УДК 512.64+512.56

В. М. Бондаренко (Інститут математики НАН України),
В. А. Лісикевич (Київський нац. ун-т ім. Тараса Шевченка)

P-ВИЗНАЧАЛЬНІ ПОЛІНОМИ ДЛЯ НЕСЕРІЙНИХ ЧАСТКОВО ВПОРЯДКОВАНИХ МНОЖИН ШИРИНИ 2

In this paper one describes P-defining polynomials of non-serial posets with respect to their comparable elements.

У цій роботі описано P-визначальні поліноми несерійних частково впорядкованих множин відносно їх порівняльних елементів.

Квадратичні форми виникають при розгляді багатьох задач теорії зображень. У 1972 р. П. Габріель [1] ввів цілочислову квадратичну форму для сагайдаків, назвавши її квадратичною формою Тітса, і показав, що сагайдак має скінченне число класів еквівалентності нерозкладних зображень тоді і лише тоді, коли його квадратична форма Тітса є додатною. Ця робота П. Габріеля стала початком нового напрямку в теорії зображень, який пов'язаний з вивченням квадратичних форм для різних об'єктів. У 1974 р. Ю. А. Дрозд [2] показав, що частково впорядкована множина має скінченне число класів еквівалентності нерозкладних зображень тоді і лише тоді, коли її форма Тітса (яка вводиться аналогічним чином) є слабо додатною (тобто додатною на множині векторів з невід'ємними координатами).

В теорії зображень частково впорядкованих множин важливу роль відіграють не лише слабо додатні, а й додатні форми Тітса (див. [3]). Всі частково впорядковані множини з додатною формою Тітса (що є аналогами графів Динкіна) описано в роботі [4].

У цій роботі вивчаються реберно-локальні деформації додатних квадратичних форм Тітса скінченних частково впорядкованих множин. Інший тип локальних деформацій (введених в [5] і названих в [6] поточково-локальними) вивчався раніше (див., окрім [5], роботи [7], [8]).

1. Основні поняття. Нехай

$$f(z) = f(z_1, \ldots, z_n) = \sum_{i=1}^{n} f_i z_i^2 + \sum_{i<j} f_{ij} z_i z_j \tag{1}$$

— квадратична форма над полем дійсних чисел $\mathbb{R}$. Її *реберно-локальною деформацією* називається квадратична форма вигляду

$$f^{(p,q)}(z,t) = \sum_{i=1}^{n} f_i z_i^2 + t f_{pq} z_p z_q + \sum_{(i,j)\neq(p,q)} f_{ij} z_i z_j, \tag{2}$$

де p і q $(p < q)$ такі, що $f_{pq} \neq 0$, а t — параметр, що пробігає поле $\mathbb{R}$.

Квадратична форма (2) називається також *локальною деформацією квадратичної форми* (1) *відносно* $z_p z_q$.

Число $a \in \mathbb{R}$ називається *P-граничним числом квадратичної форми $f(z)$ для $z_p z_q$* або *(p,q)-им P-граничним числом квадратичної форми $f(z)$*, якщо $f(z,a)$ не є додатною квадратичною формою і в кожному околі числа a існує число c таке, що $f(z,c)$ є додатною квадратичною формою.

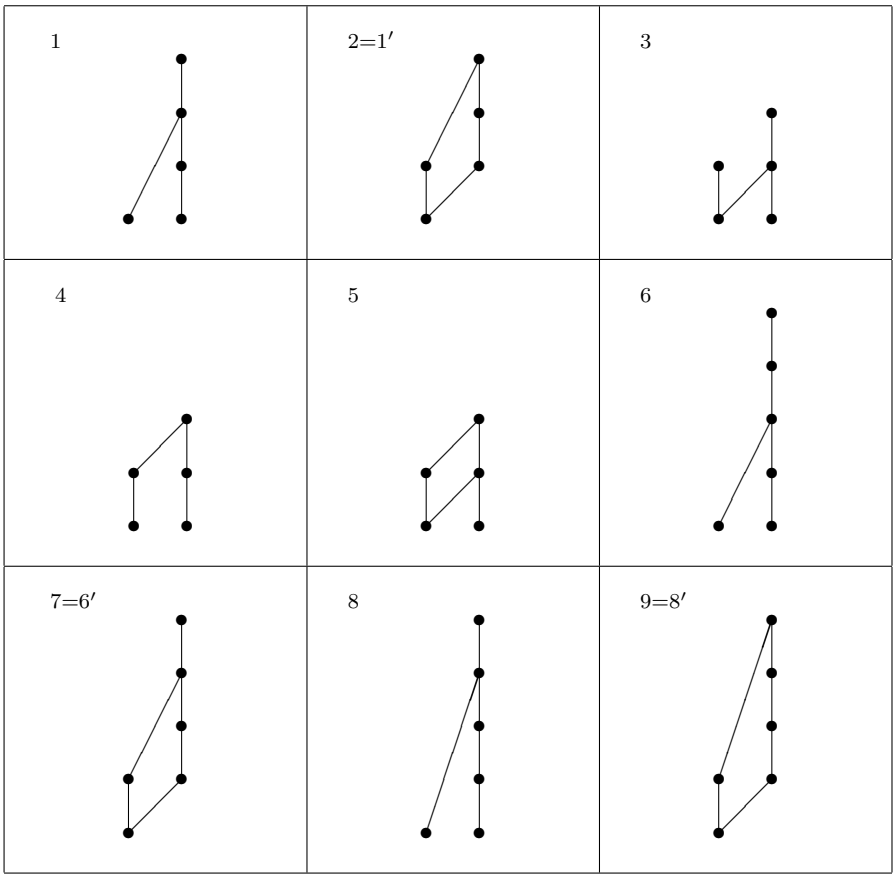
У випадку, коли квадратична форма $f(z)$ додатна, існує два (p,q)-их P-граничних числа. Поліном $\Delta_f^{(p,q)}(t) = (t-b_1)(t-b_2)$, де b_1 і b_2 — ці P-граничні числа, називається *P-визначальним поліномом квадратичної форми $f(z)$ для $z_p z_q$* або *P-визначальним (p,q)-поліномом квадратичної форми $f(z)$*.

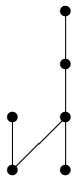
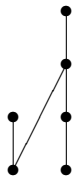
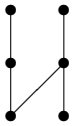
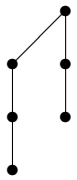
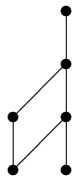
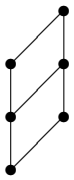
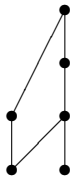
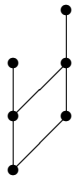
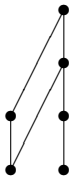
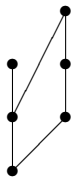
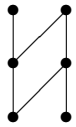
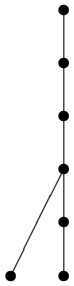
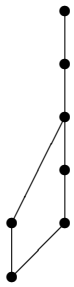
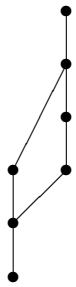
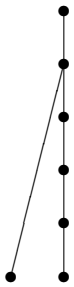
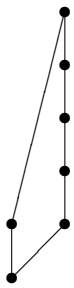
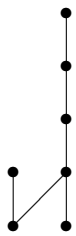
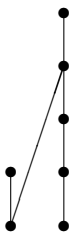
Усі ці поняття введено в роботі [6].

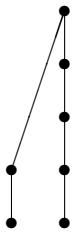
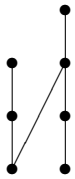
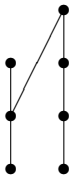
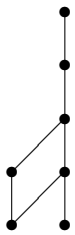
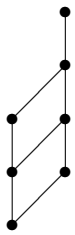
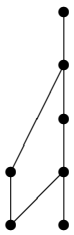
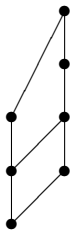
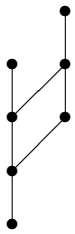
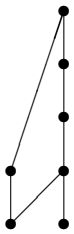
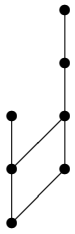
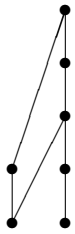
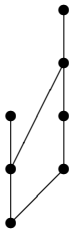
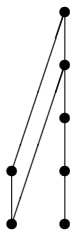
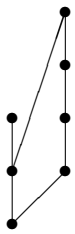
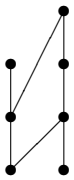
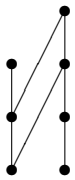
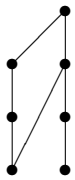
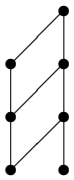
2. Несерійні частково впорядковані множини з додатною формою Тітса. Нехай S — скінченна частково впорядкована множина (що не містить елемента, позначеного символом 0). Її квадратичною формою Тітса називається цілочислова квадратична форма, яка задається наступною рівністю:

$$q_S(z) = z_0^2 + \sum_{i \in S} z_i^2 + \sum_{i<j, i,j \in S} z_i z_j - z_0 \sum_{i \in S} z_i.$$

В подальшому нам знадобиться список частково впорядкованих множин ширини 2 з додатною квадратичною формою Тітса у випадку, коли ці множини несерійні (множина S називається серійною, якщо для будь-якого $N > |S|$ існує частково впорядкована множина T_N порядку N з додатною формою Тітса, яка містить в собі множину S, і несерійною в іншому разі). Згідно [4] всі такі частково впорядковані множини вичерпуються (з точністю до ізоморфізму та дуальності) множинами, вказаними в наступній таблиці.



10 	11 	12 
13 	14 	15=14′ 
16 	17=16′ 	18 
19=18′ 	20 	21 
22=21′ 	23=21″ 	24 
25=24′ 	26 	27 

28 	29 	30 
31 	32=31′ 	33 
34=33′ 	35=33″ 	36 
37=36′ 	38 	39=38′ 
40 	41=40′ 	42 
43 	44 	45 

Зробимо деякі пояснення до цієї таблиці.

Частково впорядковану множину, яка розміщена в таблиці за номером i, позначаємо через P_i. Її елементи нумеруються числами $1, 2, \dots n_i$, де $n_i = |P_i|$, а відношення часткового порядку позначається через $\preceq$. При цьому точки множини P_i нумеруються наступним чином: спочатку нумеруються знизу вверх точки лівого вертикального ланцюга, а потім (також знизу вверх) правого.

Якщо в таблиці написано $i = j'$, то це означає, що P_i можна одержати з P_j заміною єдиної її максимальної точки на єдину мінімальну точку. Те ж саме стосується і випадку $i = j'' = (j')'$ (потрібно порівнювати P_i і $P_{j'}$).

Множину всіх частково впорядкованих множин із приведеної таблиці позначимо через $\mathcal{P}$, а частково впорядкованих множин без номерів $i = j'$ і $i = j''$ — через $\mathcal{P}_0$.

3. Основний результат. Нехай S — скінченна частково впорядкована множина (що не містить елемента, позначеного символом 0). Її квадратичною формою Тітса називається цілочислова квадратична форма, яка задається наступною рівністю:

$$q_S(z) = z_0^2 + \sum_{i \in S} z_i^2 + \sum_{i<j, i,j \in S} z_i z_j - z_0 \sum_{i \in S} z_i.$$

Ми розглядаємо задачу про опис P-визначальних поліномів вигляду $\Delta_Q^{(p,q)}$, $p, q \in S$ $(p < q)$, квадратичної форми Тітса $Q = q_S(z)$ для частково впорядкованої множини S ширини 2 у випадку, коли її форма $q_S(z)$ додатна, а сама вона несерійна. Всі такі множини вказані у вище приведеній таблиці.

Оскільки квадратична форма Тітса є цілочисловою, то її P-визначальні поліноми мають раціональні коефіцієнти. Відповідний цілочисловий поліном зі взаємно простими коефіцієнтами (в сукупності) і додатнім коефіцієнтом при старшому члені (який отримується із P-визначального полінома множенням його на деяке ціле число m) називається цілочисловим P-визначальним поліномом; зауважимо, що m завжди від'ємне (відносно всіх цих означень і тверджень див. [6]).

У випадку $p, q \in S$ замість "(цілочисловий) P-визначальний поліном квадратичної форми Тітса $q_S(z)$ для $z_p z_q$" будемо говорити "(цілочисловий) P-визначальний поліном частково впорядкованої множини S для p і q". Всі P-визначальні поліноми частково впорядкованої множини S будемо записувати у вигляді симетричної матриці з нульовими елементами на головній діагоналі, в якій на місці (p, q) і (q, p) стоїть P-визначальний поліном для p і q, якщо $p < q$, і елемент 0, якщо p і q непорівняльні. Таку матрицю називатимемо матрицею P-визначальних поліномів для S і позначатимемо через $DP(S)$. Відповідну їй матрицю з цілочисловими поліномами будемо називати цілочисловою матрицею P-визначальних поліномів для S і позначатимемо через $ZDP(S)$.

Очевидно, що якщо існує бієктивне відображення між частково впорядкованими множинами S і T, яке зберігає порівняльність елементів, то матриці $DP(S)$ і $DP(T)$, а значить і матриці $ZDP(S)$ і $ZDP(T)$, однакові з точністю до (однієї і тієї) перестановки рядків та стовпців. Оскільки таке відображення існує для дуальних частково впорядкованих множин, а також для пар множин P_i, $P_{i'}$ і P_i, $P_{i''}$ (див. п. 2), то для опису всіх P-визначальних поліномів несе-

рійних частково впорядкованих множин з додатною формою Тітса достатньо розглянути частково впорядковані множини із $\mathcal{P}_0$ (також див. п. 2).

Теорема 1. *Цілочислові матриці P-визначальних поліномів $ZDP(P_i)$ для частково впорядкованих множин $P_i \in \mathcal{P}_0$ мають наступний вигляд:*

1)
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 5t^2-4t-4 & 5t^2-4t-4 \\ 0 & 0 & 5t^2-12t+4 & 4t^2-4t-3 & 4t^2-4t-3 \\ 0 & 5t^2-12t+4 & 0 & 4t^2-4t-3 & 4t^2-4t-3 \\ 5t^2-4t-4 & 4t^2-4t-3 & 4t^2-4t-3 & 0 & 5t^2-12t+4 \\ 5t^2-4t-4 & 4t^2-4t-3 & 4t^2-4t-3 & 5t^2-12t+4 & 0 \end{pmatrix}$$

3)
$$\begin{pmatrix} 0 & 5t^2-4t-4 & 0 & 5t^2-4t-4 & 5t^2-4t-4 \\ 5t^2-4t-4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4t^2-4t-3 & 4t^2-4t-3 \\ 5t^2-4t-4 & 0 & 4t^2-4t-3 & 0 & 5t^2-12t+4 \\ 5t^2-4t-4 & 0 & 4t^2-4t-3 & 5t^2-12t+4 & 0 \end{pmatrix}$$

4)
$$\begin{pmatrix} 0 & 5t^2-12t+4 & 0 & 0 & 5t^2-4t-4 \\ 5t^2-12t+4 & 0 & 0 & 0 & 5t^2-4t-4 \\ 0 & 0 & 0 & 5t^2-12t+4 & 5t^2-4t-4 \\ 0 & 0 & 5t^2-12t+4 & 0 & 5t^2-4t-4 \\ 5t^2-4t-4 & 5t^2-4t-4 & 5t^2-4t-4 & 5t^2-4t-4 & 0 \end{pmatrix}$$

5)
$$\begin{pmatrix} 0 & 5t^2-8t & 0 & 4t^2-4t-3 & 5t^2-8t \\ 5t^2-8t & 0 & 0 & 0 & 4t^2-4t-3 \\ 0 & 0 & 0 & 5t^2-8t & 4t^2-4t-3 \\ 4t^2-4t-3 & 0 & 5t^2-8t & 0 & 5t^2-8t \\ 5t^2-8t & 4t^2-4t-3 & 4t^2-4t-3 & 5t^2-8t & 0 \end{pmatrix}$$

6)
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 6t^2-6t-2 & 6t^2-6t-2 & 6t^2-6t-2 \\ 0 & 0 & 6t^2-16t+8 & 4t^2-4t-2 & 4t^2-4t-2 & 4t^2-4t-2 \\ 0 & 6t^2-16t+8 & 0 & 4t^2-4t-2 & 4t^2-4t-2 & 4t^2-4t-2 \\ 6t^2-6t-2 & 4t^2-4t-2 & 4t^2-4t-2 & 0 & 4t^2-10t+4 & 4t^2-10t+4 \\ 6t^2-6t-2 & 4t^2-4t-2 & 4t^2-4t-2 & 4t^2-10t+4 & 0 & 4t^2-10t+4 \\ 6t^2-6t-2 & 4t^2-4t-2 & 4t^2-4t-2 & 4t^2-10t+4 & 4t^2-10t+4 & 0 \end{pmatrix}$$

8)
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 6t^2-4t-4 & 6t^2-4t-4 \\ 0 & 0 & 4t^2-10t+4 & 4t^2-10t+4 & 4t^2-4t-2 & 4t^2-4t-2 \\ 0 & 4t^2-10t+4 & 0 & 4t^2-10t+4 & 4t^2-4t-2 & 4t^2-4t-2 \\ 0 & 4t^2-10t+4 & 4t^2-10t+4 & 0 & 4t^2-4t-2 & 4t^2-4t-2 \\ 6t^2-4t-4 & 4t^2-4t-2 & 4t^2-4t-2 & 4t^2-4t-2 & 0 & 6t^2-16t+8 \\ 6t^2-4t-4 & 4t^2-4t-2 & 4t^2-4t-2 & 4t^2-4t-2 & 6t^2-16t+8 & 0 \end{pmatrix}$$

10)
$$\begin{pmatrix} 0 & 6t^2-4t-4 & 0 & 6t^2-6t-2 & 6t^2-6t-2 & 6t^2-6t-2 \\ 6t^2-4t-4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4t^2-4t-2 & 4t^2-4t-2 & 4t^2-4t-2 \\ 6t^2-6t-2 & 0 & 4t^2-4t-2 & 0 & 4t^2-10t+4 & 4t^2-10t+4 \\ 6t^2-6t-2 & 0 & 4t^2-4t-2 & 4t^2-10t+4 & 0 & 4t^2-10t+4 \\ 6t^2-6t-2 & 0 & 4t^2-4t-2 & 4t^2-10t+4 & 4t^2-10t+4 & 0 \end{pmatrix}$$

11)

$$\begin{pmatrix} 0 & 6t^2-6t-2 & 0 & 0 & 6t^2-4t-4 & 6t^2-4t-4 \\ 6t^2-6t-2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4t^2-10t+4 & 4t^2-4t-2 & 4t^2-4t-2 \\ 0 & 0 & 4t^2-10t+4 & 0 & 4t^2-4t-2 & 4t^2-4t-2 \\ 6t^2-4t-4 & 0 & 4t^2-4t-2 & 4t^2-4t-2 & 0 & 6t^2-16t+8 \\ 6t^2-4t-4 & 0 & 4t^2-4t-2 & 4t^2-4t-2 & 6t^2-16t+8 & 0 \end{pmatrix}$$

12)

$$\begin{pmatrix} 0 & 6t^2-6t-2 & 6t^2-6t-2 & 0 & 6t^2-4t-4 & 6t^2-4t-4 \\ 6t^2-6t-2 & 0 & 4t^2-10t+4 & 0 & 0 & 0 \\ 6t^2-6t-2 & 4t^2-10t+4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4t^2-4t-2 & 4t^2-4t-2 \\ 6t^2-4t-4 & 0 & 0 & 4t^2-4t-2 & 0 & 6t^2-16t+8 \\ 6t^2-4t-4 & 0 & 0 & 4t^2-4t-2 & 6t^2-16t+8 & 0 \end{pmatrix}$$

13)

$$\begin{pmatrix} 0 & 4t^2-10t+4 & 4t^2-10t+4 & 0 & 0 & 6t^2-6t-2 \\ 4t^2-10t+4 & 0 & 4t^2-10t+4 & 0 & 0 & 6t^2-6t-2 \\ 4t^2-10t+4 & 4t^2-10t+4 & 0 & 0 & 0 & 6t^2-6t-2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6t^2-16t+8 & 6t^2-4t-4 \\ 0 & 0 & 0 & 6t^2-16t+8 & 0 & 6t^2-4t-4 \\ 6t^2-6t-2 & 6t^2-6t-2 & 6t^2-6t-2 & 6t^2-4t-4 & 6t^2-4t-4 & 0 \end{pmatrix}$$

14)

$$\begin{pmatrix} 0 & 6t^2-12t+4 & 0 & 4t^2-6t & 4t^2-6t & 4t^2-6t \\ 6t^2-12t+4 & 0 & 0 & 0 & 4t^2-4t-2 & 4t^2-4t-2 \\ 0 & 0 & 0 & 6t^2-12t+4 & 4t^2-4t-2 & 4t^2-4t-2 \\ 4t^2-6t & 0 & 6t^2-12t+4 & 0 & 4t^2-6t & 4t^2-6t \\ 4t^2-6t & 4t^2-4t-2 & 4t^2-4t-2 & 4t^2-6t & 0 & 4t^2-10t+4 \\ 4t^2-6t & 4t^2-4t-2 & 4t^2-4t-2 & 4t^2-6t & 4t^2-10t+4 & 0 \end{pmatrix}$$

16)

$$\begin{pmatrix} 0 & 6t^2-8t & 0 & 4t^2-4t-2 & 4t^2-4t-2 & 6t^2-12t+4 \\ 6t^2-8t & 0 & 0 & 0 & 0 & 4t^2-4t-2 \\ 0 & 0 & 0 & 4t^2-6t & 4t^2-6t & 4t^2-6t \\ 4t^2-4t-2 & 0 & 4t^2-6t & 0 & 4t^2-10t+4 & 4t^2-6t \\ 4t^2-4t-2 & 0 & 4t^2-6t & 4t^2-10t+4 & 0 & 4t^2-6t \\ 6t^2-12t+4 & 4t^2-4t-2 & 4t^2-6t & 4t^2-6t & 4t^2-6t & 0 \end{pmatrix}$$

18)

$$\begin{pmatrix} 0 & 6t^2-12t+4 & 0 & 0 & 4t^2-4t-2 & 6t^2-8t \\ 6t^2-12t+4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4t^2-4t-2 \\ 0 & 0 & 0 & 4t^2-10t+4 & 4t^2-6t & 4t^2-4t-2 \\ 0 & 0 & 4t^2-10t+4 & 0 & 4t^2-6t & 4t^2-4t-2 \\ 4t^2-4t-2 & 0 & 4t^2-6t & 4t^2-6t & 0 & 6t^2-12t+4 \\ 6t^2-8t & 4t^2-4t-2 & 4t^2-4t-2 & 4t^2-4t-2 & 6t^2-12t+4 & 0 \end{pmatrix}$$

20)

$$\begin{pmatrix} 0 & 6t^2-12t+4 & 4t^2-4t-2 & 0 & 4t^2-4t-2 & 6t^2-8t \\ 6t^2-12t+4 & 0 & 4t^2-6t & 0 & 0 & 4t^2-4t-2 \\ 4t^2-4t-2 & 4t^2-6t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4t^2-6t & 4t^2-4t-2 \\ 4t^2-4t-2 & 0 & 0 & 4t^2-6t & 0 & 6t^2-12t+4 \\ 6t^2-8t & 4t^2-4t-2 & 0 & 4t^2-4t-2 & 6t^2-12t+4 & 0 \end{pmatrix}$$

21)

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 7t^2-8t & 7t^2-8t & 7t^2-8t & 7t^2-8t \\ 0 & 0 & 7t^2-20t+12 & 4t^2-4t-1 & 4t^2-4t-1 & 4t^2-4t-1 & 4t^2-4t-1 \\ 0 & 7t^2-20t+12 & 0 & 4t^2-4t-1 & 4t^2-4t-1 & 4t^2-4t-1 & 4t^2-4t-1 \\ 7t^2-8t & 4t^2-4t-1 & 4t^2-4t-1 & 0 & 3t^2-8t+4 & 3t^2-8t+4 & 3t^2-8t+4 \\ 7t^2-8t & 4t^2-4t-1 & 4t^2-4t-1 & 3t^2-8t+4 & 0 & 3t^2-8t+4 & 3t^2-8t+4 \\ 7t^2-8t & 4t^2-4t-1 & 4t^2-4t-1 & 3t^2-8t+4 & 3t^2-8t+4 & 0 & 3t^2-8t+4 \\ 7t^2-8t & 4t^2-4t-1 & 4t^2-4t-1 & 3t^2-8t+4 & 3t^2-8t+4 & 3t^2-8t+4 & 0 \end{pmatrix}$$

24)

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7t^2-4t-4 & 7t^2-4t-4 \\ 0 & 0 & 3t^2-8t+4 & 3t^2-8t+4 & 3t^2-8t+4 & 4t^2-4t-1 & 4t^2-4t-1 \\ 0 & 3t^2-8t+4 & 0 & 3t^2-8t+4 & 3t^2-8t+4 & 4t^2-4t-1 & 4t^2-4t-1 \\ 0 & 3t^2-8t+4 & 3t^2-8t+4 & 0 & 3t^2-8t+4 & 4t^2-4t-1 & 4t^2-4t-1 \\ 0 & 3t^2-8t+4 & 3t^2-8t+4 & 3t^2-8t+4 & 0 & 4t^2-4t-1 & 4t^2-4t-1 \\ 7t^2-4t-4 & 4t^2-4t-1 & 4t^2-4t-1 & 4t^2-4t-1 & 4t^2-4t-1 & 0 & 7t^2-20t+12 \\ 7t^2-4t-4 & 4t^2-4t-1 & 4t^2-4t-1 & 4t^2-4t-1 & 4t^2-4t-1 & 7t^2-20t+12 & 0 \end{pmatrix}$$

26)

$$\begin{pmatrix} 0 & 7t^2-4t-4 & 0 & 7t^2-8t & 7t^2-8t & 7t^2-8t & 7t^2-8t \\ 7t^2-4t-4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4t^2-4t-1 & 4t^2-4t-1 & 4t^2-4t-1 & 4t^2-4t-1 \\ 7t^2-8t & 0 & 4t^2-4t-1 & 0 & 3t^2-8t+4 & 3t^2-8t+4 & 3t^2-8t+4 \\ 7t^2-8t & 0 & 4t^2-4t-1 & 3t^2-8t+4 & 0 & 3t^2-8t+4 & 3t^2-8t+4 \\ 7t^2-8t & 0 & 4t^2-4t-1 & 3t^2-8t+4 & 3t^2-8t+4 & 0 & 3t^2-8t+4 \\ 7t^2-8t & 0 & 4t^2-4t-1 & 3t^2-8t+4 & 3t^2-8t+4 & 3t^2-8t+4 & 0 \end{pmatrix}$$

27)

$$\begin{pmatrix} 0 & 7t^2-8t & 0 & 0 & 0 & 7t^2-4t-4 & 7t^2-4t-4 \\ 7t^2-8t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3t^2-8t+4 & 3t^2-8t+4 & 4t^2-4t-1 & 4t^2-4t-1 \\ 0 & 0 & 3t^2-8t+4 & 0 & 3t^2-8t+4 & 4t^2-4t-1 & 4t^2-4t-1 \\ 0 & 0 & 3t^2-8t+4 & 3t^2-8t+4 & 0 & 4t^2-4t-1 & 4t^2-4t-1 \\ 7t^2-4t-4 & 0 & 4t^2-4t-1 & 4t^2-4t-1 & 4t^2-4t-1 & 0 & 7t^2-20t+12 \\ 7t^2-4t-4 & 0 & 4t^2-4t-1 & 4t^2-4t-1 & 4t^2-4t-1 & 7t^2-20t+12 & 0 \end{pmatrix}$$

28)

$$\begin{pmatrix} 0 & 7t^2-20t+12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7t^2-4t-4 \\ 7t^2-20t+12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7t^2-4t-4 \\ 0 & 0 & 0 & 3t^2-8t+4 & 3t^2-8t+4 & 3t^2-8t+4 & 7t^2-8t \\ 0 & 0 & 3t^2-8t+4 & 0 & 3t^2-8t+4 & 3t^2-8t+4 & 7t^2-8t \\ 0 & 0 & 3t^2-8t+4 & 3t^2-8t+4 & 0 & 3t^2-8t+4 & 7t^2-8t \\ 0 & 0 & 3t^2-8t+4 & 3t^2-8t+4 & 3t^2-8t+4 & 0 & 7t^2-8t \\ 7t^2-4t-4 & 7t^2-4t-4 & 7t^2-8t & 7t^2-8t & 7t^2-8t & 7t^2-8t & 0 \end{pmatrix}$$

29)

$$\begin{pmatrix} 0 & 7t^2-8t & 7t^2-8t & 0 & 0 & 7t^2-4t-4 & 7t^2-4t-4 \\ 7t^2-8t & 0 & 3t^2-8t+4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7t^2-8t & 3t^2-8t+4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3t^2-8t+4 & 4t^2-4t-1 & 4t^2-4t-1 \\ 0 & 0 & 0 & 3t^2-8t+4 & 0 & 4t^2-4t-1 & 4t^2-4t-1 \\ 7t^2-4t-4 & 0 & 0 & 4t^2-4t-1 & 4t^2-4t-1 & 0 & 7t^2-20t+12 \\ 7t^2-4t-4 & 0 & 0 & 4t^2-4t-1 & 4t^2-4t-1 & 7t^2-20t+12 & 0 \end{pmatrix}$$

30)

$$\begin{pmatrix} 0 & 7t^2-20t+12 & 4t^2-4t-1 & 0 & 0 & 0 & 7t^2-4t-4 \\ 7t^2-20t+12 & 0 & 4t^2-4t-1 & 0 & 0 & 0 & 7t^2-4t-4 \\ 4t^2-4t-1 & 4t^2-4t-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3t^2-8t+4 & 3t^2-8t+4 & 7t^2-8t \\ 0 & 0 & 0 & 3t^2-8t+4 & 0 & 3t^2-8t+4 & 7t^2-8t \\ 0 & 0 & 0 & 3t^2-8t+4 & 3t^2-8t+4 & 0 & 7t^2-8t \\ 7t^2-4t-4 & 7t^2-4t-4 & 0 & 7t^2-8t & 7t^2-8t & 7t^2-8t & 0 \end{pmatrix}$$

31)

$$\begin{pmatrix} 0 & 7t^2-16t+8 & 0 & 4t^2-8t+3 & 3t^2-4t & 3t^2-4t & 3t^2-4t \\ 7t^2-16t+8 & 0 & 0 & 0 & 4t^2-4t-1 & 4t^2-4t-1 & 4t^2-4t-1 \\ 0 & 0 & 0 & 7t^2-16t+8 & 4t^2-4t-1 & 4t^2-4t-1 & 4t^2-4t-1 \\ 4t^2-8t+3 & 0 & 7t^2-16t+8 & 0 & 3t^2-4t & 3t^2-4t & 3t^2-4t \\ 3t^2-4t & 4t^2-4t-1 & 4t^2-4t-1 & 3t^2-4t & 0 & 3t^2-8t+4 & 3t^2-8t+4 \\ 3t^2-4t & 4t^2-4t-1 & 4t^2-4t-1 & 3t^2-4t & 3t^2-8t+4 & 0 & 3t^2-8t+4 \\ 3t^2-4t & 4t^2-4t-1 & 4t^2-4t-1 & 3t^2-4t & 3t^2-8t+4 & 3t^2-8t+4 & 0 \end{pmatrix}$$

33)

$$\begin{pmatrix} 0 & 7t^2-12t+4 & 0 & 3t^2-4t & 3t^2-4t & 4t^2-8t+3 & 4t^2-8t+3 \\ 7t^2-12t+4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4t^2-4t-1 & 4t^2-4t-1 \\ 0 & 0 & 0 & 4t^2-8t+3 & 4t^2-8t+3 & 3t^2-4t & 3t^2-4t \\ 3t^2-4t & 0 & 4t^2-8t+3 & 0 & 3t^2-8t+4 & 3t^2-4t & 3t^2-4t \\ 3t^2-4t & 0 & 4t^2-8t+3 & 3t^2-8t+4 & 0 & 3t^2-4t & 3t^2-4t \\ 4t^2-8t+3 & 4t^2-4t-1 & 3t^2-4t & 3t^2-4t & 3t^2-4t & 0 & 3t^2-8t+4 \\ 4t^2-8t+3 & 4t^2-4t-1 & 3t^2-4t & 3t^2-4t & 3t^2-4t & 3t^2-8t+4 & 0 \end{pmatrix}$$

36)

$$\begin{pmatrix} 0 & 7t^2-8t & 0 & 4t^2-4t-1 & 4t^2-4t-1 & 4t^2-4t-1 & 7t^2-16t+8 \\ 7t^2-8t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4t^2-4t-1 \\ 0 & 0 & 0 & 3t^2-4t & 3t^2-4t & 3t^2-4t & 4t^2-8t+3 \\ 4t^2-4t-1 & 0 & 3t^2-4t & 0 & 3t^2-8t+4 & 3t^2-8t+4 & 3t^2-4t \\ 4t^2-4t-1 & 0 & 3t^2-4t & 3t^2-8t+4 & 0 & 3t^2-8t+4 & 3t^2-4t \\ 4t^2-4t-1 & 0 & 3t^2-4t & 3t^2-8t+4 & 3t^2-8t+4 & 0 & 3t^2-4t \\ 7t^2-16t+8 & 4t^2-4t-1 & 4t^2-8t+3 & 3t^2-4t & 3t^2-4t & 3t^2-4t & 0 \end{pmatrix}$$

38)

$$\begin{pmatrix} 0 & 7t^2-12t+4 & 0 & 0 & 4t^2-4t-1 & 4t^2-4t-1 & 7t^2-12t+4 \\ 7t^2-12t+4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3t^2-4t \\ 0 & 0 & 0 & 3t^2-8t+4 & 3t^2-4t & 3t^2-4t & 3t^2-4t \\ 0 & 0 & 3t^2-8t+4 & 0 & 3t^2-4t & 3t^2-4t & 3t^2-4t \\ 4t^2-4t-1 & 0 & 3t^2-4t & 3t^2-4t & 0 & 3t^2-8t+4 & 4t^2-8t+3 \\ 4t^2-4t-1 & 0 & 3t^2-4t & 3t^2-4t & 3t^2-8t+4 & 0 & 4t^2-8t+3 \\ 7t^2-12t+4 & 3t^2-4t & 3t^2-4t & 3t^2-4t & 4t^2-8t+3 & 4t^2-8t+3 & 0 \end{pmatrix}$$

40)

$$\begin{pmatrix} 0 & 7t^2-16t+8 & 0 & 0 & 0 & 4t^2-4t-1 & 7t^2-8t \\ 7t^2-16t+8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4t^2-4t-1 \\ 0 & 0 & 0 & 3t^2-8t+4 & 3t^2-8t+4 & 3t^2-4t & 4t^2-4t-1 \\ 0 & 0 & 3t^2-8t+4 & 0 & 3t^2-8t+4 & 3t^2-4t & 4t^2-4t-1 \\ 0 & 0 & 3t^2-8t+4 & 3t^2-8t+4 & 0 & 3t^2-4t & 4t^2-4t-1 \\ 4t^2-4t-1 & 0 & 3t^2-4t & 3t^2-4t & 3t^2-4t & 0 & 7t^2-16t+8 \\ 7t^2-8t & 4t^2-4t-1 & 4t^2-4t-1 & 4t^2-4t-1 & 4t^2-4t-1 & 7t^2-16t+8 & 0 \end{pmatrix}$$

42)

$$\begin{pmatrix} 0 & 7t^2-12t+4 & 4t^2-4t-1 & 0 & 4t^2-4t-1 & 4t^2-4t-1 & 7t^2-12t+4 \\ 7t^2-12t+4 & 0 & 4t^2-8t+3 & 0 & 0 & 0 & 3t^2-4t \\ 4t^2-4t-1 & 4t^2-8t+3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3t^2-4t & 3t^2-4t & 3t^2-4t \\ 4t^2-4t-1 & 0 & 0 & 3t^2-4t & 0 & 3t^2-8t+4 & 4t^2-8t+3 \\ 4t^2-4t-1 & 0 & 0 & 3t^2-4t & 3t^2-8t+4 & 0 & 4t^2-8t+3 \\ 7t^2-12t+4 & 3t^2-4t & 0 & 3t^2-4t & 4t^2-8t+3 & 4t^2-8t+3 & 0 \end{pmatrix}$$

43)

$$\begin{pmatrix} 0 & 7t^2-16t+8 & 4t^2-4t-1 & 0 & 0 & 4t^2-4t-1 & 7t^2-8t \\ 7t^2-16t+8 & 0 & 3t^2-4t & 0 & 0 & 0 & 4t^2-4t-1 \\ 4t^2-4t-1 & 3t^2-4t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3t^2-8t+4 & 3t^2-4t & 4t^2-4t-1 \\ 0 & 0 & 0 & 3t^2-8t+4 & 0 & 3t^2-4t & 4t^2-4t-1 \\ 4t^2-4t-1 & 0 & 0 & 3t^2-4t & 3t^2-4t & 0 & 7t^2-16t+8 \\ 7t^2-8t & 4t^2-4t-1 & 0 & 4t^2-4t-1 & 4t^2-4t-1 & 7t^2-16t+8 & 0 \end{pmatrix}$$

44)

$$\begin{pmatrix} 0 & 4t^2-8t+3 & 4t^2-8t+3 & 0 & 0 & 3t^2-4t & 7t^2-12t+4 \\ 4t^2-8t+3 & 0 & 3t^2-8t+4 & 0 & 0 & 0 & 4t^2-4t-1 \\ 4t^2-8t+3 & 3t^2-8t+4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4t^2-4t-1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3t^2-8t+4 & 4t^2-8t+3 & 4t^2-4t-1 \\ 0 & 0 & 0 & 3t^2-8t+4 & 0 & 4t^2-8t+3 & 4t^2-4t-1 \\ 3t^2-4t & 0 & 0 & 4t^2-8t+3 & 4t^2-8t+3 & 0 & 7t^2-12t+4 \\ 7t^2-12t+4 & 4t^2-4t-1 & 4t^2-4t-1 & 4t^2-4t-1 & 4t^2-4t-1 & 7t^2-12t+4 & 0 \end{pmatrix}$$

45)

$$\begin{pmatrix} 0 & 4t^2-8t+3 & 3t^2-4t & 0 & 3t^2-4t & 3t^2-4t & 4t^2-8t+3 \\ 4t^2-8t+3 & 0 & 4t^2-8t+3 & 0 & 0 & 3t^2-4t & 3t^2-4t \\ 3t^2-4t & 4t^2-8t+3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3t^2-4t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4t^2-8t+3 & 3t^2-4t & 3t^2-4t \\ 3t^2-4t & 0 & 0 & 4t^2-8t+3 & 0 & 4t^2-8t+3 & 3t^2-4t \\ 3t^2-4t & 3t^2-4t & 0 & 3t^2-4t & 4t^2-8t+3 & 0 & 4t^2-8t+3 \\ 4t^2-8t+3 & 3t^2-4t & 3t^2-4t & 3t^2-4t & 3t^2-4t & 4t^2-8t+3 & 0 \end{pmatrix}$$

Доведення теореми 1. Укажемо схему доведення теореми.

Нехай $P_i \in \mathcal{P}_0$ і $n = |P_i|$. Помножена на 2 матриця квадратичної форми $q_{P_i}^{(p,q)}(z,t)$ — це симетрична матриця розміру $(n+1)\times(n+1)$ вигляду

$$M_i^{(p,q)}(t) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & \dots & -1 & -1 \\ -1 & 2 & * & \dots & * & * \\ -1 & * & 2 & \dots & * & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -1 & * & * & \dots & 2 & * \\ -1 & * & * & \dots & * & 2 \end{pmatrix}$$

(перший рядок і стовпець відповідають змінній z_0, тобто мають номер 0); тут на місцях (p,q) і (q,p) стоїть параметр t, а на решті місць (s,k), $s \neq k, s,k \neq 0$, стоїть 1 або 0 в залежності від того, порівняльні s і k чи ні. Оскільки P_i — частково впорядкована множина з додатною формою Тітса, то за критерієм Сільвестра всі симетричні мінори матриці $M_i^{(p,q)}(1)$ (тобто її головні мінори,

а також головні мінори будь-якої матриці, яка отримана з матриці $M_i^{(p,q)}(1)$ однаковою перестановкою рядків та стовпців) є додатними. Переставимо (однаковим чином) рядки і стопці матриці $M_i^{(p,q)}(t)$ так, щоб p-ий і q-ий рядки стали відповідно n-им і $n+1$-им (а значить аналогічна умова буде виконуватися і для стовпців). Тоді всі головні мінори нової матриці, не рахуючи мінора (найбільшого) порядку $n+1$, будуть додатними. Значить (знову за критерієм Сільвестра) P-визначальний поліном (частково впорядкованої множини P_i) для p і q дорівнює, з точністю до постійного множника (який є від'ємним), визначнику матриці $M_i^{(p,q)}(t)$ (більш детально див. в [6]).

Для безпосереднього обчислення визначників використовується відповідна компютерна програма.

Список використаної літератури

1. *Gabriel P.* Unzerlegbure Darstellungen, I // Manus. Math. – 1972. – **6**, N 1. – P. 71-103.
2. *Дрозд Ю. А.* Преобразования Кокстера и представления частично упорядоченных множеств // Функц. анализ и его прил. – 1974. – **8**. – С. 34-42.
3. *Бондаренко В. М., Степочкина М. В.* Частично упорядоченные множества инъективно-конечного типа // Науковий вісник Ужгородського університету (серія: математика і інформатика). - 2005. – **9**. – С. 15-25.
4. *Бондаренко В. М., Степочкина М. В.* (Min, max)-эквивалентность частично упорядоченных множеств и квадратичная форма Титса // Проблеми аналізу і алгебри: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2005. – **2**, N3. – С. 18-58.
5. *Bondarenko V. M., Pereguda.Yu. M.* On P-numbers of quadratic forms// Геометрія, топологія та їх застосування: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2009. – **6**, N2. – С. 474-477.
6. *Bondarenko V. M.* On types of local deformations of quadratic forms // Algebra Discrete Math. — 2014. – 18, №2. – pp. 11-18.
7. *Бондаренко В. М., Перегуда Ю. М.* Опис Р-чисел для вузлових точок частково впорядкованих множин з додатно визначеною формою Тітса // Науковий вісник Ужгородсько-го ун-ту (серія: математика і інформатика). – 2010. – вип 21. – С. 35-39.
8. *Бондаренко В. М., Бондаренко В. В., Перегуда Ю. Н.* Локальные деформации положительно определенных квадратичных форм // Укр. мат. журнал. – 2012. – №7. – С. 892-907.

Одержано 10.11.2015