УДК 519.8

**О. Ю. Червак** (Ужгородський нац. ун-т)

# НАДКРИТЕРІЇ В ОДНОКРИТЕРІАЛЬНІЙ ОПТИМІЗАЦІЇ

Based on one-criterion problems the article described approaches of definition of advantage orders, unimprovable (optimal) alternative, upper-criterion and sub-criterion. The article also considered examples of upper-criterion and sub-criterion making.

На прикладі однокритеріальної оптимізації даються способи задання порядків віддачі переваги, поняття непокращуваності (оптимальності) альтернатив, надкритеріїв та підкритеріїв, а також приклади побудови надкритеріїв і підкритеріїв критеріїв.

Однією з основних операцій цілеспрямованої діяльності є вибір. Майже кожна складна практична задача вибору є багатокритеріальною. Але, оскільки альтернатива, оптимальна за кожним з багатьох критеріїв, існує дуже рідко, то ці критрерії, як правило, "згортаються" в один єдиний критерій за допомогою тих чи інших умов узгодження. Різні такі умови визначають й різні згортки критеріїв. Отже, вони визначають й різні задачі багатокритеріальної оптимізації.

Дуже часто використовуються скалярні й векторні згортки багатьох критеріїв. Серед скалярних згорток широко розповсюджена лінійна згортка як додатна лінійна комбінація критеріїв, додатні коефіцієнти якої характеризують відносну важливість кожного з них. У цьому випадку багатокритеріальна зажача зводиться до однокритеріальної задачі з скалярною цільовою функцією. Згортка багатьох критеріїв в один векторний критерій може бути одержана і на основі умови попарної різної важливості критеріїв.

Зазначимо, що проблема заміни будь-якої задачі оптимізації (одноокритеріальної чи багатокритеріальної) однією або багатьма простішими задачами оптимізації, такими, щоб їх оптимальні розв'язки були б оптимальними розв'язками і для даної задачі, є також актуальною проблемою.

Метою роботи є розв'язання задач багатокритеріальної оптимізації, в яких критерії порівнюються попарно за важливістю. Для цього, кожна з цих задач формулюється як задача з векторним критрерієм, значення якого відповідно впорядковується, тобто на множині альтернатив визначається відповідний порядок віддачі переваги.

Для впорядкування задач вибору на одній і тій допустимій множині альтернатив введені поняття надкритерію будь-якого критерію; якщо критерій є надкритерієм даного критерію на цій множині, то останній критерій є підкритерієм першого.

Розглянемо задачу максимізації з критерієм $c$:

$$\max c(x), \quad x \in X. \tag{1}$$

В ній критерій визначається шкалою як множиною оцінок $R$ зі строгим порядком, заданим на ній за допомогою відношення *більше*: альтернатива $x$ *краща* за альтернативу $y$, якщо і тільки якщо $c(x) > c(y)$, або $c(x) - c(y) > 0$. Якщо $c(x) = c(y)$ або $c(x) - c(y) = 0$, то $x$ і $y$ *рівноцінні* альтернативи.

Множину всіх оптимальних альтернатив цієї задачі позначатимемо через $X_*$ ($X_* \subseteq X$), $X$ – *множина допустимих альтернатив*, або, просто, *допустима* *множина.* Тут і в подальшому, $X$ будемо вважати множиною в просторі $R^n$. Отже, альтернатива $x$ є вектором $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ з дійсними координатами $x_j$, $j = 1, 2, \ldots, n$.

Очевидно, задача мінімізації зводиться до задачі максимізації, і навпаки. Тому, в подальшому, розглядатимемо тільки задачу максимізації.

Оскільки впорядкування альтернатив в задачі максимізації є повним впорядкуванням, тобто будь-які дві альтернативи порівняльні в цьому порядку, то оптимальна альтернатива $x_* \in X$ є *негіршою* альтернативою за всі інші допустимі альтернативи, тобто для всіх $x \in X$ виконується нерівність $c(x_*) \geq c(x)$.

Оптимальна оцінка цієї альтернативи $c_* = c(x_*)$ є найкращою оцінкою, тобто для всіх $c \in C = \{c(x) |\, x \in X\}$, $c \neq c_*$, виконується строга нерівність $c_* > c$.

Множину $C$ назвемо множиною допустимих значень функції оцінок $c$, а $c_* \in C$ – максимумом цієї функції на $X$.

Якщо задача (1) недопустима, тобто в ній не існує жодної допустимої альтернативи, то вона не має оптимального розв'язку. (Допустиму альтернативу називатимемо також допустимим розв'язком цієї задачі.) Якщо допустима задача (1) (тобто задача з непорожньою допустимою множиною) не має оптимального розв'язку, то або функція оцінок необмежена зверху на множині $X$, або точна верхня межа множини $C$, допустимих значень цієї функції, не належить цій множині.

Поряд з цією задачею розглянемо іншу задачу максимізації на допустимій множині $X$, з іншим критерієм $c'$:

$$\max c'(x), \quad x \in X. \tag{2}$$

**Означення 1.** Критерій $c'$ назвемо надкритерієм критерію $c$ на $X$, якщо і тільки якщо для будь-якого $x, y \in X$ з відношення $c(x) > c(y)$ випливає відношення $c'(x) > c'(y)$.

**Теорема 1.** *Якщо $c'$ є надкритерієм критерію $c$ на $X$, то альтернатива $x'_*$, оптимальна в задачі* (2), є оптимальною і в задачі (1). Отже, $X'_* \subset X_*$, де $X'_*$ – множина оптимальних альтернатив в задачі (2), $X_*$ – множина оптимальних альтернатив в задачі (1).

***Доведення.*** Нехай $x'_* \in X'_*$ – будь-яка альтернатива. Отже, для всіх $x \in X$ виконується нерівність

$$c'(x'_*) \geq c'(x). \tag{3}$$

Припустимо супротивне, тобто $x'_*$ не є оптимальною альтернативою в задачі (1). Тоді існує $y \in X$ така, що виконується нерівність

$$c(y) > c'(x'_*). \tag{4}$$

Але, за означенням 1, з нерівності (3) випливає нерівність $c'(y) > c'(x'_*)$, що суперечить оптимальності $x'_*$ в задачі (2).

**Означення 2.** Критерій $c$ назвемо підкритерієм критерію $c'$ на $X$, якщо і тільки якщо критерій $c'$ є надкритерієм критерію $c$ на $X$.

Отже, якщо критерій $c$ в задачі (1) є підкритерієм критерію $c'$ в задачі (2), то за теоремою 1 виконується умова включення $X'_* \subset X_*$.

Легко перевірити, що поняття надкритерію як відношення на $R^n$ (або на будь-якій з її множин) має властивість транзитивності, тобто справедлива наступна теорема.

**Теорема 2.** *Якщо $c'$ є надкритерієм критерію $c$ на деякій множдині $Y \subset R^n$ і $c''$ є надкритерієм критерію $c'$ на цій множині, то $c''$ є надкритерієм критерію $c$ на множині $Y$.*

***Доведення.*** Нехай критерій $c'$ є надкритерієм критерію $c$ на $Y$, тобто для будь-яких $x, y \in Y$, таких, що $c(x) > c(y)$, виконується нерівність $c'(x) > c'(y)$, критерій $c''$ є надкритерієм критерію $c'$ на $Y$, тобто для $x, y \in Y$, таких, що $c'(x) > c'(y)$, виконується нерівність $c''(x) > c''(y)$. Тоді, за транзитивністю відношення "$>$ з нерівності $c(x) > c(y)$ випливає нерівність $c''(x) > c''(y)$. Отже, критерій $c''$ є надкритерієм критерію $c$ на $Y$.

**Означення 3.** Два критерії $c$ і $c'$ назвемо еквівалентними на множині $Y$, $Y \subset R^n$, якщо і тільки якщо з того, що альтернатива $x \in Y$ *краща* за альтернативу $y \in Y$ по одному з цих критеріїв, випливає, що альтернатива $x$ *краща* за альтернативу $y$ і по другому критерію.

Легко показати, що для еквівалентних критеріїв $c$ і $c'$ на $X$, виконується рівність $X_* = X'_*$.

Відношення критеріїв також є транзитивним, що легко показати: якщо критерій $c'$ еквівалентний критерію $c$ на множині $Y$ і критерій $c''$ еквівалентний критерію $c'$ на цій же множині, то критерій $c''$ еквівалентний критерію $c$ на множині $Y$.

Зазначимо, що поняття еквівалентності критеріїв дає можливість замінювати одну задачу максимізації іншою задачею максимізації з еквівалентним критерієм.

Розглянемо методику побудови надкритеріїв.

Нехай $c(x) = f(c'(x))$, де $f$ – функція, визначена на $R$, $c$ і $c'$ – функції, визначені на $R^n$, $C$ – множина значень функції $c$ на $X$, $C'$ – множина значень функції $c'$ на $X$, $F$ – множина значень функції $f$ на $C'$.

**Означення 4.** Функцію $f$ назвемо неспадною функцією на $C'$, якщо і тільки якщо для будь-яких $c'_1 \in C'$ і $c'_2 \in C'$ таких, що $f(c'_1) > f(c'_2)$ виконується нерівність $c'_1 > c'_2$.

Легко бачити, що з означення 4 випливає можливість існування $c'_1, c'_2 \in C'$, таких, що $c'_1 > c'_2$ і $f(c'_1) = f(c'_2)$.

**Означення 5.** Функцію $f$ назвемо зростаючою функцією на $C'$, якщо і тільки якщо для будь-яких $c'_1, c'_2 \in C'$, таких, що $c'_1 > c'_2$, виконується $f(c'_1) > f(c'_2)$.

**Теорема 3.** *Якщо функція $f$ є неспадною функцією на $C'$, то критерій $c'(x)$ є надкритерієм критерію $c(x) = f(c'(x))$ на $X$.*

***Доведення.*** Нехай $x, y \in X$ – будь-які дві альтернативи, для яких виконується нерівність $c(x) > c(y)$, або, інакше $f(c'(x)) > f(c'(y))$. Тоді, за означенням 4, виконується й нерівність $c'(x) > c'(y)$. Отже, критерій $c'(x)$ є надкритерієм критерію $c(x)$.

**Теорема 4.** *Якщо функція $f$ є зростаючою функцією на $C'$, то критерій $c'(x)$ і $c(x) = f(c'(x))$ еквівалентні на $X$.*

***Доведення.*** Оскільки зростаюча функція $f$ на $C'$ є і неспадною на цій множині, то за теоремою 3 критерій $c'(x)$ є надкритерієм критерію $c(x)$ на $X$. Отже, для доведення теореми досить показати, що критерій $c(x)$ є надкритерієм критерію $c'(x)$ на $X$. Дійсно, нехай $x, y \in X$ – будь-які дві альтернативи, для яких виконується нерівність $c'(x) > c'(y)$. Тоді, оскільки $f$ зростаюча функція на $C'$, то $f(c'(x)) > f(c'(y))$, тобто $c(x) > c(y)$, що означає те, що $c(x)$ є надкритерієм критерію $c'(x)$ на $X$.

Нехай $c_j$, $j = 1, 2, \dots, q$ – попарно еквівалентні критерії на $X$. Це означає, що для будь-яких двох номерів $j_1$ і $j_2$, $1 \le j_1, j_2 \le q$, критерії $c_{j_1}$ і $c_{j_2}$ еквівалентні на $X$: $c_{j_1}(x) > c_{j_1}(y)$, якщо і тільки якщо $c_{j_2}(x) > c_{j_2}(y)$; $c_{j_1}(x) = c_{j_1}(y)$, якщо і тільки якщо $c_{j_2}(x) = c_{j_2}(y)$. Розглянемо критерій, який є лінійною комбінацією цих попарно еквівалентних критеріїв на $X$:

$$c(x) = \sum_{j=1}^{q} \alpha_j c_j(x), \tag{5}$$

де $\alpha_j > 0$, $j = 1, 2, \dots, q$.

Нехай $c'_j$, $j = 1, 2, \dots, q$ – будь-які надкритерії критеріїв $c_j$, $j = 1, 2, \dots, q$ відповідно на $X$. Розглянемо критерій, який є будь-якою додатною лінійною комбінацією цих надкритеріїв $c'_j$, $j = 1, 2, \dots, q$ на $X$:

$$c'(x) = \sum_{j=1}^{q} \beta_j c'_j(x), \tag{6}$$

де $\beta_j > 0$, $j = 1, 2, \dots, q$. Тоді справедлива наступна теорема.

**Теорема 5.** *Критерій $c'(x)$, визначений формулою* (6), *є надкритерієм на $X$ критерію $c(x)$, визначеного формулою* (5).

***Доведення.*** Нехай $x, y \in X$ – будь-які дві альтернативи, такі, що $c(x) > c(y)$, інакше $\sum\limits_{j=1}^{q} \alpha_j c_j(x) > \sum\limits_{j=1}^{q} \alpha_j c_j(y)$, або

$$\sum_{j=1}^{q} \alpha_j (c_j(x) - c_j(y)). \tag{7}$$

З нерівності (7) випливає, що існує номер $j_0$, $1 \le j_0 \le q$, такий, що $\alpha_{j_0}(c_{j_0}(x) - c_{j_0}(y)) > 0$, тобто $c_{j_0}(x) - c_{j_0}(y) > 0$, за умови, що $\alpha_{j_0} > 0$. Оскільки критерій $c_{j_0}$ еквівалентний на $X$ всім критеріям $c_j$, $j = 1, 2, \dots, q$, то виконуються нерівності $c_j(x) > c_j(y)$, $j = 1, 2, \dots, q$. Але, так як критерії $c'_j$, $j = 1, 2, \dots, q$ є надкритеріями критеріїв $c_j$, $j = 1, 2, \dots, q$, то виконуються нерівності $c'_j(x) > c'_j(y)$, $j = 1, 2, \dots, q$, або

$$\beta_j (c'_j(x) - c'_j(y)) > 0, \;\; j = 1, 2, \dots, q, \tag{8}$$

оскільки $\beta_j > 0$, $j = 1, 2, \dots, q$. Отже, з нерівностей (8) випливає нерівність

$$\sum_{j=1}^{q} \beta_j (c'_j(x) - c'_j(y)) = \sum_{j=1}^{q} \beta_j c'_j(x) - \sum_{j=1}^{q} \beta_j c'_j(y) = c'_j(x) - c'_j(y) > 0,$$

тобто $c'(x) > c'(y)$, звідки випливає, що критерій $c'(x)$ є надкритерієм критерію $c(x)$ на $X$.

Як один з найпростіших прикладів застосування теореми 5 полягає в тому, що будь-який критерій $c(x)$ на $X$ еквівалентний критерію $\alpha c(x)+\beta$ для будь-якого $\alpha>0$ і будь-якого $\beta>R$. Це випливає з того, що для $\alpha>0$ критерії $c(x)$ і $\alpha c(x)$ еквівалентні на $X$ і з того, що число $\beta$, як сталий критерій, еквівалентний сталому нульовому критерію, який на $X$ приймає стале нульове значення.

**Теорема 6.** *Сума еквівалентних критеріїв на $X$ є надкритерієм кожного з цих критеріїв на $X$.*

***Доведення.*** Нехай $c_j(x)$, $j=1,2,\ldots,q$ попарно еквівалентні критерії на $X$. Розглянемо будь-який з цих критеріїв $c_{j_0}$, $1\le j_0\le q$. Тоді, якщо для $x,y\in X$ виконується нерівність $c_{j_0}(x)>c_{j_0}(y)$, то за умовою попарної еквівалентності розглядуваних критеріїв виконуються нерівності $c_j(x)>c_j(y)$, $j=1,2,\ldots,q$. Отже, з цих нерівностей випливає нерівність $\sum\limits_{j=1}^{q}c_j(x)>\sum\limits_{j=1}^{q}c_j(y)$.

**Теорема 7.** *Будь-яка невід'ємна (ненульова) лінійна комбінація попарно еквівалентних критеріїв на $X$ є надкритерієм кожного з цих критеріїв на $X$.*

***Доведення.*** Нехай $c_j$, $j=1,2,\ldots,q$ попарно еквівалентні критерії на $X$, $\sum\limits_{j=1}^{q}\alpha_j c_j(x)$ – невід'ємна ненульова лінійна комбінація цих критеріїв, тобто $\alpha_j\ge 0$, $j=1,2,\ldots,q$, і існує $j_0$, $1\le j_0\le q$, таке, що $\alpha_{j_0}>0$.

Розглянемо один з цих критеріїв $c_{j_1}$ $(1\le j_1\le q)$. Нехай для $x,y\in X$ виконується нерівність $c_{j_1}(x)>c_{j_1}(y)$. Тоді, за умовою попарної еквівалентності розглядуваних критеріїв, виконуються й нерівності $c_j(x)>c_j(y)$, $j=1,2,\ldots,q$. Отже, виконується й нерівність $\sum\limits_{j=1}^{q}\alpha_j c_j(x)>\sum\limits_{j=1}^{q}\alpha_j c_j(y)$, оскільки $\alpha_j c_j(x)>\alpha_j c_j(y)$, $j=1,2,\ldots,q$ і $\alpha_{j_0}c_{j_0}(x)>\alpha_{j_0}c_{j_0}(y)$.

Зазначимо, що будь-який критерій $c(x)$ на $X$ є надкритерієм на $X$ будь-якого свталого критерію $c'(x)=const$ на $X$, оскільки $X'_*=X$. Отже, $X_*\subset X'_*$.

Приклади побудови надкритеріїв можна продовжувати використовуючи їх означення. В кожному конкретному випадку, на кожній конкретній множині $X$ надкритерії будь-якого критерію будуються по-своєму так, щоб одержати задачу максимізації простішу від розглядуваної задачі максимізації.

## Список використаної літератури

1. *Червак Ю. Ю.* Оптимізація. Непокращуваний вибір. – Ужгород: Ужгород. нац. ун-т, 2002. – 312 с.
2. *Червак О. Ю., Лешко І. М., Чупов С. В.* Знаходження цілочислових паретівських оптимумів за допомогою лексикографічних відтинань // Науково-технічний вісник "Проблеми економічного та соціального розвитку регіону і практика наукового експерименту". – Київ–Ужгород, 1997.– Вып. 13. – С. 274–275.
3. *Червак О. Ю.* Надкритерії та підкритерії паретівського критерію // Міжнародна конференція "Питання оптимізації обчислень"(Київ, 6–9 жовтня 1997 р.). – Ін-т кібернетики ім. В. М. Глушкова НАН України, 1997. – С. 315–316.
4. *Червак О. Ю.* Об оптимальностях по многим равноважным критериям // Кибернетика и системный анализ. – Киев, 1997. – No 4. – С. 181–182.
5. *Червак О. Ю., Сергієнко І. В.* Оптимізація на множині Парето // Вісник Київського ун-ту. Серія: фіз.-мат. науки. – Київ, 1996. – Вип. 2. – С. 171–175.

Одержано 10.11.2015