\beta+1}}\right\}}{q_B(t)}dt = \\
&= o(q_B(\varepsilon)), \quad \varepsilon \to 0.
\end{aligned}$$

Остаточно твердження цього наслідку випливає з теореми 7.

Висновок. У цій роботі знайдено умови, за яких траєкторії випадкового процесу X з простору $\mathbb{F}_\psi(\Omega)$ випадкових величин з експоненційною функцією ψ задовольняють умові Гельдера, та отримано оцінки розподілів норм траєкторій випадкових процесів у просторі Гельдера. У подальшому планується розглянути модулі неперервності випадкових процесів з просторів $\mathbb{F}_\psi(\Omega)$ на нескінченних інтервалах.

Список використаної літератури

1. *Dudley R. M.* Sample functions of the Gaussian processes // Annal. of Probability. – 1973. – **1**, №1. – C. 3–68.

2. *Kozachenko Yu. V.* Random processes in Orlicz spaces. I // Theory Probab. Math. Stat. – 1985. – №30. – C. 103–117.
3. *Kozachenko Yu. V.* Random processes in Orlicz spaces. II // Theory Probab. Math. Stat. – 1985. – №31. – C. 51–58.
4. *Buldygin V. V., Kozachenko Yu. V.* Metric Characterization of Random Variables and Random Processes. – American Mathematical Society, Providence, RI, 2000.
5. *Zatula D. V.* Modules of continuity of random processes from Orlicz spaces of random variables, defined on the interval // Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series: Physics & Mathematics. – 2013. – №2. – C. 23–28.
6. *Kozachenko Yu., Sottinen T., Vasylyk O.* Lipschitz conditions for $\mathrm{Sub}_\varphi(\Omega)$-processes and applications to weakly self-similar processes with stationary increments // Theor. Probability and Math. Statist. – 2011. – №82. – C. 57–73.
7. *Zatula D.* Lipschitz conditions for random processes from $L_p(\Omega)$ spaces of random variables // Journal of Classical Analysis. – 2015. – 6, №1. – C. 59–72.
8. *Ермаков С. В., Островский Е. И.* Условия непрерывности, экспоненциальные оценки и центральная предельная теорема для случайных полей. – М., 1986. – 42 с. – Деп. в ВИНИТИ, №3752-В.86.0.
9. *Козаченко Ю. В., Млавець Ю. Ю.* Простори Банаха випадкових величин $\mathbb{F}_\psi(\Omega)$ // Теорія ймовір. та матем. статист. – 2012. – Вип. 86. – С. 92–107.
10. *Затула Д. В., Козаченко Ю. В.* Умови Ліпшиця для випадкових процесів з банахових просторів $\mathbb{F}_\psi(\Omega)$ випадкових величин // Теорія ймовір. та матем. статист. – 2014. – Вип. 91. – С. 38–54.

Одержано 20.02.2015