УДК 519.21

М. М. Михасюк, П. В. Слюсарчук (Ужгородський нац. ун-т)

ШВИДКІСТЬ ЗБІЖНОСТІ В ЦЕНТРАЛЬНІЙ ГРАНИЧНІЙ ТЕОРЕМІ ДЛЯ ПОСЛІДОВНОСТЕЙ СЕРІЙ НЕЗАЛЕЖНИХ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН

Specification is considered of one estimate of Ignat Yu. and Paditz L.

Розглядається уточнення однієї оцінки Ігната Ю. І. і Падітц Л.

1. Формулювання основного результату. У даній роботі ми розглядаємо уточнення центральної теореми для послідовності серій незалежних в кожній серії випадкових величин. А саме, уточнюються теорема 2 із [1] і теорема 3 із [2]. В роботі [2] стала в теоремі 3 $L_3 < 17,96$. Ми показуємо, що стала у теоремі 2 із [1] і теоремі 3 із [2] не перевищує 14,678.

Нехай $\xi_{n1}, \xi_{n2}, \dots, \xi_{nk_n}$ – незалежні випадкові величини з математичним сподіванням $M\xi_{nk} = 0$, дисперсією $D\xi_{nk} = \sigma_{nk}^2$, $0 < \sigma_{nk} < \infty$, $\sum\limits_{k=1}^{k_n} \sigma_{nk}^2 = 1$. Позначимо: $F_{nk}(x)$ – функція розподілу, а $f_{nk}(t)$ – характеристична функція випадкової величини ξ_{nk}, $\Phi_n(x)$ – функція розподілу суми $S_n = \xi_{n1} + \xi_{n2} + \dots + \xi_{nk_n}$, $\Phi(x)$ – функція розподілу стандартного нормального закону, $\varphi_n(t)$ – характеристична функція S_n, $\rho_n = \sup\limits_x |\Phi_n(x) - \Phi(x)|$.

Для довільного $\varepsilon > 0$ позначимо

$$\lambda_{nk}^{(1)} = \int\limits_{|x|\le\varepsilon} |x|^3 dF_{nk}(x),\ \lambda_{nk}^{(2)} = \int\limits_{|x|>\varepsilon} x^2 dF_{nk}(x),\ \ \lambda_n^{(1)} = \sum_{k=1}^{k_n} \lambda_{nk}^{(1)},\ \lambda_n^{(2)} = \sum_{k=1}^{k_n} \lambda_{nk}^{(2)}.$$

Теорема. *Для довільного $\varepsilon > 0$ і для всіх $n \ge 1$ виконується нерівність*

$$\rho_n \le C\left(\lambda_n^{(1)} + \lambda_n^{(2)}\right), \tag{1}$$

де стала $C \le 14,678$.

2. Допоміжна лема.

Лема. *Нехай $\lambda_n^{(2)} \le \frac{1}{14}$, $|t| \le T_n = \left(4\lambda_n^{(1)}\right)^{-1}$. Тоді має місце нерівність*

$$\left|\varphi_n(t) - e^{-\frac{t^2}{2}}\right| \le e^{-\frac{t^2}{4}}\left(1,102\lambda_n^{(1)}|t|^3 + 11,495\lambda_n^{(2)}t^2\right). \tag{2}$$

Доведення. Будемо використовувати нерівність ([3], стор. 372):

$$\left|e^{i\alpha} - 1 - i\alpha - \frac{(i\alpha)^2}{2!} - \dots - \frac{(i\alpha)^m}{m!}\right| \le \frac{2^{1-\delta}|\alpha|^{m+\delta}}{m!(m+1)^\delta},\ (0 \le \delta \le 1). \tag{3}$$

Випадок 1: $|t| \le T_n' = \min\left\{a_1\left(\lambda_n^{(1)}\right)^{-\frac{1}{3}}, a_2\left(\lambda_n^{(2)}\right)^{-\frac{1}{2}}\right\}$, $|t| \le T_n$, де $a_1 = 1,22$, $a_2 = \sqrt{0,174}$, $a = a_1^2 + a_2^2 = 1,6624$.

$$|f_{nk}(t) - 1| = \left|\int\limits_{-\infty}^{+\infty} (e^{itx} - 1 - itx) dF_{nk}(x)\right| \le \frac{t^2}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 dF_{nk}(x) =$$

$$= \frac{t^2}{2}\left(\int\limits_{|x|\le\varepsilon} x^2 dF_{nk}(x) + \int\limits_{|x|>\varepsilon} x^2 dF_{nk}(x)\right).$$

Використаємо нерівність Ляпунова

$$(M|\xi\chi_\varepsilon|^2)^{\frac{1}{2}} \le (M|\xi\chi_\varepsilon|^3)^{\frac{1}{3}}, \text{ де } \chi_\varepsilon = \begin{cases} 1, & \xi \in [-\varepsilon;\varepsilon], \\ 0, & \xi \notin [-\varepsilon;\varepsilon]. \end{cases}$$

Врахувавши останню нерівність і умову $|t| \le T_n'$, одержуємо,

$$|f_{nk}(t)-1| \le \frac{t^2}{2}\left(\left(\lambda_{nk}^{(1)}\right)^{\frac{2}{3}} + \lambda_{nk}^{(2)}\right) \le \frac{1}{2}\left(\left(a_1\left(\lambda_n^{(1)}\right)^{-\frac{1}{3}}\right)^2\left(\lambda_{nk}^{(1)}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(a_2\left(\lambda_n^{(2)}\right)^{-\frac{1}{2}}\right)^2\lambda_{nk}^{(2)}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(a_1^2 + a_2^2\right) = \frac{1}{2}a < 1. \tag{4}$$

Піднесемо першу нерівність із (4) до квадрату, і врахуємо умову $|t| \le T_n$. Тоді

$$|f_{nk}(t)-1|^2 \le \frac{t^4}{4}\left(\left(\lambda_{nk}^{(1)}\right)^{\frac{4}{3}} + 2\left(\lambda_{nk}^{(1)}\right)^{\frac{2}{3}}\lambda_{nk}^{(2)} + \left(\lambda_{nk}^{(2)}\right)^2\right) \le$$

$$\le \frac{|t|^3}{4}a_1\left(\lambda_n^{(1)}\right)^{-\frac{1}{3}}\left(\lambda_{nk}^{(1)}\right)^{\frac{4}{3}} + \frac{t^2}{2}\left(a_1\left(\lambda_n^{(1)}\right)^{-\frac{1}{3}}\right)^2\left(\lambda_{nk}^{(1)}\right)^{\frac{2}{3}}\lambda_{nk}^{(2)} + \frac{t^2}{4}\left(a_2\left(\lambda_n^{(2)}\right)^{-\frac{1}{2}}\right)^2\left(\lambda_{nk}^{(2)}\right)^2 =$$

$$= \frac{|t|^3}{4}a_1\lambda_{nk}^{(1)} + \frac{t^2}{2}a_1^2\lambda_{nk}^{(2)} + \frac{t^2}{4}a_2^2\lambda_{nk}^{(2)} = \frac{|t|^3}{4}a_1\lambda_{nk}^{(1)} + t^2\left(\frac{a_1^2}{2} + \frac{a_2^2}{4}\right)\lambda_{nk}^{(2)}. \tag{5}$$

Нехай $|z| \le \frac{a}{2}$. Тоді $\ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \ldots$,

$$|\ln(1+z) - z| \le \frac{|z|^2}{2} + \frac{|z|^3}{3} + \frac{|z|^4}{3} + \cdots = \frac{|z|^2}{2} + \frac{|z|^3}{3}\frac{1}{1-|z|} \le |z|^2\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{3\left(1-\frac{a}{2}\right)}\right).$$

Тому при $|z| \le \frac{a}{2}$

$$\ln(1+z) = z + \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{3\left(1-\frac{a}{2}\right)}\right)\theta|z|^2, \tag{6}$$

де $|\theta| \le 1$.

Надалі будемо використовувати нерівність: $|e^z - 1| \le |z|e^{|z|}$. Тоді із (4) випливає, що характеристичну функцію $\varphi_n(t)$ можна логарифмувати. За згаданою нерівністю

$$\left|\varphi_n(t) - e^{-\frac{t^2}{2}}\right| = \left|e^{\ln\varphi_n(t)} - e^{-\frac{t^2}{2}}\right| = e^{-\frac{t^2}{2}}\left|e^{\frac{t^2}{2}+\ln\varphi_n(t)} - 1\right| \le$$

$$\le e^{-\frac{t^2}{2}}\left|\frac{t^2}{2} + \ln\varphi_n(t)\right| e^{\left|\frac{t^2}{2}+\ln\varphi_n(t)\right|} = e^{-\frac{t^2}{2}}\gamma_n e^{\gamma_n}, \tag{7}$$

де $\gamma_n = \left|\frac{t^2}{2} + \ln\varphi_n(t)\right|$.

Оскільки

$$\ln\varphi_n(t)=\sum_{k=1}^{k_n}\ln f_{nk}(t)=\sum_{k=1}^{k_n}\ln\left(1+(f_{nk}(t)-1)\right),$$

то, враховуючи (6), оцінимо γ_n наступним чином:

$$\gamma_n=\left|\frac{t^2}{2}+\sum_{k=1}^{k_n}(f_{nk}(t)-1)+\sum_{k=1}^{k_n}\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{3\left(1-\frac{a}{2}\right)}\right)\theta_k|f_{nk}(t)-1|^2\right|\le$$

$$\le\left|\frac{t^2}{2}+\sum_{k=1}^{k_n}(f_{nk}(t)-1)\right|+\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{3\left(1-\frac{a}{2}\right)}\right)\sum_{k=1}^{k_n}|f_{nk}(t)-1|^2. \quad (8)$$

Окремо оцінимо обидва доданки у (8). З нерівності (3) отримаємо:

$$\left|\frac{t^2}{2}+\sum_{k=1}^{k_n}(f_{nk}(t)-1)\right|=\left|\sum_{k=1}^{k_n}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(e^{itx}-1-itx-\frac{(itx)^2}{2}\right)dF_{nk}(x)\right|\le$$

$$\le\sum_{k=1}^{k_n}\left(\int\limits_{|x|\le\varepsilon}\left|e^{itx}-1-itx-\frac{(itx)^2}{2}\right|dF_{nk}(x)\right)+$$

$$+\sum_{k=1}^{k_n}\left(\int\limits_{|x|>\varepsilon}\left|e^{itx}-1-itx-\frac{(itx)^2}{2}\right|dF_{nk}(x)\right)\le$$

$$\le\sum_{k=1}^{k_n}\frac{|t|^3}{6}\int\limits_{|x|\le\varepsilon}|x|^3dF_{nk}(x)+\sum_{k=1}^{k_n}t^2\int\limits_{|x|>\varepsilon}x^2dF_{nk}(x)=\frac{|t|^3}{6}\lambda_n^{(1)}+t^2\lambda_n^{(2)}. \quad (9)$$

З нерівності (5) маємо:

$$\sum_{k=1}^{k_n}\left|f_k\left(\frac{t}{B_n}\right)-1\right|^2\le\frac{|t|^3}{4}a_1\lambda_n^{(1)}+t^2\left(\frac{a_1^2}{2}+\frac{a_2^2}{4}\right)\lambda_n^{(2)}.$$

Із (5), (8) і (7) отримуємо

$$\gamma_n\le\frac{|t|^3}{6}\lambda_n^{(1)}+t^2\lambda_n^{(2)}+\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{3\left(1-\frac{a}{2}\right)}\right)\left(\frac{|t|^3}{4}a_1\lambda_n^{(1)}+t^2\left(\frac{a_1^2}{2}+\frac{a_2^2}{4}\right)\lambda_n^{(2)}\right)=$$

$$=|t|^3\lambda_n^{(1)}\left(\frac{1}{6}+\frac{a_1}{4}\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{3\left(1-\frac{a}{2}\right)}\right)\right)+t^2\lambda_n^{(2)}\left(1+\frac{2a_1^2+a_2^2}{4}\right). \quad (10)$$

З умов леми $|t|\le T_n'$, $|t|\le T_n$ і нерівностей (7) і (10) маємо

$$\left|\varphi_n(t)-e^{-\frac{t^2}{2}}\right|\le e^{-\frac{t^2}{2}}\gamma_n e^{\gamma_n}\le$$

$$\leq e^{-\frac{t^2}{2}}\left(|t|^3\lambda_n^{(1)}\left(\frac{1}{6}+\frac{a_1}{4}\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{3\left(1-\frac{a}{2}\right)}\right)\right)+t^2\lambda_n^{(2)}\left(1+\frac{2a_1^2+a_2^2}{4}\right)\right)\times$$

$$\times\exp\left\{|t|^3\lambda_n^{(1)}\left(\frac{1}{6}+\frac{a_1}{4}\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{3\left(1-\frac{a}{2}\right)}\right)\right)+t^2\lambda_n^{(2)}\left(1+\frac{2a_1^2+a_2^2}{4}\right)\right\}.$$

Врахувавши, що $|t|\leq T_n'$, $|t|\leq T_n$, $a_1=1,22$, $a_2=\sqrt{0,174}$, $a=a_1^2+a_2^2=1,6624$,

$$\left|\varphi_n(t)-e^{-\frac{t^2}{2}}\right|\leq e^{-\frac{t^2}{2}}\left(0,82|t|^3\lambda_n^{(1)}+1,7877t^2\lambda_n^{(2)}\right)\exp\left\{|t|^3\lambda_n^{(1)}0,82+t^2\lambda_n^{(2)}1,7877\right\},$$

де, при виконанні умов $|t|\leq T_n'$, $|t|\leq T_n$, $\lambda_n^{(2)}\leq\frac{1}{14}$,

$$\exp\left\{|t|^3\lambda_n^{(1)}0,82+t^2\lambda_n^{(2)}1,7877\right\}\leq\exp\left\{t^2\left(4\lambda_n^{(1)}\right)^{-1}\lambda_n^{(1)}0,82+t^2\lambda_n^{(2)}1,7877\right\}\leq$$

$$\leq\exp\left\{t^2 4^{-1}0,82+0,35t^2\frac{1}{14}1,7877+0,65\left(a_2\left(\lambda_n^{(2)}\right)^{-\frac{1}{2}}\right)^2\lambda_n^{(2)}1,7877\right\}\leq$$

$$\leq e^{\frac{t^2}{4}}e^{0,65(a_2)^2 1,7877}\leq e^{\frac{t^2}{4}}1,2241,$$

тому

$$\left|\varphi_n(t)-e^{-\frac{t^2}{2}}\right|\leq e^{-\frac{t^2}{2}}\left(0,82|t|^3\lambda_n^{(1)}+1,7877t^2\lambda_n^{(2)}\right)e^{\frac{t^2}{4}}1,2241\leq$$

$$\leq e^{-\frac{t^2}{4}}\left(1,01|t|^3\lambda_n^{(1)}+2,19t^2\lambda_n^{(2)}\right). \tag{11}$$

У випадку 1 лема доведена.

Випадок 2: $|t|>T_n'$, $|t|\leq T_n$.

$$|f_{nk}(t)|^2=\left|\int_{-\infty}^{+\infty}e^{itx}dF_{nk}(x)\right|^2=\left|\int_{-\infty}^{+\infty}\cos tx dF_{nk}(x)+i\int_{-\infty}^{+\infty}\sin tx dF_{nk}(x)\right|^2=$$

$$=\left(1+\int_{-\infty}^{+\infty}(\cos tx-1)dF_{nk}(x)\right)^2+\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\sin tx dF_{nk}(x)\right)^2=$$

$$=1-t^2\sigma_{nk}^2+2\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\cos tx-1+\frac{(tx)^2}{2}\right)dF_{nk}(x)+$$

$$+\left(\int_{-\infty}^{+\infty}(\cos tx-1)dF_{nk}(x)\right)^2+\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\sin tx dF_{nk}(x)\right)^2. \tag{12}$$

Зараз оцінимо всі доданки останньої рівності. Із (3) отримаємо:

$$\left|\cos\alpha-1+\frac{\alpha^2}{2}\right|=\left|Re\left(e^{i\alpha}-1-i\alpha-\frac{(i\alpha)^2}{2!}\right)\right|\leq\left|e^{i\alpha}-1-i\alpha-\frac{(i\alpha)^2}{2!}\right|\leq\frac{|\alpha|^3}{6},$$

$$\left|\cos\alpha - 1 + \frac{\alpha^2}{2}\right| = \left|e^{i\alpha} - 1 - i\alpha - \frac{(i\alpha)^2}{2!}\right| \le \alpha^2.$$

Із цих нерівностей для першого інтеграла в (12) одержуємо

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(\cos tx - 1 + \frac{t^2x^2}{2}\right)dF_{nk}(x) =$$

$$= \int\limits_{|x|\le\varepsilon}\left(\cos tx - 1 + \frac{t^2x^2}{2}\right)dF_{nk}(x) + \int\limits_{|x|>\varepsilon}\left(\cos tx - 1 + \frac{t^2x^2}{2}\right)dF_{nk}(x) \le$$

$$\le \frac{|t|^3}{6}\int\limits_{|x|\le\varepsilon}|x|^3dF_{nk}(x) + t^2\int\limits_{|x|>\varepsilon}x^2dF_{nk}(x) = \frac{|t|^3}{6}\lambda_{nk}^{(1)} + t^2\lambda_{nk}^{(2)}. \qquad (13)$$

Знову, із нерівності (3) отримаємо:

$$|\cos\alpha - 1| = |Re(e^{i\alpha} - 1 - i\alpha)| \le |e^{i\alpha} - 1 - i\alpha| \le \frac{\alpha^2}{2},$$

$$|\cos\alpha - 1| \le |e^{i\alpha} - 1| \le |\alpha|.$$

Із наведених нерівностей випливає наступна нерівність $|\cos\alpha - 1| \le \frac{|\alpha|^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{2}}$. Із цих нерівностей для другого інтеграла (12) одержуємо

$$\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(\cos tx - 1)dF_{nk}(x)\right)^2 \le \int\limits_{-\infty}^{+\infty}(\cos tx - 1)^2dF_{nk}(x) =$$

$$= \int\limits_{|x|\le\varepsilon}(\cos tx - 1)^2dF_{nk}(x) + \int\limits_{|x|>\varepsilon}(\cos tx - 1)^2dF_{nk}(x) \le$$

$$\le \frac{|t|^3}{2}\int\limits_{|x|\le\varepsilon}|x|^3dF_{nk}(x) + t^2\int\limits_{|x|>\varepsilon}x^2dF_{nk}(x) = \frac{|t|^3}{2}\lambda_{nk}^{(1)} + t^2\lambda_{nk}^{(2)}. \qquad (14)$$

Тепер із нерівностей (3) отримаємо

$$|\sin\alpha - \alpha| = \left|Im\left(e^{i\alpha} - 1 - i\alpha - \frac{(i\alpha)^2}{2!}\right)\right| \le \left|e^{i\alpha} - 1 - i\alpha - \frac{(i\alpha)^2}{2!}\right| \le \frac{|\alpha|^3}{6},$$

$$|\sin\alpha - \alpha| = \left|Im(e^{i\alpha} - 1 - i\alpha)\right| \le |e^{i\alpha} - 1 - i\alpha| \le \frac{\alpha^2}{2},$$

тому

$$\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\sin tx dF_{nk}(x)\right)^2 \le \left|\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\sin tx dF_{nk}(x)\right| =$$

$$= \left|\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(\sin tx - tx)dF_{nk}(x)\right| \le \int\limits_{-\infty}^{+\infty}|\sin tx - tx|dF_{nk}(x) \le$$

$$\leq \int\limits_{|x|\leq\varepsilon} |\sin tx - tx| dF_{nk}(x) + \int\limits_{|x|>\varepsilon} |\sin tx - tx| dF_{nk}(x) \leq$$

$$\leq \frac{|t|^3}{6} \int\limits_{|x|\leq\varepsilon} |x|^3 dF_{nk}(x) + \frac{t^2}{2} \int\limits_{|x|>\varepsilon} x^2 dF_{nk}(x) = \frac{|t|^3}{6}\lambda_{nk}^{(1)} + \frac{t^2}{2}\lambda_{nk}^{(2)}. \tag{15}$$

Враховуючи (13), (14), (15) із (12) одержимо наступний результат:

$$|f_{nk}(t)|^2 = 1 - t^2\sigma_{nk}^2 + 2\left(\frac{|t|^3}{6}\lambda_{nk}^{(1)} + t^2\lambda_{nk}^{(2)}\right) + \frac{|t|^3}{2}\lambda_{nk}^{(1)} + t^2\lambda_{nk}^{(2)} + \frac{|t|^3}{6}\lambda_{nk}^{(1)} + \frac{t^2}{2}\lambda_{nk}^{(2)} =$$

$$= 1 - t^2\sigma_{nk}^2 + |t|^3\lambda_{nk}^{(1)} + \frac{7}{2}t^2\lambda_{nk}^{(2)} \leq \exp\left\{-t^2\sigma_{nk}^2 + |t|^3\lambda_{nk}^{(1)} + \frac{7}{2}t^2\lambda_{nk}^{(2)}\right\}.$$

Звідси маємо:

$$|f_{nk}(t)| \leq \exp\left\{-\frac{t^2}{2}\sigma_{nk}^2 + \frac{|t|^3}{2}\lambda_{nk}^{(1)} + \frac{7}{4}t^2\lambda_{nk}^{(2)}\right\},$$

а

$$|\varphi_n(t)| \leq \exp\left\{-\frac{t^2}{2} + \frac{|t|^3}{2}\lambda_n^{(1)} + \frac{7}{4}t^2\lambda_n^{(2)}\right\}. \tag{16}$$

З умов леми $\lambda_n^{(2)} \leq \frac{1}{14}$, $|t| \leq T_n = \left(4\lambda_n^{(1)}\right)^{-1}$ і (16) отримуємо

$$|\varphi_n(t)| \leq \exp\left\{-\frac{t^2}{2} + \frac{t^2}{2}\left(4\lambda_n^{(1)}\right)^{-1}\lambda_n^{(1)} + \frac{7}{4}t^2\frac{1}{14}\right\} = e^{-\frac{t^2}{4}}.$$

Отже,

$$\left|\varphi_n(t) - e^{-\frac{t^2}{2}}\right| \leq 2e^{-\frac{t^2}{4}}. \tag{17}$$

Оскільки ми розглядаємо випадок 2: $|t| > T_n'$, $|t| \leq T_n$, то із умови $|t| > T_n'$, де $T_n' = \min\left\{a_1\left(\lambda_n^{(1)}\right)^{-\frac{1}{3}}, a_2\left(\lambda_n^{(2)}\right)^{-\frac{1}{2}}\right\}$, одержимо: $|t| > a_1\left(\lambda_n^{(1)}\right)^{-\frac{1}{3}}$ або $|t| > a_2\left(\lambda_n^{(2)}\right)^{-\frac{1}{2}}$. Тому виконується принаймні одна із нерівностей: $a_1^{-3}\lambda_n^{(1)}|t|^3 > 1$, $a_2^{-2}\lambda_n^{(2)}|t|^2 > 1$. Якщо врахуємо, що $a_1 = 1,22$, $a_2 = \sqrt{0,174}$, то із (17) одержимо

$$\left|\varphi_n(t) - e^{-\frac{t^2}{2}}\right| \leq 2e^{-\frac{t^2}{4}}\left(a_1^{-3}\lambda_n^{(1)}|t|^3 + a_2^{-2}\lambda_n^{(2)}|t|^2\right) \leq$$

$$\leq e^{-\frac{t^2}{4}}\left(1,102\lambda_n^{(1)}|t|^3 + 11,495\lambda_n^{(2)}t^2\right). \tag{18}$$

Порівнюючи (11) і (18), переконуємось у справедливості леми. Лема доведена.

3. Доведення основної теореми. Скористаємося нерівністю ([4], стор. 299)

$$\sup_x |F(x) - G(x)| \leq \frac{2}{\pi}\int\limits_0^T \frac{|f(t) - g(t)|}{t}dt + \frac{24}{\pi T}\sup_{x\in R}|G'(x)|.$$

Покладемо $F(x) = \Phi_n(x)$, $G(x) = \Phi(x)$, $T = T_n$. Оскільки $G'(x) \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, тоді

$$\rho_n \leq \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{T_n} \left| \varphi_n(t) - e^{-\frac{t^2}{2}} \right| \frac{dt}{t} + \frac{24}{\pi\sqrt{2\pi}T_n}. \qquad (19)$$

Будемо вважати, що виконується умова $\lambda_n^{(2)} \leq \frac{1}{14}$, бо у протилежному випадку $\lambda_n^{(2)} > \frac{1}{14}$, $\rho_n \leq 1 < 14\lambda_n^{(2)}$, теорема є очевидною.

Із леми, нерівності (2), при $\lambda_n^{(2)} \leq \frac{1}{14}$ і $|t| \leq T_n = \left(4\lambda_n^{(1)}\right)^{-1}$

$$\left| \varphi_n(t) - e^{-\frac{t^2}{2}} \right| \leq e^{-\frac{t^2}{4}} \left(1,102\lambda_n^{(1)}|t|^3 + 11,495\lambda_n^{(2)}t^2\right).$$

Тоді із (19)

$$\rho_n \leq \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{T_n} e^{-\frac{t^2}{4}} \left(1,102\lambda_n^{(1)}t^2 + 11,495\lambda_n^{(2)}t\right) dt + \frac{24}{\pi\sqrt{2\pi}} 4\lambda_n^{(1)} \leq$$

$$\leq \lambda_n^{(1)} \frac{2,204}{\pi} \int\limits_0^{\infty} t^2 e^{-\frac{t^2}{4}} dt + \lambda_n^{(2)} \frac{22,99}{\pi} \int\limits_0^{\infty} t e^{-\frac{t^2}{4}} dt + \frac{96}{\pi\sqrt{2\pi}} \lambda_n^{(1)}.$$

Оскільки

$$\int\limits_0^{\infty} t e^{-\frac{t^2}{4}} dt = 2, \quad \int\limits_0^{\infty} t^2 e^{-\frac{t^2}{4}} dt = 2\sqrt{\pi},$$

то

$$\rho_n \leq \lambda_n^{(1)} \frac{2,204}{\pi} 2\sqrt{\pi} + \lambda_n^{(2)} \frac{22,99}{\pi} 2 + \frac{96}{\pi\sqrt{2\pi}} \lambda_n^{(1)} \leq \lambda_n^{(1)} 14,678 + \lambda_n^{(2)} 14,636.$$

Теорема доведена.

4. Наслідки. Нехай $\xi_{n1}, \xi_{n2}, ..., \xi_{nk_n}$ – незалежні випадкові величини з математичним сподіванням $M\xi_{nk} = 0$, дисперсією $D\xi_{nk} = \sigma_{nk}^2$, $0 < \sigma_{nk} < \infty$, $\sum\limits_{k=1}^{k_n} \sigma_{nk}^2 = 1$ і існує $M|\xi_{nk}|^r = \beta_{nk}^r$, $2 < r \leq 3$. Нехай $\varepsilon = 1$. Тоді із нерівності

$$\lambda_n^{(1)} + \lambda_n^{(2)} \leq \sum_{k=1}^{k_n} \beta_{nk}^r$$

випливає

Наслідок 1. *Для всіх $n \geq 1$ виконується нерівність $\rho_n \leq 14,678 \sum\limits_{k=1}^{k_n} \beta_{nk}^r$.*

Нехай $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ – послідовність незалежних випадкових величин з математичним сподіванням $M\xi_i = 0$, дисперсією $D\xi_i = \sigma_i^2$, $B_n^2 = \sigma_2^2 + \cdots + \sigma_n^2$. Позначимо через $F_k(x)$ функцію розподілу випадкової величини ξ_k і покладемо $\frac{\xi_k}{B_n} = \xi_{nk}$, $k_n = n$. Тоді

$$S_n = \frac{\xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n}{B_n}, \quad F_{nk}(x) = F_k(xB_n),$$

$$\lambda_{nk}^{(1)} = \int\limits_{|x|\le\varepsilon} |x|^3 dF_k(xB_n) = \frac{1}{B_n^3} \int\limits_{|x|\le\varepsilon B_n} |x|^3 dF_k(x),$$

$$\lambda_{nk}^{(2)} = \int\limits_{|x|>\varepsilon} x^2 dF_k(xB_n) = \frac{1}{B_n^2} \int\limits_{|x|>\varepsilon B_n} x^2 dF_k(x).$$

Нехай $\varepsilon = 1$. Із теореми одержуємо наступний

Наслідок 2. *Для всіх* $n \ge 1$ *виконується нерівність*

$$\rho_n \le 14,678 \left(\frac{1}{B_n^3} \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{|x|\le B_n} |x|^3 dF_k(x) + \frac{1}{B_n^2} \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{|x|>B_n} x^2 dF_k(x) \right).$$

Нехай $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ – послідовність незалежних випадкових величин з математичним сподіванням $M\xi_i = 0$, дисперсією $D\xi_i = \sigma_i^2$, $\beta_{ri} = M|\xi_i|^r$, $r \in (2,3]$, $B_n^2 = \sigma_2^2 + \cdots + \sigma_n^2$, $\beta_{3i} = M|\xi_i|^3$.

Наслідок 3. *Для всіх* $n \ge 1$ *виконується нерівність* $\rho_n \le 14,678 \frac{1}{B_n^r} \sum\limits_{k=1}^{n} \beta_{rk}$.

При $r = 3$ одержуємо нерівність Ессена.

Нехай випадкові величини ξ_k однаково розподілені з функцією розподілу $F(x)$, $M\xi_k = 0$, $D\xi_k = \sigma^2$, $B_n^2 = n\sigma^2$.

Із наслідку 2 одержуємо

Наслідок 4. *Для всіх* $n \ge 1$ *виконується нерівність*

$$\rho_n \le 14,678 \left(\frac{1}{\sigma^3 \sqrt{n}} \int\limits_{|x|\le\sigma\sqrt{n}} |x|^3 dF_k(x) + \frac{1}{\sigma^2} \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{|x|>\sigma\sqrt{n}} x^2 dF_k(x) \right).$$

Список використаної літератури

1. *Игнат Ю. И.* Об одной оценке отклонения от нормального закона распределения суммы в схеме серий // Теория вероятностей и математическая статистика. Межведомственный научный сборник. – Киев, 1956.– Вып. 25. – С. 25–29.
2. *Игнат Ю. И., Падитц Л.* Уточнение некот орых оценок отклонения от нормального закона распределения суммы независимых случайных величин // Теория вероятностей и математическая статистика. Межведомственный научный сборник. – Киев, 1987.– Вып. 37. – С. 57–66.
3. *Золотарёв В. М.* Современная теория суммирования независимых случайных величин. – М.: Наука, 1986.– 416 с.
4. *Лоэв М.* Теория вероятностей. – М.: Изд-во иностр. лит., 1962.– 720 с.

Одержано 28.10.2015