УДК 519.97

І. А. Бойцова (Одеський нац. ун-т ім. І. І. Мечникова)

ЗАСТОСУВАННЯ ЧИСЕЛЬНО-АСИМПТОТИЧНИХ МЕТОДІВ ДО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ КЕРУВАННЯ ЗІ ШВИДКИМИ ТА ПОВІЛЬНИМИ ЗМІННИМИ

Let's consider the controlled system described by differential equations with fast and slow variables. We use the averaging method to solve it. It is necessary to take into account the effect of the fast variables on the slow subsystem behavior. System is averaged along the solutions of the degenerate problem or along the conditionally stable state of the fast subsystem. There are examples of application for this numerical-asymptotic methods to the control problems solution. The results are compared.

Розглядається керована система, яка описується диференціальними рівняннями зі швидкими та повільними змінними. Для її розв'язування використовується метод усереднення. Потрібно враховувати вплив швидких змінних на поведінку повільної підсистеми. Тому усереднення проводиться або вздовж розв'язків виродженої задачі або вздовж умовно стійкого стану спокою швидкої підсистеми. Наводяться приклади застосування наведених чисельно-асимптотичних методів до розв'язування задач керування. Проводиться порівняння отриманих результатів.

1. Вступ. Побудова законів керування різноманітними динамічними системами технічного, економічного, соціального характеру представляють значний інтерес. Особово слід відзначити динамічні системи, в яких присутні процеси, що відбуваються в різних масштабах часу. Фазові змінні таких систем поділяються на швидкі та повільні, що обумовлює специфіку поведінки таких систем. Багато робіт присвячено усередненню рівнянь керованого руху, в яких наводяться алгоритми встановлення відповідності між керуваннями усередненої задачі та даної задачі, які задано у стандартному виду [1], [3]. Але важливим є врахування впливу швидкої підсистеми на поведінку повільної [2]. З одного боку цей вплив можна враховувати як розв'язок виродженої системи диференціальних рівнянь для швидких змінних [3]– [5], з другого — як ізольований розв'язок системи алгебраїчних рівнянь, який представляє собою умовно стійкий стан спокою для швидкої підсистеми [6]– [10]. Цікаво порівняти наведені чисельно-асимптотичні методи на отриманих за однаковими керуваннями розв'язках.

2. Усереднення вздовж розв'язків виродженої задачі. (див. [4], [5]) Розглянемо диференціальні рівняння керованого руху в системі зі швидкими та повільними змінними

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \varepsilon \left[f(t,x,y) + A(x)\varphi(t,u) \right], \quad & x(0) = x_0, \\ \dot{y} &= g(t,x,y), & y(0) = y_0, \end{aligned} \tag{1}$$

де $t \in [0,T]$, $T = L\varepsilon^{-1}$, $L > 0$, $\varepsilon > 0$ – малий параметр, $x \in D_x \subset R^n$ – повільні змінні, $y \in D_y \subset R^m$ – швидкі змінні, $f(t,x,y)$, $g(t,x,y)$, $\varphi(t,u)$ – задані вектор-функції, $A(x)$ – задана матриця $n \times s$, $u(t) \in U \subset comp(R^r)$ – керування з компактної множини в R^r.

Нехай функції $f(t,x,y)$, $g(t,x,y)$ – вимірні за змінною t, функція $\varphi(t,u)$ – вимірна за t,u, функції $f(t,x,y)$, $A(x)$, $g(t,x,y)$ задовольняють умову Ліпшиця за змінними x та y зі сталою λ для довільного t; функції $f(t,x,y)$, $A(x)$, $\varphi(t,u)$ – рівномірно обмежені константою M.

Означення 1. *Допустимими керуваннями задачі (1) назвемо вимірні функції $u = u(t)$ з компактної множини U, для яких знайдеться $\varepsilon_0 > 0$, яке не залежить від $u(t)$, що для усіх $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ відповідні розв'язки $x(t) \in D_x$, $y(t) \in D_y$ задачі (1) визначено при $t \in [0, T]$.*

Для системи диференціальних рівнянь (1) розглянемо відповідну вироджену задачу при $\varepsilon = 0$, вважаючи x параметром:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 0, & x(0) &= x_0, \\ \dot{y} &= g(t, x, y), & y(0) &= y_0. \end{aligned} \tag{2}$$

Нехай існує розв'язок $y = h(t, x, y_0)$ виродженої задачі (2), визначений при $t \geq 0$, який задовольняє умову Ліпшиця за змінною x.

Нехай рівномірно відносно x, y_0, t_0 вздовж розв'язку виродженої задачі для швидких змінних існує границя

$$f_0(x) = \lim_{\Delta \to \infty} \frac{1}{\Delta} \int\limits_{t_0}^{t_0+\Delta} f(s, x, h(s, x, y_0)) ds. \tag{3}$$

Задачі (1) поставимо у відповідність усереднену задачу

$$\dot{z} = \varepsilon [f_0(z) + A(z) v], \quad z(0) = x_0, \tag{4}$$

де керування v обирається з множини допустимих керувань V виду

$$V = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{t_0}^{t_0+2\pi} \varphi(s, U) ds, \tag{5}$$

якщо функція $\varphi(t, u)$ є 2π-періодичною та виду

$$V = \lim_{\Delta \to \infty} \frac{1}{\Delta} \int\limits_{t_0}^{t_0+\Delta} \varphi(s, U) ds \tag{6}$$

у загальному випадку.

Для спрощення обчислень в усередненій задачі перейдемо до повільного часу $\tau = \varepsilon t$, $\tau \in [0, L]$ та отримаємо задачу

$$\frac{d\hat{z}}{d\tau} = f_0(\hat{z}) + A(\hat{z}) \cdot \hat{v}, \quad \hat{z}(0) = x_0. \tag{7}$$

Задача (7) значно простіша за задачу (1) тому, що вона автономна, а проміжок часу інтегрування системи скінченний. Для розв'язування задачі можна використовувати довільні чисельні методи щодо систем диференціальних рівнянь, обираючи шаг інтегрування $\Delta\tau = \varepsilon \cdot 2\pi$ у періодичному випадку та $\Delta\tau = \varepsilon \cdot \Delta = \sqrt{\varepsilon}$ у загальному випадку. Значення Δ в загальному випадку повинно задовольняти властивостям

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \Delta(\varepsilon) = +\infty, \qquad \lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon \cdot \Delta(\varepsilon) = 0.$$

Нехай $\hat{v}(\tau)$ – деяке допустиме керування, а $\hat{z}(\tau)$ – відповідна до нього траєкторія задачі (7). Керуванню $\hat{v}(\varepsilon t) \in V$ поставимо у відповідність ступінчасте середнє керування $\bar{u}(t) \in U$, що обчислюється за формулами

$$\hat{v}_i = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{2\pi i}^{2\pi(i+1)} \hat{v}(\varepsilon t)\, dt,$$

$$\bar{u}(t) = \left\{ \bar{u}_i(t): \quad \frac{1}{2\pi} \int\limits_{2\pi i}^{2\pi(i+1)} \varphi(t, \bar{u}_i(t))\, dt = \hat{v}_i, \quad i = 0, 1, ..., N-1 \right\} \tag{8}$$

у періодичному випадку та за формулами

$$\hat{v}_i = \frac{1}{\Delta} \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} \hat{v}(\varepsilon t)\, dt,$$

$$\bar{u}_i(t): \quad \left\| \hat{v}_i - \frac{1}{\Delta} \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} \varphi(t, \bar{u}_i(t))\, dt \right\| = \min_{u \subset U} \left\| \hat{v}_i - \frac{1}{\Delta} \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} \varphi(t, u(t))\, dt \right\|,$$

$$\bar{u}(t) = \{ \bar{u}_i(t): \quad t_i \le t < t_{i+1}, \quad i = 0, 1, ..., N-1 \} \tag{9}$$

у загальному випадку.

Отримане керування $\bar{u}(t) \in U$ можна взяти у якості асимптотичного керування задачі (1), на основі якого можна побудувати відповідну траєкторію $\bar{x}(t)$, $\bar{y}(t)$ таку, що

$$\|\bar{x}(t) - \hat{z}(\varepsilon t)\| \le \eta. \tag{10}$$

Приклад 1. *Розглянемо задачу керування системою*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \varepsilon\left[(y_2 - y_1)x_2 + u\sin(t + x_2)\right], & x_1(0) = x_1^0, \\ \dot{x}_2 = \varepsilon\left[e^{-t}y_2x_1 + u\cos(t + x_2)\right], & x_2(0) = x_2^0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2 + 1, & y_1(0) = 0, \\ \dot{y}_2 = y_1, & y_2(0) = 0, \end{cases} \qquad U = \{u(t): |u(t)| \le u_0\}.$$

Перетворимо задачу до виду (1)

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \varepsilon\left[(y_2 - y_1)x_2 + u\cos t\sin x_2 + u\sin t\cos x_2\right], & x_1(0) = x_1^0, \\ \dot{x}_2 = \varepsilon\left[e^{-t}y_2x_1 + u\cos t\cos x_2 - u\sin t\sin x_2\right], & x_2(0) = x_2^0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2 + 1, & y_1(0) = 0, \\ \dot{y}_2 = y_1, & y_2(0) = 0, \end{cases} \qquad U = \{u(t): |u(t)| \le u_0\}.$$

де

$$f(t, x, y) = \begin{pmatrix} (y_2 - y_1)x_2 \\ e^{-t}y_2x_1 \end{pmatrix}, \quad \varphi(t, u) = \begin{pmatrix} u\cos t \\ u\sin t \end{pmatrix}, \quad A(x) = \begin{pmatrix} \sin x_2 & \cos x_2 \\ \cos x_2 & -\sin x_2 \end{pmatrix}.$$

Визначимо вироджену задачу

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 0, & x_1(0) = x_1^0, \\ \dot{x}_2 = 0, & x_2(0) = x_2^0, \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{y}_1 = y_2 + 1, & y_1(0) = 0, \\ \dot{y}_2 = y_1, & y_2(0) = 0 \end{cases}$$

та знайдемо розв'язок швидкої підсистеми з урахуванням початкових умов

$$\begin{cases} y_1(t) = 0.5e^t - 0.5e^{-t}, \\ y_2(t) = 0.5e^t + 0.5e^{-t} - 1. \end{cases}$$

Функції з правої частини повільної підсистеми на розв'язках виродженої задачі мають вид

$$f(t, x, h(t, x)) = \begin{pmatrix} (e^{-t} - 1)\, x_2 \\ (0,5e^{-2t} - e^{-t} + 0,5)\, x_1 \end{pmatrix},$$

після усереднення яких, отримаємо задачу керування виду

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = \varepsilon\left[-z_2 + v_1 \sin z_2 + v_2 \cos z_2\right], \quad z_1(0) = x_1^0, \\ \dot{z}_2 = \varepsilon\left[0,5z_1 + v_1 \cos z_2 - v_2 \sin z_2\right], \quad z_2(0) = x_2^0. \end{cases}$$

Використовуючи визначення опорної функції

$$(V, \alpha) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \max_{|u(t)| \le u_0} (\alpha_1 u \cos t + \alpha_2 u \sin t)\, dt =$$

$$= \frac{u_0}{2\pi}\left(4|\alpha_1|\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t dt + 4|\alpha_2|\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t dt\right) = \frac{2u_0}{\pi}|\alpha_1| + \frac{2u_0}{\pi}|\alpha_2|,$$

множину допустимих керувань усередненої задачі отримаємо у вигляді

$$V = \left\{ v(t) : |v_1(t)| \le \frac{2u_0}{\pi}, |v_2(t)| \le \frac{2u_0}{\pi} \right\}.$$

У якості допустимих керувань усередненої задачі візьмемо функції

$$v_1(t) = -\frac{1}{3}\sin\frac{t}{2}, \quad v_2(t) = \cos\frac{t}{2},$$

які належать множині $V = \{v(t) : |v_1(t)| \le 1, |v_2(t)| \le 1\}$, якщо $u_0 = \frac{\pi}{2}$.

Побудуємо асимптотичне керування задачі (1) за формулами (8). Тому для $t \in [2\pi i, 2\pi(i+1))$ визначимо функції

$$v_1^i = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{2\pi i}^{2\pi(i+1)} \frac{1}{3}\sin\frac{t}{2} dt = -\frac{1}{3\pi}\cos\frac{t}{2}\Big|_{2\pi i}^{2\pi(i+1)} = -\frac{2}{3\pi}(-1)^i,$$

$$v_2^i = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{2\pi i}^{2\pi(i+1)} \cos\frac{t}{2} dt = \frac{1}{\pi}\sin\frac{t}{2}\Big|_{2\pi i}^{2\pi(i+1)} = 0.$$

Асимптотичне керування $\bar{u}(t)$ задачі (1) будемо шукати у вигляді

$$\bar{u}(t) = \cos(at + b),$$

тоді

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{2\pi i}^{2\pi(i+1)}\varphi_1\left(t,\bar{u}\left(t\right)\right)dt=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{2\pi i}^{2\pi(i+1)}\bar{u}\left(t\right)\cos tdt=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{2\pi i}^{2\pi(i+1)}\cos\left(at+b\right)\cos tdt=$$

$$=-\frac{a}{\pi\left(1-a^2\right)}\cdot\sin a\pi\cdot\cos\left(2a\pi i+a\pi+b\right);$$

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{2\pi i}^{2\pi(i+1)}\varphi_2\left(t,\bar{u}\left(t\right)\right)dt=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{2\pi i}^{2\pi(i+1)}\bar{u}\left(t\right)\sin tdt=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{2\pi i}^{2\pi(i+1)}\cos\left(at+b\right)\sin tdt=$$

$$=\frac{1}{\pi\left(1-a^2\right)}\cdot\sin a\pi\cdot\sin\left(2a\pi i+a\pi+b\right).$$

Параметри a і b знайдемо, дорівнюючи відповідні вирази

$$-\frac{a}{\pi\left(1-a^2\right)}\cdot\sin a\pi\cdot\cos\left(2a\pi i+a\pi+b\right)=-\frac{2}{3\pi}\left(-1\right)^i;$$

$$\frac{1}{\pi\left(1-a^2\right)}\cdot\sin a\pi\cdot\sin\left(2a\pi i+a\pi+b\right)=0.$$

Враховуючи, що $a\neq 0$, $a\neq -1$, $a\neq 1$ з другого рівняння одержимо

$$\sin\left(2a\pi i+a\pi+b\right)=0,\quad 2a\pi i+a\pi+b=\pi k,\quad k\in \mathrm{Z}.$$

Однак на кожному i-ому проміжку з множини розв'язків оберемо одне, якщо $k=i$. Тоді з першого рівняння $\cos\left(2a\pi i+a\pi+b\right)=\cos\pi i=\left(-1\right)^i$ отримаємо еквівалентне до нього рівняння $\sin a\pi=\frac{2\left(1-a^2\right)}{3a}$, чисельний розв'язок якого дає значення $a=\frac{1}{2}$ або $a=-\frac{1}{2}$.

Якщо $a=\frac{1}{2}$, то $b=-\frac{\pi}{2}$, а керування $\bar{u}\left(t\right)=\cos\left(\frac{t}{2}-\frac{\pi}{2}\right)=\sin\frac{t}{2}$.

Якщо $a=-\frac{1}{2}$, то $b=\frac{\pi}{2}+2\pi i$, а керування $\bar{u}\left(t\right)=\cos\left(-\frac{t}{2}+\frac{\pi}{2}+2\pi i\right)=\sin\frac{t}{2}$.

Чисельний розв'язок задачі (1), породжений асимптотичним керуванням $\bar{u}\left(t\right)=\sin\frac{t}{2}\in U$, знайдемо при $x_1^0=0.1$, $x_2^0=-0.1$, $L=1$ з кроком інтегрування $\Delta t=0.01$, число шагів інтегрування – N. А чисельний розв'язок усередненої задачі, породжений керуваннями $v_1\left(t\right)=-\frac{1}{3}\sin\frac{t}{2}$, $v_2\left(t\right)=\cos\frac{t}{2}$, знайдемо у повільному часі з шагом $\Delta\tau=\varepsilon 2\pi$, число шагів інтегрування – N_0.

Графічна ілюстрація отриманих розв'язків наведена на рисунку 1.

На різних значеннях ε отримано оцінки близькості розв'язків, які наведено у таблиці 1, та які підтверджують співвідношення (10).

3. Усереднення вздовж розв'язків алгебраїчної системи рівнянь. (див. [9], [10]) Розглянемо задачу керування системою, що описується диференціальними рівняннями зі швидкими та повільними змінними і крайовими умовами на швидкі змінні

$$\dot{x}=\varepsilon\left[f(t,x,y)+A(x)\varphi(t,u)\right],\qquad x\left(0\right)=x^0,\tag{11}$$

$$\dot{y}=g(x,y),\qquad R\left(y\left(0\right),y\left(T\right)\right)=0.\tag{12}$$

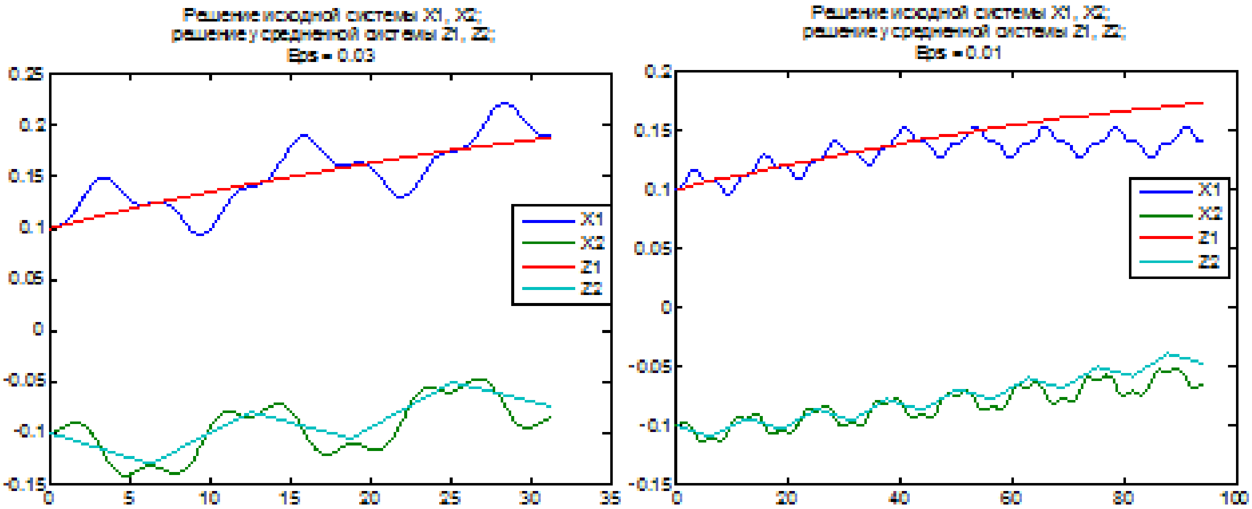

Рис. 1. Розв'язки даної та усередненої задач при $\varepsilon = 0,03$ та $\varepsilon = 0,01$

Таблиця 1.

Результати порівняння розв'язків даної та усередненої задач

ε	N	N_0	$\max\lvert x_1(t) - z_1(t)\rvert$	$\max\lvert x_2(t) - z_2(t)\rvert$	$\max\lVert x(t) - z(t)\rVert$
0,05	2 000	3	0,0067	0,0090	0,0113
0,03	3 333	5	0,0034	0,0048	0,0109
0,01	10 000	15	0,0333	0,0181	0,0379
0,005	20 000	31	0,0504	0,0301	0,0587

На відміну від задачі (1) тут швидка підсистема є автономною. Нехай крайовій задачі (12) відповідає умовно стійкий стан спокою, який визначається виконанням умов, наведених у [8], [10].

Нехай рівняння $g(x(t), y(t)) = 0$ має ізольований розв'язок $y = y_0(t, x(t))$ в деякій обмеженій замкненій множині простору змінних, та функція $y_0(t, x)$ є неперервною в цій області та задовольняє умову Ліпшиця за змінною x зі сталою $\lambda > 0$.

Означення 2. *Крайова задача для швидких змінних (12) має умовно стійкий стан спокою, якщо власні значення матриці*

$$\frac{\partial g(x(t), y_0(t, x(t)))}{\partial y_0}, \tag{13}$$

задовольняють умову

$$\begin{array}{lll} Re\lambda_i(t) < 0, & i = \overline{1, m_1}, \quad m_1 < m, & \\ Re\lambda_i(t) > 0, & i = \overline{m_1 + 1, m}, & t \in [0, T], \end{array} \tag{14}$$

серед яких немає кратних.

Нехай рівномірно відносно x та t_0 вздовж розв'язків нелінійного рівняння існує границя

$$f_0(x) = \lim_{T_0 \to \infty} \frac{1}{T_0} \int\limits_{t_0}^{t_0+T_0} f(s, x, y_0(s, x)) ds. \qquad (15)$$

Задачі (11), (12) поставимо у відповідність усереднену задачу

$$\dot{z} = \varepsilon \left[f_0(z) + A(z) v \right], \quad z(0) = x^0, \qquad (16)$$

в якій перейдемо до повільного часу $\tau = \varepsilon t$, $\tau \in [0, L]$ та отримаємо

$$\frac{d\,\hat{z}}{d\tau} = f_0(\hat{z}) + A(\hat{z}) \cdot \hat{v}, \quad \hat{z}(0) = x^0,$$

де керування v обирається з множини допустимих керувань V, яке будується, як і у частині 2, за формулами (5), (6).

Отримане за формулами (8) або (9) керування $\bar{u}(t) \in U$ можна взяти у якості асимптотичного керування задачі (11), (12), на основі якого можна побудувати відповідну траєкторію $\bar{x}(t)$, $\bar{y}(t)$ таку, що

$$\|\bar{x}(t) - \hat{z}(\varepsilon t)\| \le \eta. \qquad (17)$$

Приклад 2. *Розглянемо ту ж саму задачу керування, що й в прикладі 1*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \varepsilon \left[(y_2 - y_1) x_2 + u \cos t \sin x_2 + u \sin t \cos x_2 \right], & x_1(0) = x_1^0, \\ \dot{x}_2 = \varepsilon \left[e^{-t} y_2 x_1 + u \cos t \cos x_2 - u \sin t \sin x_2 \right], & x_2(0) = x_2^0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2 + 1, \\ \dot{y}_2 = y_1, \end{cases} \quad R(y(0), y(L/\varepsilon)) = 0, \quad U = \{u(t) : |u(t)| \le u_0\}.$$

Крайова задача для швидких змінних має умовно стійний стан спокою тому, що власні значення матриці (13) не кратні та мають значення різних знаків $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$. Знайдемо ізольований розв'язок нелінійного рівняння

$$\begin{cases} y_2 + 1 = 0, \\ y_1 = 0, \end{cases}, \quad \begin{cases} y_1(t) = 0, \\ y_2(t) = -1, \end{cases},$$

на якому повільна підсистема приймає вигляд

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}_1 = \varepsilon \left[-\tilde{x}_2 + u \cos t \sin \tilde{x}_2 + u \sin t \cos \tilde{x}_2 \right], & \tilde{x}_1(0) = x_1^0, \\ \dot{\tilde{x}}_2 = \varepsilon \left[-e^{-t} \tilde{x}_1 + u \cos t \cos \tilde{x}_2 - u \sin t \sin \tilde{x}_2 \right], & \tilde{x}_2(0) = x_2^0. \end{cases}$$

Після усереднення отримаємо задачу керування виду

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = \varepsilon \left[-z_2 + v_1 \sin z_2 + v_2 \cos z_2 \right], & z_1(0) = x_1^0, \\ \dot{z}_2 = \varepsilon \left[v_1 \cos z_2 - v_2 \sin z_2 \right], & z_2(0) = x_2^0. \end{cases}$$

Множину допустимих керувань та відповідність між керуваннями даної та усередненої задач встановимо, як і в прикладі 1.

Графічна ілюстрація отриманих розв'язків наведена на рисунку 2.

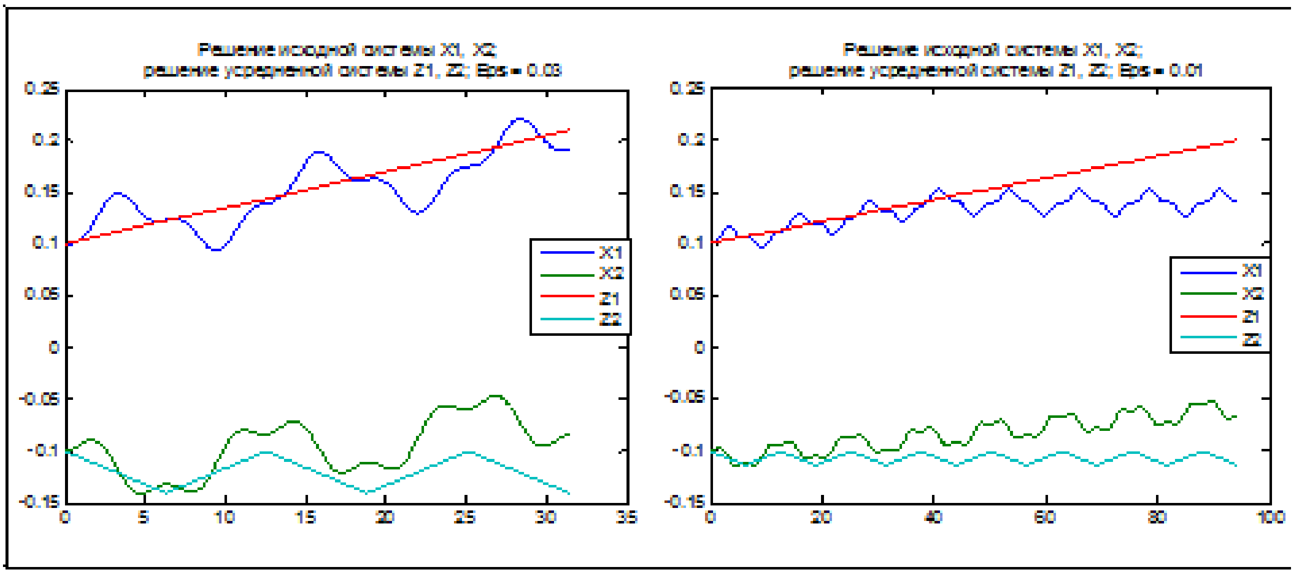

Рис. 2. Розв'язки даної та усередненої задач при $\varepsilon = 0,03$ та $\varepsilon = 0,01$

Таблиця 2.

Результати порівняння розв'язків даної та усередненої задач

ε	N	N_0	$\max \lvert x_1(t) - z_1(t) \rvert$	$\max \lvert x_2(t) - z_2(t) \rvert$	$\max \lVert x(t) - z(t) \rVert$
0,05	2 000	3	0,0115	0,0135	0,0569
0,03	3 333	5	0,0192	0,0407	0,0590
0,01	10 000	15	0,0599	0,0477	0,0766
0,005	20 000	31	0,0799	0,0381	0,0885

На різних значеннях ε отримано оцінки близькості розв'язків, які наведено у таблиці 2, та які підтверджують співвідношення (17).

4. Висновки. У статті наводяться два алгоритми врахування впливу швидких змінних на поведінку повільної підсистеми при усередненні. В одному випадку усереднення проводиться вздовж розв'язків виродженої задачі для швидких змінних. В другому випадку усереднення проводиться вздовж розв'язків нелінійної алгебраїчної системи, яка визначає умовно стійкий стан спокою для швидкої підсистеми. Проводиться порівняння обох схем на одному й тому ж прикладі. Представлене графічне зображення траєкторій та зведені у таблиці результати свідчать про те, що на одних і тих же керуваннях, що визначаються у даній та усередненій задачах, відповідні до цих керувань траєкторії є близькими. Однак, друга схема усереднення є меньш точною. Обрання схеми усереднення для конкретної задачі залежить від того, що простіше розв'язувати, вироджену систему диференціальних рівнянь чи алгербаїчну систему для швидких змінних. Представлені у таблицях похибки пов'язані з величиною обраного шагу інтегрування та проміжком часу, на якому розв'язується задача. При цьому кількість виконаних обчислень дає накопичення похибки, починаючи з деякого моменту часу. Отримані результати підтверджують можливість застосування методу усереднення для розв'язування задач керування зі швидкими та повільними змінними.

Список використаної літератури

1. *Плотников В. А.* Метод усреднения в задачах управления. – Киев-Одесса: Лыбидь, 1992. – 188 с.
2. *Плотников В. А., Ларбани М.* Обоснование одной схемы частичного усреднения для систем с медленными и быстрыми переменными // Дифференц. уравнения. – 1992. – **28**, №3. – С. 428–432.
3. *Плотников В. А., Бенумерова Т. В., Бойцова И. А., Кичмаренко О.Д.* Усреднение уравнений управляемого движения // Междун. конф. по управлению "Автоматика – 2000". – Львов, 2000. – **1**. – С. 189–193.
4. *Плотников В. А., Бойцова И. А.* Усреднение в задачах оптимального управления системами с быстрыми и медленными переменными // Проблемы управления и информатики. – 2000. – №5. – С. 152–156.
5. *Бойцова И. А.* Численно-асимптотическое решение задачи управления с быстрыми и медленными переменными // Междун. летняя мат. школа памяти В. А. Плотникова. – Одесса, 2013. – С. 43–44.
6. *Васильева А. Б., Бутузов В. Ф.* Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. – М.: Наука, 1973. – 272 с.
7. *Васильева А. Б., Бутузов В. Ф.* Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. – М.: Высш. шк., 1990. – 208 с.
8. *Бойцова И. А.* Построение асимптотического решения краевой задачи с быстрыми и медленными переменными в условно устойчивом случае // Вест. ОГУ. Физ.-мат. науки. – 2003. – **8**, №2. – С. 113–120.
9. *Бойцова И. А.* Численно-асимптотическое решение задачи управления системами в условно устойчивом случае // Міжнар. мат. конф. "Боголюбовські читання DIF–2013. Диференціальні рівняння, теорія функцій та їх застосування". – Київ, 2013. – С. 71–72.
10. *Boitsova I. A.* Construct asymptotically optimal control of system in conditionally stable case // International Journal of Pure and Applied Mathematics. – 2013. – **84**, №2. – P. 81–92.

Одержано 10.11.2015