УДК 517.518:519.652

М. М. Пагіря (Мукачівський держ. ун-т)

РОЗВИНЕННЯ ФУНКЦІЇ $z\ln z$ В ЛАНЦЮГОВИЙ ДРІБ

The problem of expanded function of a complex variable $z\ln z$ in a continued fraction is investigated. Expansions functions in the continued fraction Thiele and in regular continued C–fraction are obtained. The convergence region of expansion is established.

Досліджувалася задача розвинення функції комплексної змінної $z\ln z$ в ланцюговий дріб. Отримані розвинення функції в ланцюговий дріб Тіле та в правильний ланцюговий C–дріб. Встановлена область збіжності розвинення.

1. Вступ. В якості наближення функцій комплексної змінної використовують багаточлени [1], дробово–раціональні функції [2] або апроксимації Паде [3]. Можна також наближати функції ланцюговими дробами [4–6]. Розвинення функцій в ланцюговий дріб має крім теоретичного ще і важливе практичне значення, оскільки розвинення функцій в ланцюгові дроби поряд із іншими наближеннями використовуються при обчислені значень функцій [7, 8].

Задача розвинення функцій дійсної змінної в ланцюговий дріб Тіле досліджувалася в роботах [9–11]. В дані роботі розглядається задача розвинення функцій комплексної змінної в ланцюговий дріб Тіле та еквівалентний йому правильний ланцюговий C–дріб. Зокрема отримано розвинення функції $z\ln z$ та встановлена область збіжності отриманого розвинення.

2. Розвинення функцій в ланцюгові дроби. Нехай функція комплексної змінної $f(z)$ визначена на деякому компакті $\mathbf{Z}\subset\mathbb{C}$. Будемо розглядати розвинення функції $f(z)$ в околі точки $z_*\in\mathbf{Z}$ в ланцюговий дріб Тіле [12]

$$T(z)=b_0+\frac{z-z_*}{b_1}\,\underset{+}{}\,\frac{z-z_*}{b_2}\,\underset{+}{}\,\cdots\underset{+}{}\,\frac{z-z_*}{b_n}\,\underset{+}{}\,\cdots=b_0+\operatorname*{K}_{k=1}^{\infty}\frac{z-z_*}{b_k},$$

та правильний ланцюговий C–дріб [13]

$$C(z)=a_0+\frac{a_1(z-z_*)}{1}\,\underset{+}{}\,\frac{a_2(z-z_*)}{1}\,\underset{+}{}\,\cdots\underset{+}{}\,\frac{a_n(z-z_*)}{1}\,\underset{+}{}\,\cdots=a_0+\operatorname*{K}_{k=1}^{\infty}\frac{a_k(z-z_*)}{1},$$

де $z_*,a_k,b_k\in\mathbb{C},k=0,1,\ldots$.

Скінчені ланцюгові дроби

$$T_n(z)=b_0+\operatorname*{K}_{k=1}^{n}\frac{z-z_*}{b_k},\quad C_n(z)=a_0+\operatorname*{K}_{k=1}^{n}\frac{a_k(z-z_*)}{1}$$

називають n–ми підхідними дробами (n–ми наближеннями) відповідних ланцюгових дробів.

Розвинення функцій в ланцюгові дроби шукають одним із наступних способів. Так для функцій $(1+z)^\alpha,\alpha\in\mathbb{C},\ln(1+z),e^z,\operatorname{tg}z$ розвинення в ланцюговий дріб в околі нуля, які були отримані Лагранжем, Ойлером, Ламбертом, пов'язані з відшуканням розв'язку диференціального рівняння Ріккаті з відповідними коефіцієнтами [4,14,15]. Виходячи з подання функції гіпергеометричним рядом отримуються розвинення функції в ланцюговий дріб Гаусса [5,7,13].

Розвинення функції в околі нуля в правильний ланцюговий C–дріб пов'язане з поняттям відповідності ланцюгового дробу формальному ряду Лорана.

Означення 1 ([1]). *Формальним рядом Лорана (ФРЛ) називають послідовність комплексних чисел* $\{c_n \,|\, c_n \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{Z}\}$, *яка записана у вигляді*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n\,, \tag{1}$$

де всі коефіцієнти c_n *з від'ємними індексами крім скінченого числа рівні нулю.*

З означення випливає, що ФРЛ L може бути поданий у вигляді

$$L = c_m z^m + c_{m+1} z^{m+1} + c_{m+2} z^{m+2} + \cdots\,, \qquad c_m \neq 0.$$

Очевидно, що якщо $m \geqslant 0$, то ФРЛ буде формальним степеневим рядом (ФСР). Формальні ряди Лорана вигляду (1) над полем $\mathbb{C}$ самі утворюють поле $\mathbb{L}_0$ — поле формальних рядів Лорана [1, с.53], [16, с.23].

Для кожного ФРЛ $L \in \mathbb{L}_0$ можна визначити

$$\lambda(L) = \begin{cases} m, & L(z) = \sum_{k=m}^{\infty} c_k z_k, \qquad c_m \neq 0, \\ \infty, & L(z) = 0. \end{cases}$$

Нехай $f(z)$ — функція, яка мероморфна в початку координат, тобто в деякому відкритому крузі, який містить початок координат. Розвинення функції $f(z)$ в ряд Лорана позначимо $\mathcal{L}(f(z))$.

Означення 2. *Говорять, що послідовність мероморфних в початку координат функцій* $\{R_n(z)\}$ *відповідна ФРЛ* L, *якщо* $\lim_{n\to\infty} \lambda(L - \mathcal{L}(R_n(z))) = \infty$.

Оскільки всяка мероморфна в початку координат функція $f(z)$ має єдине розвинення у ФРЛ, то взаємно–однозначне відображення $\mathcal{L}$ буде вкладенням поля $\mathcal{M}$ всіх мероморфних в початку координат функцій в поле $\mathbb{L}_0$. Порядок відповідності $R_n(z)$ ФРЛ L визначається наступним чином $\nu_n = \lambda(L - \mathcal{L}(R_n(z)))$.

Означення 3. *Ланцюговий дріб* $\mathbf{K}(a_n(z)/b_n(z))$ *називається відповідним ФРЛ* L, *якщо кожний підхідний дріб* $f_n(z)$ *мероморфна в початку координат функція і якщо послідовність підхідних дробів* $\{f_n(z)\}$ *відповідна* L.

Нехай функція $f(z)$ визначена ФСР

$$L = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n, \tag{2}$$

і нехай

$$H_0^{(n)} = 1,\ H_k^{(n)} = \begin{vmatrix} c_n & c_{n+1} & c_{n+2} & \cdots & c_{n+k-1} \\ c_{n+1} & c_{n+2} & c_{n+3} & \cdots & c_{n+k} \\ c_{n+2} & c_{n+3} & c_{n+4} & \cdots & c_{n+k+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n+k-1} & c_{n+k} & c_{n+k+1} & \cdots & c_{n+2k-2} \end{vmatrix}, \quad k = 1, 2, \ldots\,,$$

де $c_n = 0$, коли $n < 0$, пов'язанні з ФСР (2) визначники Ганкеля.

Теорема 1 ([13, с.220]). (A) *Якщо для заданого ФСР* (2) *існує правильний ланцюговий C–дріб*

$$1 + \mathop{\mathrm{K}}_{n=1}^{\infty} \frac{a_n z}{1}, \qquad a_n \neq 0, \tag{3}$$

який відповідний L (в точці $z = 0$), то

$$H_k^{(1)} \neq 0, \quad H_k^{(2)} \neq 0, \qquad k = 1, 2, \dots, \tag{4}$$

і

$$a_1 = H_1^{(1)},\ a_{2m} = -\frac{H_{m-1}^{(1)} H_m^{(2)}}{H_m^{(1)} H_{m-1}^{(2)}},\ a_{2m+1} = -\frac{H_{m+1}^{(1)} H_{m-1}^{(2)}}{H_m^{(1)} H_m^{(2)}}, \qquad m = 1, 2, \dots. \tag{5}$$

(Б) *Якщо співвідношення* (4) *має місце, то правильний ланцюговий C–дріб* (3), *коефіцієнти якого визначаються за допомогою* (5) *буде відповідним ФСР* (2).

Теорема 2 ([13, с.184]). *Нехай $1 + \mathbf{K}(a_n z/1)$ — правильний ланцюговий C–дріб, такий, що $\lim_{n\to\infty} a_n = a \neq 0$, де a комплексна константа, крім того $R_a = \{z : |\arg(az + 1/4)| < \pi\}$. Тоді*

(A) *Ланцюговий дріб збігається до функції $f(z)$, яка мероморфна в R_a;*

(Б) *збіжність буде рівномірна на кожній компактній підмножині K із R_a, яка не містить полюсів $f(z)$;*

(В) *функція $f(z)$ голоморфна в точці $z = 0$.*

Теорема 3 ([13, с.182]). *Нехай $\{f_n(z)\}$ — послідовність мероморфних в початку координат функцій, яка відповідна формальному степеневому ряду $L = c_0 + c_1 z + \ldots + c_n z^n + \ldots$, і нехай D — область, яка містить початок координат. Тоді*

(A) $\{f_n(z)\}$ збігається рівномірно на кожній компактній підмножині з D тоді і тільки тоді, коли $\{f_n(z)\}$ рівномірно обмежена на кожній такій підмножині;

(Б) якщо $\{f_n(z)\}$ збігається рівномірно на кожній компактній підмножині із D, то функція $f(z) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(z)$ буде голоморфною на D, а $L = \mathcal{L}(f)$ буде рядом Тейлора для $f(z)$ в точці $z = 0$.

3. Формула Тіле. Формула Тіле — аналог формули Тейлора в теорії ланцюгових дробів [12]. Нехай ${}^{(n)}f(z)$— обернена похідна Тіле n–го порядку, $n = 0, 1, \dots$, функції $f(z)$. Обернені похідні Тіле обчислюють за рекурентним співвідношенням [12, с.138–139]

$$\begin{aligned} {}^{(0)}f(z) &= f(z),\ {}^{(1)}f(z) = {}^{\backprime}f(z) = 1/f'(z), &(6a)\\ {}^{(n)}f(z) &= k\,{}^{\backprime}\big({}^{(n-1)}f(z)\big) + {}^{(n-2)}f(z), \qquad n = 2, 3, \dots. &(6b)\end{aligned}$$

Зауваження 1. *Із* (6b) *безпосередньо випливає, що ${}^{(n)}f(z) \neq {}^{\backprime}({}^{(n-1)}f(z))$ при $n = 2, 3, \dots$, а виконується співвідношення ${}^{\backprime}\big({}^{(n-1)}f(z)\big) = ({}^{(n)}f(z) - {}^{(n-2)}f(z))/n$.*

Якщо припустити, що в деякому околі точки $z = z_*$ функція $f(z)$ має нескінчену кількість обернених похідних Тіле, то отримаємо розвинення функції у формальний ланцюговий дріб Тіле (ФЛДТ)

$$f(z) = b_0 + \mathop{\mathrm{K}}_{n=1}^{\infty} \frac{z - z_*}{b_n}, \tag{7}$$

де

$$b_0 = f(z_*),\ b_1 = {}^{\backprime}f(z_*),\ b_n = n \cdot {}^{\backprime}\left({}^{(n-1)}f(z_*)\right) = {}^{(n)}f(z) - {}^{(n-2)}f(z),\ n = 2, 3, \ldots . \tag{8}$$

Аналогічно, як і у випадку функції дійсної змінної [11], доводяться наступні твердження.

Теорема 4. *Нехай для $z \in \mathbf{Z}$ існують скінчені та відмінні від нуля обернені похідні функцій $u = u(z)$ та $v = v(z)$. Тоді існують обернені похідні суми, різниці, добутку та частки цих функцій, які визначаються за формулами:*

$$ {}^{\backprime}(u \pm v) = \frac{{}^{\backprime}u \cdot {}^{\backprime}v}{{}^{\backprime}v \pm {}^{\backprime}u}\ , \quad {}^{\backprime}(u \cdot v) = \frac{{}^{\backprime}u \cdot {}^{\backprime}v}{{}^{\backprime}u \cdot u + {}^{\backprime}v \cdot v}\ , \quad {}^{\backprime}(u/v) = \frac{v^2 \cdot {}^{\backprime}u \cdot {}^{\backprime}v}{{}^{\backprime}v \cdot v - {}^{\backprime}u \cdot u}\ . \tag{9}$$

Теорема 5. *Якщо $C = Const$, то при $n = 0, 1, 2, \ldots,$ мають місце співвідношення*

$$\begin{gathered} {}^{(2n)}(Cf(z)) = C \cdot {}^{(2n)}f(z)\ , \quad {}^{(2n+1)}(Cf(z)) = \tfrac{1}{C} \cdot {}^{(2n+1)}f(z)\ , \\ {}^{(2n)}(f(z) + C) = {}^{(2n)}f(z) + C, \quad {}^{(2n+1)}(f(z) + C) = {}^{(2n+1)}f(z)\ . \end{gathered} \tag{10}$$

Теорема 6. *Якщо для $z \in \mathbf{Z}$ функції $f_i(z), i = 1, 2, \ldots, n,$ мають скінчені відмінні від нуля обернені похідні, то*

$$ {}^{\backprime}\left(\sum_{i=1}^{n} f_i(z)\right) = \frac{\prod\limits_{i=1}^{n} {}^{\backprime}f_i(z)}{\sum\limits_{i=1}^{n} \prod\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} {}^{\backprime}f_j(z)}\ , \quad {}^{\backprime}\left(\prod_{i=1}^{n} f_i(z)\right) = \frac{\prod\limits_{i=1}^{n} {}^{\backprime}f_i(z)}{\sum\limits_{i=1}^{n} \prod\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} {}^{\backprime}f_j(z)\, f_j(z)}\ . \tag{11}$$

Зауваження 2. *Із другої формули* (11) *випливає, що*

$$ {}^{\backprime}(f(z)^n) = \frac{{}^{\backprime}f(z)}{n\,(f(z))^{n-1}}\ .$$

Для того, щоб подати коефіцієнти ланцюгового дробу Тіле (7) через відношення визначників Ганкеля нам потрібні наступні твердження.

Теорема 7 (Формула Ньорлунда [17, с.427])**.** *Якщо функція $f(z)$ аналітична в $\mathbf{Z} \subset \mathbb{C}$, то обернені похідні Тіле функції визначаються через похідні функції як відношення визначників Ганкеля наступним чином*

$$ {}^{(2k)}f(z) = \frac{H_{k+1}^{(0)}}{H_k^{(2)}}, \quad {}^{(2k+1)}f(z) = \frac{H_k^{(3)}}{H_{k+1}^{(1)}}, \qquad k = 1, 2, \ldots . \tag{12}$$

Теорема 8 (Тотожність Якобі [1, с.595]). *Для всіх цілих n та $k \geqslant 1$ для визначників Ганкеля має місце тотожність Якобі*

$$\big(H_k^{(n)}\big)^2 - H_k^{(n-1)} H_k^{(n+1)} + H_{k+1}^{(n-1)} H_{k-1}^{(n+1)} = 0\ . \tag{13}$$

Теорема 9. *Коефіцієнти ланцюгового дробу Тіле (7) визначаються через визначники Ганкеля наступним чином*

$$b_{2k} = -\frac{\big(H_k^{(1)}\big)^2}{H_k^{(2)} H_{k-1}^{(2)}}, \quad b_{2k+1} = \frac{\big(H_k^{(2)}\big)^2}{H_k^{(1)} H_{k+1}^{(1)}}, \qquad k = 1, 2, \dots \tag{14}$$

Доведення. Оскільки $b_{2k} = (2k)^{\backprime}\big({}^{(2k-1)}f(z)\big) = {}^{(2k)}f(z) - {}^{(2k-2)}f(z)$, то з першої формули (12) та (13) маємо

$$b_{2k} = \frac{H_{k+1}^{(0)}}{H_k^{(2)}} - \frac{H_k^{(0)}}{H_{k-1}^{(2)}} = \frac{H_{k+1}^{(0)} H_{k-1}^{(2)} - H_k^{(0)} H_k^{(2)}}{H_k^{(2)} H_{k-1}^{(2)}} = -\frac{\big(H_k^{(1)}\big)^2}{H_k^{(2)} H_{k-1}^{(2)}}\ .$$

Аналогічно з другої формули (12) та (13) отримуємо

$$b_{2k+1} = (2k+1)^{\backprime}\big({}^{(2k)}f(z)\big) = {}^{(2k+1)}f(z) - {}^{(2k-1)}f(z) = \frac{H_k^{(3)}}{H_{k+1}^{(1)}} - \frac{H_{k-1}^{(0)}}{H_k^{(1)}} = \frac{\big(H_k^{(2)}\big)^2}{H_k^{(1)} H_{k+1}^{(1)}}\ .$$

Зауваження 3. *Формули* (14) *іншим, більш довшим шляхом у випадку функції дійсної змінної без використання тотожності Якобі* (13) *були доведені в [17, с.428–429].*

4. Розвинення функції $z\ln z$ в ланцюговий дріб Тіле. Розглянемо розвинення функції $z\ln z$ в ланцюговий дріб.

Теорема 10. ***(A)*** *Функція $w = z\ln z$ має обернені похідні Тіле довільного порядку, які визначаються згідно із формулами*

$$ {}^{(0)}(z\ln z) = z\ln z, \quad {}^{(1)}(z\ln z) = \frac{1}{\ln z + 1}, \tag{15a}$$

$$ {}^{(2)}(z\ln z) = -z(2\ln^2 z + 3\ln z + 2), \quad {}^{(3)}(z\ln z) = \frac{1}{\ln z + 5/2}, \tag{15b}$$

$$ {}^{(2n)}(z\ln z) = -z\Big(n(n+1)\ln^2 z + \alpha_n \ln z + \frac{\alpha_n^2 + 4n^4 + 8n^3 - 4n - 1}{4n(n+1)}\Big), \tag{15c}$$

$$ {}^{(2n+1)}(z\ln z) = 1\Big/\Big(\ln z + \frac{\alpha_n + 2(n+1)^2 - 1}{2n(n+1)}\Big), \qquad n = 2, 3, \dots, \tag{15d}$$

де

$$\alpha_1 = 3, \quad \alpha_n = \frac{(n+1)\alpha_{n-1} + 2(2n^2 - 1)}{n-1}, \qquad n = 2, 3, \dots. \tag{16}$$

(B) *Коефіцієнти розвинення функції в околі точки $z = z_*$ в ланцюговий дріб*

Тіле рівні

$$b_0 = z_* \ln z_*, \quad b_1 = \frac{1}{\ln z_* + 1}, \tag{17a}$$

$$b_2 = -2z_*(\ln z_* + 1)^2, \quad b_3 = \frac{-3/2}{(\ln z_* + 5/2)(\ln z_* + 1)}, \tag{17b}$$

$$b_{2n} = -2n\, z_* \big(\ln z_* + a_{n-1} \big)^2, \tag{17c}$$

$$b_{2n+1} = \frac{-(2n+1)}{n(n+1)\big(\ln z_* + a_n\big)\big(\ln z_* + a_{n-1}\big)}\,, \qquad n = 2, 3, \dots\,, \tag{17d}$$

де

$$a_0 = 1,\ a_n = \frac{\alpha_n + 2(n+1)^2 - 1}{2n(n+1)}\,, \qquad n = 1, 2, \dots\,. \tag{18}$$

Доведення. **(A)** З (6a)–(6b) безпосередньо випливають (15a)–(15b). Зробимо припущення, що (15c),(15d) та (16) виконуються при $n = k-1$. Тоді при $n = k$ отримуємо

$$^{(2k)}w = 2k^{\backprime}\left(1\Big/\left(\ln z + \frac{\alpha_{k-1} + 2k^2 - 1}{2(k-1)k}\right)\right) - z\Big((k-1)k\ln^2 z + \alpha_{k-1}\ln z + \big(\alpha_{k-1}^2 +$$

$$+4(k-1)^4 + 8(k-1)^3 - 4(k-1) - 1\big)/4(k-1)k\Big) = -2kz\left(\ln z + \frac{\alpha_{k-1} + 2k^2 - 1}{2(k-1)k}\right)^2 -$$

$$-z\left((k-1)k\ln^2 z + \alpha_{k-1}\ln z + \frac{\alpha_{k-1}^2 + 4(k-1)^4 + 8(k-1)^3 - 4(k-1) - 1}{4(k-1)k}\right) =$$

$$= -z\left(k(k+1)\ln^2 z + \frac{\big((k+1)\alpha_{k-1} + 2(2k^2-1)\big)\ln z}{k-1} + \frac{2(\alpha_{k-1} + 2k^2 - 1)^2}{4k(k-1)^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{\alpha_{k-1} + 4k^4 - 8k^3 + 4k - 1}{4k(k-1)}\right) = -z\left(k(k+1)\ln^2 z + \frac{(k+1)\alpha_{k-1} + 2(2k^2-1)}{k-1}\ln z + \right.$$

$$\left. + \frac{(k+1)\alpha_{k-1}^2 + 4(2k^2-1)\alpha_{k-1} + 2(2k^2-1)^2 + (k-1)(4k^4 - 8k^3 + 4k - 1)}{4k(k-1)^2}\right) =$$

$$= -z\left(k(k+1)\ln^2 z + \frac{(k+1)\alpha_{k-1} + 2(2k^2-1)}{k-1}\ln z + \frac{(k+1)\alpha_{k-1}^2 + 4(2k^2-1)\alpha_{k-1}}{4k(k-1)^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{4k^5 - 4k^4 + 8k^3 - 4k^2 - 5k + 3}{4k(k-1)^2}\right) = -z\left(k(k+1)\ln^2 z + \frac{(k+1)\alpha_{k-1} + 2(2k^2-1)}{k-1}\ln z + \right.$$

$$\left. + \frac{(k+1)^2\alpha_{k-1}^2 + 4(2k^2-1)(k+1)\alpha_{k-1} + 4k^6 + 4k^4 + 4k^3 - 9k^2 - 2k + 3}{4k(k+1)(k-1)^2}\right) =$$

$$= -z\left(k(k+1)\ln^2 z + \frac{(k+1)\alpha_{k-1} + 2(2k^2-1)}{k-1}\ln z + \frac{((k+1)\alpha_{k-1} + 2(2k^2-1))^2}{4k(k+1)(k-1)^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{(k-1)^2(4k^4 + 8k^3 - 4k - 1)}{4k(k+1)(k-1)^2}\right) = -z\Big(k(k+1)\ln^2 z + \frac{(k+1)\alpha_{k-1} + 2(2k^2-1)}{k-1}\ln z +$$

$$+\frac{\left(\frac{(k+1)\alpha_{k-1}+2(2k^2-1)}{(k-1)}\right)^2 + 4k^4 + 8k^3 - 4k - 1}{4k(k+1)}\Bigg) =$$

$$= -z\Bigg(k(k+1)\ln^2 z + \alpha_k \ln z + \frac{\alpha_k^2 + 4k^4 + 8k^3 - 4k - 1}{4k(k+1)}\Bigg),$$

де

$$\alpha_k = \frac{(k+1)\alpha_{k-1} + 2(2k^2-1)}{(k-1)}. \tag{19}$$

Отже, (15c) має місце.

Аналогічно маємо, що

$$^{(2k+1)}w = (2k+1)\backprime\big(-z\big(k(k+1)\ln^2 z + \alpha_k \ln z + c_k\big)\big) + \frac{1}{\ln z + \frac{\alpha_{k-1}+2k^2-1}{2(k-1)k}},$$

де $c_k = (\alpha_k^2 + 4k^4 + 8k^3 - 4k - 1)/4k(k+1)$.

Згідно із (9)

$$^{(2k+1)}w = -(2k+1)\Big(\backprime z \cdot \backprime\big(k(k+1)\ln^2 z + \alpha_k \ln z + c_k\big)\Big)\Big/\Big(\backprime z \cdot z + \backprime\big(k(k+1)\ln^2 z +$$

$$+\alpha_k \ln z + c_k\big)\big(k(k+1)\ln^2 z + \alpha_k \ln z + c_k\big)\Big) + \frac{1}{\ln z + \frac{\alpha_{k-1}+2k^2-1}{2(k-1)k}}.$$

З (9), (10) та (11) маємо, що

$$\backprime\big(k(k+1)\ln^2 z + \alpha_k \ln z + c_k\big) = \frac{\backprime(k(k+1)\ln^2 z)\cdot \backprime(\alpha_k \ln z + c_k)}{\backprime(k(k+1)\ln^2 z) + \backprime(\alpha_k \ln z + c_k)} = \frac{z}{\alpha_k + 2k(k+1)\ln z}.$$

Тоді

$$^{(2k+1)}w = \frac{\frac{-(2k+1)z}{\alpha_k + 2k(k+1)\ln z}}{z + \big(k(k+1)\ln^2 z + \alpha_k \ln z + c_k\big)\frac{z}{\alpha_k + 2k(k+1)\ln z}} + \frac{1}{\ln z + \frac{\alpha_{k-1}+2k^2-1}{2(k-1)k}} =$$

$$= \frac{-(2k+1)}{k(k+1)\ln^2 z + (\alpha_k + 2k(k+1))\ln z + \alpha_k + c_k} + \frac{1}{\ln z + \frac{\alpha_{k-1}+2k^2-1}{2(k-1)k}}.$$

З (19) маємо, що $\alpha_{k-1} = ((k-1)\alpha_k - 2(2k^2-1))/(k+1)$. А тоді

$$^{(2k+1)}w = \frac{-(2k+1)}{k(k+1)\ln^2 z + (\alpha_k + 2k(k+1))\ln z + \alpha_k + \frac{\alpha_k^2 + 4k^4 + 8k^3 - 4k - 1}{4k(k+1)}} +$$

$$+\frac{1}{\ln z + \frac{\alpha_k + 2k^2 - 1}{2(k+1)k}} = -4k(k+1)(2k+1)\big/\big(4k^2(k+1)^2\ln^2 z + 4k(k+1)(\alpha_k + 2k(k+1))\times$$

$$\times \ln z + 4k(k+1)\alpha_k + \alpha_k^2 + 4k^4 + 8k^3 - 4k - 1\big) + \frac{2(k+1)k}{2(k+1)k\ln z + \alpha_k + 2k^2 - 1}.$$

Оскільки

$$4k^2(k+1)^2\ln^2 z + 4k(k+1)(\alpha_k + 2k(k+1))\ln z + 4k(k+1)\alpha_k + \alpha_k^2 + 4k^4 + 8k^3 -$$

$$-4k-1=\big(2k(k+1)\ln z+\alpha_k+2k^2-1\big)\,\big(2k(k+1)\ln z+\alpha_k+2k^2+4k+1\big),$$

то

$$^{(2k+1)}w=\frac{-4k(k+1)(2k+1)}{(2k(k+1)\ln z+\alpha_k+2k^2-1)(2k(k+1)\ln z+\alpha_k+2k^2+4k+1)}+$$

$$+\frac{2(k+1)k}{2(k+1)k\ln z+\alpha_k+2k^2-1}=\frac{2(k+1)k}{2(k+1)k\ln z+\alpha_k+2k^2+4k+1}=$$

$$=\frac{1}{\ln z+\frac{\alpha_k+2(k+1)^2-1}{2k(k+1)}}.$$

Формула (15d) виконується при $n=k$.

(B) Формули (17a)–(17b) безпосередньо випливають з (15a)–(15b). З (15c) маємо

$$b_{2n}={}^{(2n)}w-{}^{(2n-2)}w=-z_*\left(n(n+1)\ln^2 z_*+\alpha_n\ln z_*+\frac{\alpha_n^2+4n^4+8n^3-4n-1}{4n(n+1)}\right)+$$

$$+z_*\left((n-1)n\ln^2 z_*+\alpha_{n-1}\ln z_*+\frac{\alpha_{n-1}^2+4(n-1)^4+8(n-1)^3-4(n-1)-1}{4(n-1)n}\right)=$$

$$=-z_*(2n\ln^2 z_*+\bar\alpha_n\ln z_*+\bar\beta_n),$$

де $\bar\alpha_n=\alpha_n-\alpha_{n-1}$, $\quad\bar\beta_n=\frac{\alpha_n^2+4n^4+8n^3-4n-1}{4n(n+1)}-\frac{\alpha_{n-1}^2+4n^4-8n^3+4n-1}{4(n-1)n}$. Згідно з (16) можна записати $\bar\alpha_n$ та $\bar\beta_n$ наступним чином

$$\bar\alpha_n=\frac{(n+1)\alpha_{n-1}+2(2n^2-1)}{n-1}-\alpha_{n-1}=4n\frac{\alpha_{n-1}+2n^2-1}{2n(n-1)},$$

$$\bar\beta_n=\frac{\frac{((n+1)\alpha_{n-1}+2(2n^2-1))^2}{(n-1)^2}+4n^4+8n^3-4n-1}{4n(n+1)}-\frac{\alpha_{n-1}^2+4n^4-8n^3+4n-1}{4(n-1)n}=$$

$$=\frac{1}{4n(n+1)(n-1)^2}\Big(\big((n+1)\alpha_{n-1}+2(2n^2-1)\big)^2+(n-1)^2(4n^4+8n^3-4n-1)-$$

$$-(n^2-1)(\alpha_{n-1}^2+4n^4-8n^3+4n-1)\Big)=\frac{1}{4n(n+1)(n-1)^2}\Big(2(n+1)\alpha_{n-1}^2+$$

$$+4(n+1)(2n^2-1)\alpha_{n-1}+2(n+1)(2n^2-1)^2\Big)=2n\left(\frac{\alpha_{n-1}+2n^2-1}{2(n-1)n}\right)^2.$$

Тоді $b_{2n}=-2nz_*\left(\ln z_*+\frac{\alpha_{n-1}+2n^2-1}{2n(n-1)}\right)^2=-2nz_*\big(\ln z_*+a_{n-1}\big)^2$. Формула (17c) виконується.

Аналогічно з (15d) випливає

$$b_{2n+1}={}^{(2n+1)}w-{}^{(2n-1)}w=\frac{1}{\ln z_*+\frac{\alpha_n+2(n+1)^2-1}{2n(n+1)}}-\frac{1}{\ln z_*+\frac{\alpha_{n-1}+2n^2-1}{2(n-1)n}}=$$

$$=\frac{-\bar\gamma_n}{\left(\ln z_*+\frac{\alpha_n+2(n+1)^2-1}{2n(n+1)}\right)\left(\ln z_*+\frac{\alpha_{n-1}+2n^2-1}{2(n-1)n}\right)},$$

$$\bar{\gamma}_n = \frac{\alpha_n + 2(n+1)^2 - 1}{2n(n+1)} - \frac{\alpha_{n-1} + 2n^2 - 1}{2(n-1)n}.$$

Підставимо значення α_n з (16), маємо

$$\bar{\gamma}_n = \frac{\frac{(n+1)\alpha_{n-1}+2(2n^2-1)}{n-1} + 2(n+1)^2 - 1}{2n(n+1)} - \frac{\alpha_{n-1} + 2n^2 - 1}{2(n-1)n} = \frac{2n+1}{n(n+1)}.$$

Кінцеве отримуємо $b_{2n+1} = -(2n+1)/n(n+1)\big(\ln z_* + a_n\big)\big(\ln z_* + a_{n-1}\big)$. Формула (17d) виконується.

Із теореми випливає, що в околі точки $z_* \neq 0$ розвинення функції $z\ln z$ в ланцюговий дріб Тіле після еквівалентних перетворень має вигляд

$$z\ln z = z_*\ln z_* + \frac{(z-z_*)(\ln z_*+1)}{1} \underset{+}{} \frac{z-z_*}{-2z_*(\ln z_*+1)} \underset{+}{} \frac{(z-z_*)(\ln z_*+5/2)}{-3/2} \underset{+}{}$$

$$\underset{+}{} \frac{(z-z_*)(\ln z_*+1)}{-4z_*(\ln z_*+5/2)} \underset{+}{} \frac{(z-z_*)(\ln z_*+10/3)}{-5/6} \underset{+}{} \cdots \underset{+}{} \frac{(z-z_*)(\ln z_*+a_{n-1})}{-(2n-1)/(n-1)n} \underset{+}{}$$

$$\underset{+}{} \frac{(z-z_*)(\ln z_*+a_{n-2})}{-2nz_*(\ln z_*+a_{n-1})} \underset{+}{} \frac{(z-z_*)(\ln z_*+a_n)}{-(2n+1)/n(n+1)} \underset{+}{} \frac{(z-z_*)(\ln z_*+a_{n-1})}{-2(n+1)z_*(\ln z_*+a_n)} \underset{+}{} \cdots.$$

В околі точки $z_* = 1$ маємо розвинення

$$z\ln z = \frac{z-1}{1} \underset{+}{} \frac{z-1}{-2} \underset{+}{} \frac{5/2(z-1)}{-3/2} \underset{+}{} \frac{z-1}{-10} \underset{+}{} \frac{10/3(z-1)}{-5/6} \underset{+}{} \frac{5/2(z-1)}{-20} \underset{+}{} \cdots \underset{+}{}$$

$$\underset{+}{} \frac{a_{n-1}(z-1)}{-(2n-1)/(n-1)n} \underset{+}{} \frac{a_{n-2}(z-1)}{-2na_{n-1}} \underset{+}{} \frac{a_n(z-1)}{-(2n+1)/n(n+1)} \underset{+}{} \frac{a_{n-1}(z-1)}{-2(n+1)a_n} \underset{+}{} \cdots.$$

5. Розвинення функції $z\ln z$ в правильний ланцюговий C–дріб. Спочатку доведемо одне допоміжне твердження.

Теорема 11. *Якщо коефіцієнти ФСР*

$$\mathcal{L} = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n (z-z_*)^n, \tag{20}$$

такі, що

$$c_0 \neq 0,\ H_k^{(1)} \neq 0,\ H_k^{(2)} \neq 0, \qquad k = 1, 2, \dots, \tag{21}$$

де $H_k^{(n)}$ *— визначник Ганкеля утворений з коефіцієнтів ФСР* $\mathcal{L}$*, то правильний ланцюговий* C*–дріб*

$$\mathcal{C} = a_0 + \mathop{\mathrm{K}}_{n=1}^{\infty} \frac{a_n(z-z_*)}{1}$$

буде відповідним в точці $z_* \neq 0$ *ФСР* (20)*, де*

$$a_0 = c_0,\ a_1 = c_1,\ a_{2k} = -\frac{H_{k-1}^{(1)} H_k^{(2)}}{H_k^{(1)} H_{k-1}^{(2)}},\ a_{2k+1} = -\frac{H_{k+1}^{(1)} H_{k-1}^{(2)}}{H_k^{(1)} H_k^{(2)}}, \quad k = 1, 2, \dots. \tag{22}$$

Доведення. Запишемо ФСР $\mathcal{L}$ наступним чином

$$\mathcal{L} = c_0\,\tilde{\mathcal{L}} = c_0\Big(1+\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{c}_n\tilde{z}^n\Big), \qquad \tilde{c}_n = \frac{c_n}{c_0}, \quad n=1,2,\ldots, \quad \tilde{z} = z - z_*.$$

За припущенням $c_0 \neq 0$, $H_k^{(1)} \neq 0, H_k^{(2)} \neq 0$, то згідно із теоремою 1 правильний ланцюговий C–дріб

$$\tilde{\mathfrak{C}} = 1 + \mathop{\mathrm{K}}_{n=1}^{\infty}\frac{\tilde{a}_n\tilde{z}}{1},$$

коефіцієнти якого рівні

$$\tilde{a}_1 = \tilde{H}_1^{(1)}, \quad \tilde{a}_{2k} = -\frac{\tilde{H}_{k-1}^{(1)}\tilde{H}_k^{(2)}}{\tilde{H}_k^{(1)}\tilde{H}_{k-1}^{(2)}}, \quad \tilde{a}_{2k+1} = -\frac{\tilde{H}_{k+1}^{(1)}\tilde{H}_{k-1}^{(2)}}{\tilde{H}_k^{(1)}\tilde{H}_k^{(2)}},$$

де

$$\tilde{H}_0^{(n)} = 1, \qquad \tilde{H}_k^{(n)} = \begin{vmatrix} \tilde{c}_n & \tilde{c}_{n+1} & \cdots & \tilde{c}_{n+k-1} \\ \tilde{c}_{n+1} & \tilde{c}_{n+2} & \cdots & \tilde{c}_{n+k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{c}_{n+k-1} & \tilde{c}_{n+k} & \cdots & \tilde{c}_{n+2k-2} \end{vmatrix}, \quad k = 1,2,3,\ldots,$$

буде відповідний ФСР $\tilde{\mathcal{L}}$. Врахувавши, що $\tilde{H}_s^{(n)} = H_s^{(n)}/(c_0)^s$ кінцеве маємо

$$\tilde{a}_1 = \frac{H_1^{(1)}}{c_0} = \frac{a_1}{c_0}, \quad \tilde{a}_{2k} = -\frac{H_{k-1}^{(1)}H_k^{(2)}}{H_k^{(1)}H_{k-1}^{(2)}} = a_{2k}, \quad \tilde{a}_{2k+1} = -\frac{H_{k+1}^{(1)}H_{k-1}^{(2)}}{H_k^{(1)}H_k^{(2)}} = a_{2k+1}.$$

Нехай

$$f(z) = b_0 + \mathop{\mathrm{K}}_{n=1}^{\infty}\frac{z - z_*}{b_n} \tag{23}$$

формальне розвинення функції $f(z)$ в околі точки $z = z_*$ в ланцюговий дріб за формулою Тіле (7). Запишемо ланцюговий дріб (23) у вигляді еквівалентного ланцюгового дробу з частинними знаменниками рівними одиниці

$$f(z) = \omega_0 + \mathop{\mathrm{K}}_{n=1}^{\infty}\frac{\omega_n(z - z_*)}{1}, \tag{24}$$

де

$$\omega_0 = b_0,\ \omega_1 = \frac{1}{b_1},\ \omega_n = \frac{1}{b_{n-1}b_n}, \qquad n = 2,3,\ldots. \tag{25}$$

З іншого боку, якщо функція $f(z)$ в деякому околі точки $z = z_*$ розвинута в ФСР

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}c_n(z - z_*)^n, \qquad \text{де} \quad c_n = \frac{f^{(n)}(z_*)}{n!}, \tag{26}$$

то існує відповідний правильний ланцюговий C–дріб, що

$$f(z) = a_0 + \mathop{\mathrm{K}}_{n=1}^{\infty}\frac{a_n(z - z_*)}{1}, \tag{27}$$

де коефіцієнти a_n визначаються за (22).

Теорема 12. *Коефіцієнти ланцюгових дробів* (24) *та* (27) *рівні між собою, тобто* $a_n = \omega_n,\ n = 0, 1, \ldots$.

Доведення. Очевидно, що $a_0 = \omega_0, a_1 = \omega_1$. Визначимо коефіцієнти ω_n ланцюгового дробу (24) через визначники Ганкеля. Із (14) та (25) маємо

$$\omega_{2k} = -\frac{H_k^{(2)} H_{k-1}^{(2)} H_{k-1}^{(1)} H_k^{(1)}}{\left(H_k^{(1)}\right)^2 \left(H_{k-1}^{(2)}\right)^2} = -\frac{H_k^{(2)} H_{k-1}^{(1)}}{H_k^{(1)} H_{k-1}^{(2)}} = a_{2k}\ ,$$

$$\omega_{2k+1} = -\frac{H_k^{(1)} H_{k+1}^{(2)} H_{k-1}^{(2)} H_k^{(2)}}{\left(H_k^{(1)}\right)^2 \left(H_k^{(2)}\right)^2} = -\frac{H_{k-1}^{(2)} H_{k+1}^{(1)}}{H_k^{(1)} H_k^{(2)}} = a_{2k+1}\,, \qquad k = 1, 2, \ldots .$$

Із доведеної теореми випливають наступні важливі висновки.

Наслідок 1. *Відповідний правильний ланцюговий C–дріб* (27) *і ланцюговий дріб* (24) *еквівалентні.*

Наслідок 2. *Розвинення в ланцюговий дріб Тіле* (7) *функції $f(z)$ є відповідним в точці $z = z_*$ розвиненню у ФСР* (26) *цієї функції тоді і тільки тоді, коли для визначників Ганкеля виконується співвідношення*

$$c_0 \neq 0, \quad H_k^{(1)} \neq 0, \quad H_k^{(2)} \neq 0, \qquad k = 1, 2, \ldots .$$

Зауваження 4. *В [18, с.249] показано, що інтерполяційний ланцюговий дріб Тіле*

$$D_n(z) = b_0 + \mathop{\mathrm{K}}_{k=1}^{n} \frac{z - z_{k-1}}{b_k},$$

де $z_k, k = 0, 1, \ldots, n,$ — інтерполяційні вузли, $b_k, k = 0, 1, \ldots, n,$— коефіцієнти ланцюгового дробу, які побудовані за значеннями функції $f(z)$ в інтерполяційних вузлах, не буде відповідним степеневому ряду, в той же час граничний випадок такого інтерполяційного ланцюгового дробу, тобто випадок, коли всі вузли інтерполяції $z_0, z_1, \ldots, z_n$ прямують до одного і того ж значення z_* дає формальний ланцюговий дріб Тіле, який відповідний формальному степеневому ряду в точці $z = z_*$.

Відповідний ФСР правильний ланцюговий C–дріб (21) еквівалентний ФЛДТ (7). А тоді коефіцієнти правильного ланцюгового C–дробу можуть бути знайдені не через відношення чотирьох визначників Ганкеля (5), а через коефіцієнти ФЛДТ, тобто через обернені похідні Тіле наступним чином

$$\omega_0 = f(z_*), \quad \omega_1 = \frac{1}{{}^{\backprime}f(z_*)}, \quad \omega_n = \frac{1}{n(n-1)^{\backprime}\left({}^{(n-1)}f(z_*)\right)^{\backprime}\left({}^{(n-2)}f(z_*)\right)}\,, \tag{28}$$

коли $n = 2, 3, \ldots$. Формули безпосередньо випливають з (8) та (25).

Теорема 13. *Якщо функція $f(z)$ в деякому околі точки $z = z_*$ має розвинення в правильним ланцюговий C–дріб* (24) *і $\lim_{n\to\infty} \omega_n = a \neq 0,\ a \in \mathbb{C}$, то:*

(A) *Ланцюговий дріб* (24) *збігається до $f(z)$.*

(B) *Збіжність буде рівномірною на кожному компакті $\mathbf{Z} \subset \mathbf{R}_a(z_*)$, який не містить полюсів функції $f(z)$, де $\mathbf{R}_a(z_*) = \{z \in \mathbb{C}\ :\ |\arg(a(z - z_*) + 1/4)| < \pi\}$.*

Доведення. Зробимо позначення $\bar{z} = z - z_*$. Тоді (24) запишеться у вигляді

$$f(z) = \omega_0\left(1 + \frac{\omega_1\bar{z}/\omega_0}{1} + \mathop{\mathrm{K}}_{n=2}^{\infty}\frac{\omega_n\bar{z}}{1}\right).$$

Правильний ланцюговий C–дріб в круглих дужках збігається і збігається рівномірно до мероморфної функції $\tilde{f}(z)$ на довільному компакті $\mathbf{Z} \subset \mathbf{R}_a$, який не містить полюсів функції $\tilde{f}(z)$ і функція $\tilde{f}(z)$ голоморфна в точці $\bar{z} = 0$. Тоді $\bar{f}(z) = \omega_0\,\tilde{f}(z - z_*)$. Згідно із наслідком 1 ланцюговий дріб (24) відповідний степеневому ряду $\mathcal{L}(f)$ функції $f(z)$ в точці z_*. Згідно із теоремою 3 $\mathcal{L}(f) = \mathcal{L}(\bar{f})$. Виходячи із єдиності розвинення функції в степеневий ряд Тейлора маємо, що $f(z) = \bar{f}(z)$.

Функцію $w = z\ln z$ також можна розвинути в правильний ланцюговий C–дріб.

Теорема 14. ***(A)*** *Функція $w = z\ln z$ в околі точки $z = z_*$ має розвинення в правильний ланцюговий C–дріб вигляду*

$$z\ln z = \mathfrak{a}_0 + \mathop{\mathrm{K}}_{k=1}^{\infty}\frac{\mathfrak{a}_k(z - z_*)}{1}\,, \tag{29}$$

де

$$\mathfrak{a}_0 = z_*\ln z_*,\ \mathfrak{a}_1 = \ln z_* + 1,\ \mathfrak{a}_2 = \frac{-1}{2z_*(\ln z_* + 1)},\ \mathfrak{a}_3 = \frac{3(\ln z_* + 5/2)}{4z_*(\ln z_* + 1)},$$

$$\mathfrak{a}_{2n} = \frac{(n-1)(\ln z_* + a_{n-2})}{2(2n-1)\,z_*(\ln z_* + a_{n-1})},\ \mathfrak{a}_{2n+1} = \frac{(n+1)(\ln z_* + a_n)}{2(2n+1)\,z_*(\ln z_* + a_{n-1})}\,,\quad n = 2, 3, \ldots$$

(B) *Правильний ланцюговий C–дріб* (29) *збігається до функції $z\ln z$ для всіх z, $z \neq 0$, $z \neq \infty$. Правильний ланцюговий C–дріб збігається рівномірно на довільному компакті $\mathbf{Z} \subset R(0, z_*) = \{z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}\ :\ |\arg(z) - \arg(z_*)| < \pi\}$.*

Доведення. **(A)** Із (17) та (25) маємо, що коефіцієнти $\omega_k, k = 0, 1, \ldots,$ правильного ланцюгового C–дробу будуть рівні

$$\omega_0 = z_*\ln z_*,\quad \omega_1 = 1 + \ln z_*,\quad \omega_2 = \frac{-1}{2z_*(\ln z_* + 1)},\quad \omega_3 = \frac{3(\ln z_* + 5/2)}{4(\ln z_* + 1)},$$

$$\omega_{2n} = \frac{(n-1)\big(\ln z_* + a_{n-2}\big)}{2(2n-1)z_*\big(\ln z_* + a_{n-1}\big)},\ \omega_{2n+1} = \frac{(n+1)\big(\ln z_* + a_n\big)}{2(2n+1)z_*\big(\ln z_* + a_{n-1}\big)},\quad n = 2, 3, \ldots$$

Якщо підставити значення a_n з (18), то кінцеве отримаємо

$$\omega_{2n} = \frac{(n-1)\big(\ln z_* + \frac{\alpha_{n-2} + 2(n-1)^2 - 1}{2(n-2)(n-1)}\big)}{2(2n-1)z_*\big(\ln z_* + \frac{\alpha_{n-1} + 2n^2 - 1}{2(n-1)n}\big)} = \mathfrak{a}_{2n},$$

$$\omega_{2n+1} = \frac{(n+1)\big(\ln z_* + \frac{\alpha_n + 2(n+1)^2 - 1}{2n(n+1)}\big)}{(2(2n+1)z_*)\big(\ln z_* + \frac{\alpha_{2n-1} + 2n^2 - 1}{2(n-1)n}\big)} = \mathfrak{a}_{2n+1},\qquad n = 2, 3, \ldots$$

Підставивши знайдені значення в (24) отримаємо (14).

(B) Спочатку покажемо, що α_n може бути подана у вигляді

$$\alpha_n = 3n^2 + \beta_1^{(n)} n + \beta_0^{(n)} + \frac{\beta_{-1}^{(n)}}{n-1} + \frac{\beta_{-2}^{(n)}}{(n-2)(n-1)} + \dots + \frac{\beta_{-n+1}^{(n)}}{(n-1)!}, \qquad (30)$$

де $\beta_i^{(n)}, i = -n+1, -n+2, \dots, 1,$ — коефіцієнти.

З (16) безпосередньо випливає, що для $\alpha_1 = 3, \alpha_2 = 23$ та $\alpha_3 = 63$ співвідношення (30) виконується коли $\beta_1^{(1)} = \beta_0^{(1)} = 0$, $\beta_1^{(2)} = 4, \beta_0^{(2)} = 1$, $\beta_{-1}^{(2)} = 2$, $\beta_1^{(3)} = 8, \beta_0^{(3)} = \beta_{-1}^{(n)} = \beta_{-2}^{(n)} = 6$.

Припустимо, що (30) виконується при $n = k-1$. Тоді при $n = k$ з (16) маємо

$$\alpha_k = \frac{1}{k-1}\Big((k+1)\Big(3(k-1)^2 + \beta_1^{(k-1)}(k-1) + \beta_0^{(k-1)} + \frac{\beta_{-1}^{(k-1)}}{k-2} + \frac{\beta_{-2}^{(k-1)}}{(k-3)(k-2)} + \dots +$$

$$+ \frac{\beta_{-(k-2)}^{(k-1)}}{(k-2)!}\Big) + 4k^2 - 2\Big) = 3k^2 + (\beta_1^{(k-1)} + 4)k + \beta_1^{(k-1)} + \beta_0^{(k-1)} + 1 + \frac{2\beta_0^{(k-1)} + \beta_{-1}^{(k-1)} + 2}{k-1} +$$

$$+ \frac{3\beta_{-1}^{(k-1)} + \beta_{-2}^{(k-1)}}{(k-2)(k-1)} + \frac{4\beta_{-2}^{(k-1)} + \beta_{-3}^{(k-1)}}{(k-3)(k-2)(k-1)} + \dots + \frac{(k-1)\beta_{-(k-3}^{(k-1)} + \beta_{-(k-2)}^{(k-1)}}{2\cdot 3 \cdots (k-2)(k-1)} + \frac{k\beta_{-(k-2)}^{(k-1)}}{(k-1)}.$$

Звідси випливає, що α_k також записується у вигляді (30), де коефіцієнти відповідно рівні

$$\beta_1^{(k)} = \beta_1^{(k-1)} + 4, \ \beta_0^{(k)} = 2\beta_1^{(k-1)} + \beta_0^{(k-1)} + 1, \ \beta_{-1}^{(k)} = 2\beta_0^{(k-1)} + \beta_{-1}^{(k-1)} + 2,$$

$$\beta_{-i}^{(k)} = (i+1)\beta_{-(i-1)}^{(k-1)} + \beta_{-i}^{(k-1)}, \quad i = 2, 3, \dots, k-2, \quad \beta_{-(k-1)}^{(k)} = k\beta_{-(k-2)}^{(k-1)}.$$

Скористаємося (30) для знаходження границі $\mathfrak{a}_k$ при $k \to \infty$. Маємо

$$\lim_{n\to\infty} \mathfrak{a}_{2n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{2n(2n-1)z_*} \frac{\ln z_* + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\alpha_{n-2} + 2(n-1)^2 - 1}{2(n-2)(n-1)}}{\ln z_* + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\alpha_{n-1} + 2n^2 - 1}{2(n-1)n}}.$$

Оскільки

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_{n-2} + 2(n-1)^2 - 1}{2(n-2)(n-1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2(n-2)(n-1)}\Big(3(n-2)^2 + \beta_1^{(n-2)}(n-2) +$$

$$+ \beta_0^{(n-2)} + \frac{\beta_{-1}^{(n-2)}}{n-3} + \frac{\beta_{-2}^{(n-2)}}{(n-4)(n-3)} + \dots + \frac{\beta_{-(n-3)}^{(n-2)}}{(n-3)!} + 2(n-1)^2 - 1\Big) = \frac{5}{2},$$

то $\lim_{n\to\infty} \mathfrak{a}_{2n} = 1/(4z_*)$. Аналогічно $\lim_{n\to\infty} \mathfrak{a}_{2n+1} = 1/(4z_*)$.

Тоді, згідно із теоремою 13 правильний ланцюговий C–дріб (29) збігається до функції $w = z\ln z$ і на довільному компакті $\mathbf{Z} \subset R(0, z_*)$ вказаний ланцюговий дріб збігається рівномірно.

6. Висновки. Використання обернених похідних Тіле для побудови розвинення функції комплексної змінної в ланцюговий дріб Тіле та еквівалентний йому правильний ланцюговий C–дріб доцільне оскільки не передбачає спочатку розвинення цієї функції в ФСР (20) та обчислення коефіцієнтів правильного ланцюгового C–дробу через відношення чотирьох визначників Ганкеля (22).

Коефіцієнти правильного ланцюгового C–дробу знаходяться безпосередньо через обернені похідні Тіле (28). Таким чином побудований ланцюговий дріб буде відповідним ФСР. Запропонований підхід дозволив розвинути функцію $z \ln z$ в ланцюговий дріб та встановити область збіжності такого ланцюгового дробу.

Список використаної літератури

1. *Henrici P.* Applied and Computational Complex Analysis. Vol. 1. Power Series–Integration–Conformal Mapping–Location of Zeros. – New York–London–Sydney–Toronto: A Wiley–Interscience publication, 1974. – XV+682 p.
2. *Уолш Дж. Л.* Интерполяция и аппроксимация рациональными функциями в комплексной области. – Москва: Издательство иностранной литературы, 1961. – 508 с.
3. *Бейкер(мл.) Дж., Грейвс-Моррис П.* Аппроксимации Паде. — М.: Мир, 1986. — 502 с.
4. *Khovanskii A. N.* The Application of Continued Fractions and Their Generalizations to Problems in Approximation Theory. – Groningen: P. Noordhoff, 1963. – 212 p.
5. *Cuyt A., Brevik Petersen V., Verdonk B., Waadeland H., Jones W. B.* Handbooks of Continued Fractions for Special Functions. – Berlin–Heidelberg–New York: Springer, 2008. —XVI+431 p.
6. *Скоробогатько В. Я.* Теория ветвящихся цепных дробей и ее применение в вычислительной математике. – Москва: Наука, 1983. – 312 с.
7. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и таблицами. Под ред. М. Абрамовица и И. Стиган. — Москва, Наука, Глав. ред. физ.–мат. литературы, 1979. – 832 с.
8. *Люк Ю.* Специальные математические функции и их аппроксимации. – Москва: Мир, 1980. – 608 с.
9. *Пагіря М. М. , Кацала Р. А.* Розвинення деяких функцій у ланцюгові дроби // Наук. вісник Ужгород. ун–ту. Сер. матем. і інформ. – 2007. – Вип. 14–15. – С. 107–116.
10. *Пагіря М.М., Кацала Р.А.* Еквівалентність двох методів побудови правильних ланцюгових C–дробів // Укр. мат. журнал. – 2009. – **61**,№ 7. – С. 1005–1009.
11. *Пагіря М. М., Кацала Р. А.* Властивості обернених похідних // Укр. мат. журнал. – 2010. – **62**, № 5. – С. 708–713.
12. *Thiele T. N.* Interpolationsprechnung. – Leipzig: Commisission von B. G. Teubner, 1909.– XII + 175 S.
13. *Джоунс У., Трон В.* Непрерывные дроби. Аналитическая теория и приложения. Пер. с англ. – М.: Мир, 1985. – 414 с.
14. *Sanielevici S.* Sur l'intégration des équations différentielles par les fractions continues // Ann. Sci. de l'University de Jassy. – 1933. – 18. – P. 197–214.
15. *Merkes E. P., Scott W. T.* Continued Fraction Solution of the Riccati Equation // J. Math. Anal. Appl. Vol. 4 (1962), P. 309–327.
16. *Шафаревич И. Р.* Основные понятия алгебры. – Ижевск: Ижевская республиканская типография, 1999. – 348 с.
17. *Nörlund N. E.* Vorlesungen über Differenzenrechnung. – Berlin, Verlag von Julius Springer, 1924. – 551 S.
18. *Lorentzen L., Waadeland H.* Continue Fraction with Applications. – Amsterdam–London–New York–Tokyo: North–Holland, 1992. – 606 p.

Одержано 30.10.2015