

УДК 517.956

О. В. Пелюшкевич, Т. І. Фірман (Львівський нац. ун-т ім. І.Франка)

МІШАНА ЗАДАЧА ДЛЯ ВИРОДЖЕНОЇ ГІПЕРБОЛІЧНОЇ ЗЛІЧЕНОЇ СИСТЕМИ НАПІВЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ

In this paper we proved theorem about a global solvability of the initial-boundary value problem for degenerate countable system of first order hyperbolic equations.

В даній статті для виродженої зліченної системи гіперболічних рівнянь першого порядку доведено теорему про глобальну розв'язність мішаної задачі.

1. Вступ. Гіперболічні рівняння і системи, зазвичай, використовують при моделюванні процесів, що мають скінченну швидкість поширення збурень. З математичної точки зору це означає, що характеристики відповідних рівнянь і систем є ортогональними до осей координат [1].

Проте, в багатьох задачах фізики твердого тіла, в проміжних рівняннях, при аналізі багатовимірних задач, зустрічаються математичні моделі у вигляді гіперболічних рівнянь, частина сімейства характеристик яких перпендикулярна, наприклад, до осі часу [2, 3]. Наявність таких характеристик вказує на те, що швидкість поширення коливань у одновимірних суцільних середовищах є нескінченною [4].

Представлення розв'язку нелінійного рівняння через нескінченний ряд Фур'є приводить до злічених систем рівнянь з частинними похідними першого порядку [5–7].

У цій праці розглянуто зліченну систему напівлінійних рівнянь з частинними похідними першого порядку з "нахиленими" та горизонтальними (виродженими) характеристиками. За допомогою методу характеристик та теореми Банаха про стискуючі відображення, використовуючи методику А.М.Самойленка та Ю.В.Теплінського для злічених систем звичайних диференціальних рівнянь [8], тобто диференціальних рівнянь в просторі \mathfrak{M} обмежених числових послідовностей, доведено теорему про глобальну коректну розв'язність мішаної задачі для виродженої гіперболічної зліченної системи напівлінійних рівнянь.

2. Формулювання задачі.

У прямокутнику $\Pi = \{(x, t) : 0 < t < T, 0 < x < l\}$ розглянемо вироджену гіперболічну зліченну систему напівлінійних рівнянь

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_i}{\partial t} + \lambda_i(x, t) \frac{\partial u_i}{\partial x} &= f_i(x, t, u_1, u_2, \dots, v_1, v_2, \dots), \quad i \in \{1, \dots\} \\ \frac{\partial v_j}{\partial x} &= g_j(x, t, u_1, u_2, \dots, v_1, v_2, \dots), \quad j \in \{1, \dots\}. \end{aligned} \quad (1)$$

Для системи (1) задамо початкові

$$u_i(x, 0) = q_i(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad i \in \{1, \dots\}, \quad (2)$$

та крайові умови при $0 \leq t \leq T$

$$\begin{aligned} u_i(0, t) &= \gamma_i^0 \left(t, (u_s(0, t))_{s \in I_l} \right), \quad i \in I_0, \\ u_i(l, t) &= \gamma_i^l \left(t, (u_s(l, t))_{s \in I_0} \right), \quad i \in I_l, \\ v_j(0, t) &= \psi_j \left(t, (u_s(0, t))_{s \in I_l} \right), \quad j \in \{1, \dots\}, \end{aligned} \quad (3)$$

де I_0 та I_l – множини індексів, що визначені таким чином

$$I_0 = \left\{ i \in \{1, \dots\} : \lambda_i(0, t) > 0 \right\}, \quad I_l = \left\{ i \in \{1, \dots\} : \lambda_i(l, t) < 0 \right\}.$$

Множини I_0 та I_l можуть бути порожніми, складатися з скінченної або зліченної кількості елементів. Нехай вони містять r_0 та r_l елементів, відповідно. Без обмеження загальності, можна вважати, що r_0 та r_l дорівнюють \aleph_0 .

Надалі будемо використовувати позначення $u = (u_1, u_2, \dots)$, $v = (v_1, v_2, \dots)$, $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$, $f = (f_1, f_2, \dots)$, $g = (g_1, g_2, \dots)$, $q = (q_1, q_2, \dots)$, $\psi = (\psi_1, \psi_2, \dots)$, $w = (u, v)$. А також $\gamma^0 = (\gamma_1^0, \gamma_2^0, \dots)$, $\gamma^l = (\gamma_1^l, \gamma_2^l, \dots)$, де $\gamma_i^0 = 0$ для $i \notin I_0$ та $\gamma_j^l = 0$, для $j \notin I_l$.

Через C^∞ позначимо простір, елементом якого є зчисленна послідовність неперервних функцій, обмежених деякою сталою.

Задачу (1) - (3) будемо розглядати в просторі $\mathfrak{E}^2 = C^\infty(\Pi) \times C^\infty(\Pi)$. Нехай $\{w^1, w^2\} \subset \mathfrak{E}^2$, тоді метрику на елементах простору \mathfrak{E}^2 визначимо так

$$\begin{aligned} \rho(w^1, w^2) &= \max \left\{ \sup_i \max_{x,t} |u_i^1(x, t) - u_i^2(x, t)| a_i(x) e^{-ct}, \right. \\ &\quad \left. \sup_i \max_{x,t} |v_i^1(x, t) - v_i^2(x, t)| b_i(x) e^{-ct} \right\}, \end{aligned} \quad (4)$$

де сталу $c > 0$ і неперервні додатні функції a_i , b_i підберемо пізніше.

Дослідимо достатні умови розв'язності задачі (1) - (3).

3. Допоміжна лема.

Існування та єдиність розв'язку задачі (1) - (3) будемо доводити за допомогою теореми Банаха про нерухому точку. Для цього, насамперед, переконаємося у повноті простору \mathfrak{E}^2 відносно норми, породженої заданою метрикою (4).

Лема 1. *Простір \mathfrak{E}^2 повний відносно норми $\|\cdot\|_{\mathfrak{E}^2}$.*

Доведення. Нехай послідовність $(u^n, v^n)_{n=1}^\infty$ фундаментальна в просторі \mathfrak{E}^2 . Тоді для довільного $\varepsilon > 0$ знайдеться $N \in \mathbb{N}$ таке, що для всіх натуральних $n, m \geq N$ і для всіх $i \in \mathbb{N}$ та $(x, t) \in \Pi$ маємо

$$|u_i^n(x, t) - u_i^m(x, t)| < \varepsilon, \quad (5)$$

$$|v_i^n(x, t) - v_i^m(x, t)| < \varepsilon. \quad (6)$$

З (5) випливає, що для будь-яких фіксованих $(x, t) \in \Pi$ та $i \in \mathbb{N}$ числова послідовність $(u_i^n(x, t))$, $n \in \mathbb{N}$, є фундаментальною. Позначимо через $u_i(x, t)$ її границю. Покажемо, що функція $u_i(x, t)$, $(x, t) \in \Pi$, є неперервною і обмеженою. Справді, нехай $N \in \mathbb{N}$ таке, що для всіх натуральних $n, m \geq N$, $i \in \mathbb{N}$ та $(x, t) \in \Pi$ маємо

$$|u_i^n(x, t) - u_i^m(x, t)| < 1/2.$$

Тоді

$$|u_i(x, t) - u_i^N(x, t)| = \left| \lim_{n \rightarrow \infty} u_i^n(x, t) - u_i^N(x, t) \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} |u_i^n(x, t) - u_i^N(x, t)| \leq 1/2.$$

Отже, для кожної $(x, t) \in \Pi$ маємо

$$|u_i(x, t)| \leq |u_i(x, t) - u_i^N(x, t)| + |u_i^N(x, t)| \leq 1/2 + K_N,$$

де

$$K_N := \sup_{i \in \mathbb{N}} \sup_{(x, t) \in \Pi} |u_i^N(x, t)| < \infty,$$

оскільки $u^N \in C^\infty(\Pi)$. Таким чином отримуємо, що всі функції u_i , $i \in \mathbb{N}$, рівномірно обмежені одною і тою ж сталою.

Доведемо неперервність функції u_i . Покажемо, що функція u_i є неперервною в точці $(x, t) \in \Pi$. Нехай дано $\varepsilon > 0$. Для довільних $(x_1, t_1) \in \Pi$ та $n \in \mathbb{N}$ маємо

$$|u_i(x, t) - u_i(x_1, t_1)| \leq |u_i(x, t) - u_i^n(x, t)| + |u_i^n(x, t) - u_i^n(x_1, t_1)| + |u_i^n(x_1, t_1) - u_i(x_1, t_1)|.$$

Оскільки для кожної $(x, t) \in \Pi$ маємо, що $u_i^n(x, t) \rightarrow u_i(x, t)$ при $n \rightarrow \infty$, то знайдеться $N \in \mathbb{N}$ таке, що для всіх натуральних $n \geq N$ маємо

$$|u_i(x, t) - u_i^n(x, t)| < \varepsilon/3, \quad |u_i(x_1, t_1) - u_i^n(x_1, t_1)| < \varepsilon/3.$$

Крім того, оскільки функція u_i^n є неперервною, то знайдеться $\delta = \delta(i, n) > 0$ таке, що при $|x - x_1| < \delta$ та $|t - t_1| < \delta$ маємо $|u_i^n(x, t) - u_i^n(x_1, t_1)| < \varepsilon/3$.

Отже, при $|x - x_1| < \delta$ та $|t - t_1| < \delta$ маємо, що $|u_i(x, t) - u_i(x_1, t_1)| < \varepsilon$, що і доводить неперервність функції u_i .

Очевидно, що ті самі міркування можна повторити і для $v^n \in C^\infty(\Pi)$, $n \in \mathbb{N}$. Позначимо $u := (u_1, u_2, \dots)$ та $v := (v_1, v_2, \dots)$. Оскільки доведено, що $(u, v) \in \mathfrak{C}^2$, то залишається лише показати, що $\|(u, v) - (u^n, v^n)\|_{\mathfrak{C}^2} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Враховуючи наведені вище викладки, цей факт перевіряється безпосередньо.

4. Теорема про глобальну розв'язність.

Нехай $\varphi_i(\tau; x, t)$, $i \in \{1, \dots\}$ розв'язок задачі Коші

$$\frac{d\xi}{d\tau} = \lambda_i(\xi, \tau), \quad \xi(t) = x,$$

який є характеристиками системи (1). Зауважимо, що вихідна система має також горизонтальні характеристики вигляду $\tau = t$. Для уникнення громіздких записів будемо використовувати скорочене позначення $\varphi_i(\tau)$.

Через $\chi_i(x, t)$ ($0 \leq \chi_i(x, t) \leq T$), позначимо найменше значення τ таке, що $(\varphi_i(\tau; x, t), \tau) \in \bar{\Pi}$, $\tau \in [\chi_i(x, t), t]$. Тоді, якщо $\chi_i(x, t) > 0$, то $\varphi_i(\chi_i(x, t); x, t)$ дорівнює 0 або l .

Уведемо області:

$$\begin{aligned} \Pi_q^i &= \{(x, t) \in \Pi : \chi_i(x, t) = 0\}, \quad i \in \{1, \dots\}; \\ \Pi_0^i &= \{(x, t) \in \Pi : \chi_i(x, t) > 0, \varphi_i(\chi_i(x, t); x, t) = 0\}, \quad i \in I_0; \\ \Pi_l^i &= \{(x, t) \in \Pi : \chi_i(x, t) > 0, \varphi_i(\chi_i(x, t); x, t) = l\}, \quad i \in I_l. \end{aligned}$$

Проінтегрувавши рівняння системи (1) вздовж відповідних характеристик, одержимо системи інтегро-операторних рівнянь

$$u_i(x, t) = F_i[u](x, t) + \int_{\chi_i(x, t)}^t f_i(\varphi_i(\tau), \tau, u_1(\varphi_i(\tau), \tau), u_2(\varphi_i(\tau), \tau), \dots, v_1(\varphi_i(\tau), \tau), v_2(\varphi_i(\tau), \tau), \dots) d\tau, \quad i \in \{1, \dots\}, \quad (7)$$

$$v_j(x, t) = \psi_j\left(t, (u_s(0, t))_{s \in I_1}\right) + \int_0^x g_j(y, t, u_1(y, t), u_2(y, t), \dots, v_1(y, t), v_2(y, t), \dots) dy, \quad j \in \{1, \dots\}, \quad (8)$$

де

$$F_i[u](x, t) = \begin{cases} q_i(\varphi_i(0; x, t)), & (x, t) \in \Pi_q^i, \\ \gamma_i^0\left(\chi_i(x, t), (u_s(0, \chi_i(x, t)))_{s \in I_1}\right), & (x, t) \in \Pi_0^i, \\ \gamma_i^l\left(\chi_i(x, t), (u_s(l, \chi_i(x, t)))_{s \in I_0}\right), & (x, t) \in \Pi_l^i. \end{cases}$$

Означення 1. Узагальненим розв'язком задачі (1)-(3), будемо називати набір функцій $(u, v) \in \mathfrak{C}^2$, які задовольняють системи (7)-(8).

Означення 2. Функція $f : \mathbb{R}^2 \times \mathfrak{M}^2 \rightarrow \mathfrak{M}$ задовольняє умову Коші-Ліпшиця за змінними u та v з деякою неперервною функцією $\alpha : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$, якщо виконується нерівність

$$|f_i(x, t, u'_1, u'_2, \dots, v'_1, v'_2, \dots) - f_i(x, t, u''_1, u''_2, \dots, v''_1, v''_2, \dots)| \leq \alpha(x, t) \cdot \Delta,$$

де $\Delta = \max\{\sup_{k \in \mathbb{N}}\{|u'_k - u''_k|\}, \sup_{k \in \mathbb{N}}\{|v'_k - v''_k|\}\}$, для всіх $i \in \{1, \dots\}$.

Будемо вважати, що функція $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathfrak{M}$ задовольняє умову Ліпшиця за змінною x в Π , якщо $f_i \in Lip_x(\Pi)$ для всіх $i \in \{1, \dots\}$.

Теорема 1. Нехай вихідні функції задачі (1)-(3) задовольняють умови:

- 1) $\lambda \in C^\infty(\bar{\Pi}) \cap Lip_x(\bar{\Pi})$;
- 2) $f, g, q, \gamma^0, \gamma^l, \psi \in C^\infty(\bar{\Pi})$ при довільних фіксованих наборах $u, v \in C^\infty$;
- 3) f, g задовольняють умову Коші-Ліпшиця за змінними u та v з деякими неперервними функціями $\alpha(x, t)$ та $\beta(x, t)$, відповідно;
- 4) γ^0, γ^l, ψ задовольняють умову Коші-Ліпшиця за змінною u з деякими неперервними функціями $h^0(t), h^l(t)$ та $s(t)$, відповідно;
- 5)

$$\begin{aligned} q_i(0) &= \gamma_i^0(0, (q_s(0))_{s \in I_1}), \quad i \in I_0, \\ q_i(l) &= \gamma_i^l(0, (q_s(l))_{s \in I_0}), \quad i \in I_1, \\ v_j(0, 0) &= \psi_j(0, (q_s(0))_{s \in I_1}), \quad j \in \{1, \dots\}, \end{aligned}$$

(умова погодження нульового порядку).

Тоді існує єдиний узагальнений розв'язок задачі (1)-(3).

Доведення. Нехай $A = \max_{x,t} \alpha(x,t)$, $B = \max_{x,t} \beta(x,t)$, $S = \max_t s(t)$ та $H = \max \{ \max_t h^0(t), \max_t h^l(t) \}$.

На елементах простору \mathfrak{C}^2 введемо оператор $\mathcal{A} = (\mathcal{A}^1, \mathcal{A}^2)$, де оператори \mathcal{A}^1 та \mathcal{A}^2 визначені, відповідно, правими частинами співвідношень (7)-(8), а саме

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_i^1[w](x,t) &= F_i[u](x,t) + \\ &+ \int_{\chi_i(x,t)}^t f_i(\varphi_i(\tau), \tau, u_1(\varphi_i(\tau), \tau), u_2(\varphi_i(\tau), \tau), \dots, v_1(\varphi_i(\tau), \tau), v_2(\varphi_i(\tau), \tau), \dots) d\tau, \end{aligned}$$

$$i \in \{1, \dots\},$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_j^2[w](x,t) &= \psi_j(t, (u_s(0,t))_{s \in I_l}) + \\ &+ \int_0^x g_j(y,t, u_1(y,t), u_2(y,t), \dots, v_1(y,t), v_2(y,t), \dots) dy, \quad j \in \{1, \dots\}. \end{aligned}$$

Отже, відшукання узагальненого розв'язку задачі (1)-(3) зводиться до знаходження нерухомої точки оператора \mathcal{A} в просторі \mathfrak{C}^2 . Зауважимо, що $\mathcal{A}[z] \in \mathfrak{C}^2$, якщо $z \in \mathfrak{C}^2$, що випливає з неперервності функцій φ_i за всіма компонентами, з врахуванням припущення 2) теореми.

Значимо, що з означення метрики для всіх допустимих i, x, t , та $w \in \mathfrak{C}^2$ випливає співвідношення

$$|u_i^1(x,t) - u_i^2(x,t)| \leq \frac{\rho(w^1, w^2)}{a_i(x)} e^{ct}, \quad |v_i^1(x,t) - v_i^2(x,t)| \leq \frac{\rho(w^1, w^2)}{b_i(x)} e^{ct}.$$

Покажемо, що оператор \mathcal{A} є стискуючим, для цього проведемо низку оцінок.

Нехай $w^1, w^2 \in \mathfrak{C}^2$ та $(x,t) \in \Pi_0^i$. Тоді

$$\begin{aligned} &|F_i[w^1](x,t) - F_i[w^2](x,t)| \leq \\ &\leq \left| \gamma_i^0(\chi_i(x,t), (u_s^1(0, \chi_i(x,t)))_{s \in I_l}) - \gamma_i^0(\chi_i(x,t), (u_s^2(0, \chi_i(x,t)))_{s \in I_l}) \right| \leq \\ &\leq H \sup_{j \notin I_0} \{ |u_j^1(0, \chi_i(x,t)) - u_j^2(0, \chi_i(x,t))| \} \leq H \sup_{j \notin I_0} \frac{e^{c\chi_i(x,t)}}{a_j(0)} \rho(w^1, w^2). \quad (9) \end{aligned}$$

Аналогічну оцінку можна одержати для $(x,t) \in \Pi_l^i$.

Таким чином, справедливе співвідношення

$$|F_i[w^1](x,t) - F_i[w^2](x,t)| \leq \begin{cases} H \sup_{j \notin I_0} \frac{e^{c\chi_i(x,t)}}{a_j(0)} \rho(w^1, w^2), & (x,t) \in \Pi_0^i, \\ H \sup_{j \notin I_l} \frac{e^{c\chi_i(x,t)}}{a_j(l)} \rho(w^1, w^2), & (x,t) \in \Pi_l^i. \end{cases} \quad (10)$$

Позначимо через $\mu = \sup_i \max_{x,t} (|\lambda_i(x,t)|)^{-1}$. Якщо виконується перша нерівність оцінки (10), то $i \in I_0$ і $\chi_i(x,t) \leq t - \mu x$. Аналогічно, якщо друга нерівність, то $i \in I_l$ і $\chi_i(x,t) \leq t - \mu(l - x)$.

На підставі отриманих співвідношень одержуємо оцінку для оператора \mathcal{A}^1

$$\begin{aligned} & |(\mathcal{A}_i^1[w^1])(x, t) - (\mathcal{A}_i^1[w^2])(x, t)| a_i(x) e^{-ct} \leq \\ & \leq H \max \left\{ \sup_{\substack{i \in I_0, \\ j \notin I_0}} \frac{a_i(x) e^{-c\mu x}}{a_j(0)}, \sup_{\substack{i \in I_l, \\ j \notin I_l}} \frac{a_i(x) e^{-c\mu(l-x)}}{a_j(l)} \right\} \rho(w^1, w^2) + \\ & + A \max \left\{ \sup_{i,j,y} \frac{a_i(x)}{a_j(y)}, \sup_{i,j,y} \frac{a_i(x)}{b_j(y)} \right\} \rho(w^1, w^2) \int_0^t e^{c(\sigma-t)} d\sigma \leq \\ & \leq H \max \left\{ \sup_{\substack{i \in I_0, \\ j \notin I_0}} \frac{a_i(x) e^{-c\mu x}}{a_j(0)}, \sup_{\substack{i \in I_l, \\ j \notin I_l}} \frac{a_i(x) e^{-c\mu(l-x)}}{a_j(l)} \right\} \rho(w^1, w^2) + \\ & + \frac{A}{c} \max \left\{ \sup_{i,j,y} \frac{a_i(x)}{a_j(y)}, \sup_{i,j,y} \frac{a_i(x)}{b_j(y)} \right\} \rho(w^1, w^2), \end{aligned}$$

а також оцінку для оператора \mathcal{A}^2

$$\begin{aligned} & |\mathcal{A}_i^2[w^1](x, t) - \mathcal{A}_i^2[w^2](x, t)| b_i(x) e^{-ct} \leq \left(S \sup_{\substack{i \in \mathbb{N}, \\ j \notin I_l}} \frac{b_i(x)}{a_j(0)} + \right. \\ & \left. + \int_0^x B \max \left\{ \sup_{i,j \in \mathbb{N}} \frac{b_i(x)}{a_j(y)}, \sup_{i,j \in \mathbb{N}} \frac{b_i(x)}{b_j(y)} \right\} dy \right) \rho(w^1, w^2). \end{aligned}$$

Використавши отримані оцінки, встановлюємо, що

$$\begin{aligned} \rho(A[w^1], A[w^2]) & \leq \max_x \left\{ H \max \left\{ \sup_{\substack{i \in I_0, \\ j \notin I_0}} \frac{a_i(x) e^{-c\mu x}}{a_j(0)}, \sup_{\substack{i \in I_l, \\ j \notin I_l}} \frac{a_i(x) e^{-c\mu(l-x)}}{a_j(l)} \right\} + \right. \\ & + \frac{A}{c} \max \left\{ \sup_{i,j,y} \frac{a_i(x)}{a_j(y)}, \sup_{i,j,y} \frac{a_i(x)}{b_j(y)} \right\} + S \sup_{\substack{i \in \mathbb{N}, \\ j \notin I_l}} \frac{b_i(x)}{a_j(0)} + \\ & \left. + \int_0^x B \max \left\{ \sup_{i,j \in \mathbb{N}} \frac{b_i(x)}{a_j(y)}, \sup_{i,j \in \mathbb{N}} \frac{b_i(x)}{b_j(y)} \right\} dy \right\} \rho(w^1, w^2). \end{aligned}$$

Нехай

$$a_i(x) = \begin{cases} e^{px(l-x)}, & i \in I_0, i \in I_l \\ e^{px}, & i \in I_0, i \notin I_l \\ e^{p(l-x)}, & i \notin I_0, i \in I_l \\ e^{pl}, & i \notin I_0, i \notin I_l \end{cases}, \quad b_i(x) = \varepsilon e^{-px}, \quad i \in \{1, \dots\},$$

а також виконуються припущення

$$p \leq c\mu, \quad pl \leq c\mu, \quad (11)$$

тоді справджуються оцінки:

$$\begin{aligned} \max_x \left\{ \sup_{\substack{i \in I_0, \\ j \notin I_0}} \frac{a_i(x)e^{-c\mu x}}{a_j(0)} \right\} &= \max_x \left\{ \sup_{i \in I_0} \frac{a_i(x)e^{-c\mu x}}{e^{pl}} \right\} = \\ &= \max_x \left\{ e^{px(l-x)}e^{-c\mu x-pl}, e^{px}e^{-c\mu x-pl} \right\} = e^{-pl}; \\ \max_x \left\{ \sup_{\substack{i \in I_1, \\ j \notin I_1}} \frac{a_i(x)e^{-c\mu(l-x)}}{a_j(l)} \right\} &= \max_x \left\{ \sup_{i \in I_1} \frac{a_i(x)e^{-c\mu(l-x)}}{e^{pl}} \right\} = \\ &= \max_x \left\{ e^{px(l-x)}e^{-c\mu(l-x)-pl}, e^{p(l-x)}e^{-c\mu(l-x)-pl} \right\} = e^{-pl}. \end{aligned}$$

Також мають місце такі співвідношення:

$$\begin{aligned} \max_x \left\{ \sup_{\substack{i \in \mathbb{N}, \\ j \notin I_i}} \frac{b_i(x)}{a_j(0)} \right\} &= \max_x \frac{\varepsilon e^{-px}}{e^{pl}} = \max_x \varepsilon e^{-px-pl} = \varepsilon; \\ \max_x \int_0^x \sup_{i,j \in \mathbb{N}} \frac{b_i(x)}{a_j(y)} dy &\leq \max_x \int_0^x \varepsilon e^{-px} dy \leq \max_x \{ \varepsilon e^{-px} x \} \leq \varepsilon l; \\ \max_x \int_0^x \sup_{i,j \in \mathbb{N}} \frac{b_i(x)}{b_j(y)} dy &= \max_x \int_0^x \frac{\varepsilon e^{-px}}{\varepsilon e^{-py}} dy = \\ &= \max_x \int_0^x e^{p(y-x)} dy = \max_x \frac{1 - e^{-px}}{p} \leq \frac{1}{p}. \end{aligned}$$

У підсумку одержимо нерівність

$$\begin{aligned} \rho(A[w^1], A[w^2]) &\leq \left(H e^{-pl} + \frac{A}{c} \max_x \left\{ \max \left\{ \sup_{i,j,y} \frac{a_i(x)}{a_j(y)}, \sup_{i,j,y} \frac{a_i(x)}{b_j(y)} \right\} \right\} + \right. \\ &\quad \left. + S\varepsilon + B \left(\varepsilon l + \frac{1}{p} \right) \right) \rho(w^1, w^2). \end{aligned}$$

Фіксуємо значення параметра ε достатньо малим, а параметр p достатньо великим, щоб задовольнити умову

$$H e^{-pl} + S\varepsilon + B \left(\varepsilon l + \frac{1}{p} \right) < \frac{1}{2},$$

тоді функції a_i, b_i є визначеними, а

$$\max_x \left\{ \max \left\{ \sup_{i,j,y} \frac{a_i(x)}{a_j(y)}, \sup_{i,j,y} \frac{a_i(x)}{b_j(y)} \right\} \right\}$$

менший за деяку сталу M . Насамкінець фіксуємо значення параметру c достатньо великим, щоб задовольнити умови (11) та нерівність

$$\frac{AM}{c} < \frac{1}{2}.$$

Тоді оператор \mathcal{A} є стискуючим на елементах простору \mathcal{C}^2 з вибраними функціями a_i, b_i та параметром c .

Таким чином, на основі теореми Банаха про стискуюче відображення існує єдина нерухома точка оператора \mathcal{A} в просторі \mathcal{C}^2 . Ця нерухома точка є узагальненим розв'язком задачі (1)-(3).

Список використаної літератури

1. Рождественский Б.Л. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике / Б.Л. Рождественский, Н.Н. Яненко. – М. : Наука, 1978. – 592 с.
2. Кирилич В.М. Обобщенная непрерывная разрешимость задачи с неизвестными границами для сингулярных гиперболических систем квазилинейных уравнений / В.М. Кирилич, А.М. Филимонов // Матем. студії. – 2008. – Т. 30. – № 1. – С. 42–60.
3. Алексеев В.С. Гиперболическая регуляризация системы Соболева. / В.С. Алексеев // Математические труды - 2002. - Т. 5, №1, С. 3–17.
4. Мауленов О. О разрешимости смешанной задачи для вырожденной полулинейной гиперболической системы на отрезке / О. Мауленов, А.Д. Мышкис // Изв. АН КазССР. Сер. физ.-мат. – 1981. – №5. – С. 25–29.
5. Berzhanov A.B. Solution of a countable system of quasilinear partial differential equations multiperiodic in a part of variables / A.B. Berzhanov, E.K. Kurmangaliev // Укр. мат. журн. – 2009. – Т. 61. – N2. – С. 280–288.
6. Оселедец В.И. Глобальная устойчивость бесконечных систем нелинейных дифференциальных уравнений и неоднородные счетные цепи Маркова / В.И. Оселедец, Д.В. Хмельёв // Проблемы передачи информации. – 2000. – Т. 36. – Вып. 1. – С. 60–76.
7. Камбулов В.Ф. Об одном модельном гиперболическом уравнении, возникающем в радиофизике / В.Ф. Камбулов, А.Ю. Колесов // Матем. моделирование. – 1996. – Т. 8. – N1. – С. 93–102.
8. Самойленко А. М. Счетные системы дифференциальных уравнений / А.М. Самойленко, Ю.В. Теплинский. – К.: Ин-т математики, 1993. – 308 с.

Одержано 26.11.2015