УДК 512.84

О. А. Кирилюк (Ужгородский нац. ун-т)

МІНІМАЛЬНІ НЕЗВІДНІ РОЗВ'ЯЗНІ ПІДГРУПИ ГРУПИ $GL(2, R_2)$

Пам'яті П. М. Гудивка присвячується

All nonabelian minimal irreducible solvable subgroups of the group $GL(2, R_2)$ (R_2 is the ring of integers of the finite extension F_2 of the field $\mathbb{Q}$ rational 2-adic numbers) are described up to conjugation.

Описуються з точністю до спряженості всі неабелеві мінімальні незвідні розв'язні підгрупи групи $GL(2, R_2)$ (R_2 — кільце цілих величин скінченного розширення F_2 поля раціональних 2-адичних чисел $\mathbb{Q}_2$).

Мінімальні незвідні розв'язні підгрупи групи $GL(q, K)$, де q — просте число, а K — поле, описані з точністю до спряженості в [1]. В [2] такі підгрупи описані з точністю до спряженості при $q = 3$ і $K = R_p$ – кільце цілих величин скінченного розширення поля раціональних p-адичних чисел Q_p. В [3] класифіковані неспряжені мінімальні незвідні абелеві підгрупи групи $GL(2, R_2)$, а в [4] формулюються результати класифікації неспряжених неабелевих мінімальних незвідних розв'язних підгруп групи $GL(2, R_p)$. У даній роботі наводиться з повними доведеннями і уточненнями така класифікація при $p = 2$.

Нехай R_2 — кільце цілих величин скінченного розширення F_2 поля раціональних чисел в $\mathbb{Q}_2$.

Поряд з означенням груп $H_{1,l,j}$, $G_{l,k}$ статті [1] всюду далі будуть використовуватися наступні позначення:

- $(F_p : Q_p) = ef$, де e — індекс розгалуження, а f — степінь інерції поля F_p відносно поля Q_p;
- P_q — силовська q-підгрупа мультиплікативної групи F_p^* поля F_p;
- Π — множина всіх таких простих чисел $q \neq 2$, для яких $P_q \neq \langle 1 \rangle$;
- Π' — множина всіх таких простих чисел $r > 2$, що $(F_p(\theta) : F_2) = 2$, де θ — первісний корінь степеня r із 1,

D_4, K_4 — групи діедра і кватерніонів порядку 8 відповідно.

Нехай надалі $p = 2$. Якщо $|P_2| = 2^n$ і $(F_2 : Q_2) = e \cdot f$, то $e = 2^{n-1} \cdot m$. Із відомих фактів теорії зображення скінченних груп легко одержати, що з точністю до ізоморфізму нециклічні мінімальні незвідні розв'язні підгрупи групи $GL(2, R_2)$ вичерпуються групами:

1) $H_{1,q,j} = G_{1,q}$ при $|P_2| = 2$;

2) $G_{l,q}$, D_4, K_4 при $|P_2| = 2^2$ $(l = 1, 2, \ldots)$;

3) $G_{l,q}$, D_4, H_4 при $|P_2| = 2^n$ $(n \geq 3;\ l = 1, \ldots, n;\ k = 3, \ldots, n)$, де q пробігає множину Π, а F_2 не є цілком розгалужене розширення поля Q_2; групами D_4, K_4 при $|P_2| = 2^2$ і D_4, K_4, H_k при $|P_2| = 2^n (n \geq 3;\ k = 3, \ldots, n)$, якщо F_2 — цілком розгалужене розширення поля Q_2

Нехай F_2 не є цілком розгалуженим розширенням поля Q_2. Тоді $\Pi \neq \oslash$ і нехай θ_q — елемент порядку $q \in \Pi$ в кільці R_2. Опишемо всі нееквівалентні R_2-зображення степеня 2 груп H_k, D_4, K_4 і $G_{l,q}$.

Нехай

$$G \cong H_k = \langle a, b | a^{2^k} = b^2 = 1, b^{-1}ab = a^{1+2^{k-1}} \rangle (k = 3, \ldots, n),$$

де $|P_2| = 2^n$ $(n \geq 3)$. Позначимо $r = 1 + 2^{k-1}$. Із [4] випливає, що F_2-зображення степеня 2 групи G з точністю до еквівалентності вичерпуються зображеннями

$$\Gamma_j : a \to \begin{pmatrix} \xi^j & 0 \\ 0 & \xi^{jr} \end{pmatrix}, \quad b \to \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \ (1 \leq j < 2^k),$$

де ξ — елемент порядку 2^s $(s \leq k)$ в полі F_2. Звідси легко випливає, що Γ_j незвідне і точне над R_2 тоді і тільки тоді, коли ξ — елемент порядку 2^k в полі F_2 і $j = 1, 3, \ldots, 2^{k-1} - 1$. Позначаючи $\varepsilon = \xi^j$, одержимо, що Γ_j можна представити у вигляді:

$$\Gamma_j : a \to \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & -\varepsilon \end{pmatrix}, \quad b \to \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

де ε пробігає первісні корені степеня 2^k із 1 в полі F_2.

Нехай $\pi = \varepsilon^r - \varepsilon$. Тоді

$$\pi = \varepsilon(\varepsilon^{r-1} - 1) = \varepsilon \left(\xi^{2^{k-1}} - 1 \right) = \theta t^e \ (\theta \in R_2^*).$$

Очевидно, довільне точне R_2-зображення групи G. F_2-еквівалентне зображення Γ має вигляд

$$\Delta : a \to \begin{pmatrix} \varepsilon & x \\ 0 & -\varepsilon \end{pmatrix}, \quad b \to \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}, \ (\alpha, \beta, \gamma, \delta \in R_2),$$

де $x = 0$ або $x = t^{e-s}$ $(s = 1, \ldots, e)$. Якщо $x = 0$, то $\Delta \sim \Gamma$. Нехай $x = t^{e-s}$. Тоді із співвідношення $AB = BA^r$ одержимо $\delta = -\alpha$ і $\gamma = \alpha\pi t^{s-e}$. Із рівності $B^2 = E$ випливає, що $\beta = \frac{(1-\alpha^2)t^{e-s}}{\alpha\pi}$. Очевидно, $\beta \in R_2$ тоді і тільки тоді, коли $\alpha^2 \equiv 1 (mod\, t^s)$. Таким чином, $\Delta_s = \Delta$ приймає вигляд:

$$\Delta_s(\alpha_s) : a \to \begin{pmatrix} \varepsilon & t^{e-s} \\ 0 & -\varepsilon \end{pmatrix} = A_s, \quad b \to \begin{pmatrix} \alpha_s & \frac{(1-\alpha_s^2)t^{e-s}}{\alpha_s\pi} \\ \frac{\alpha_s\pi}{t^{e-s}} & -\alpha_s \end{pmatrix} = B_s,$$

де $\alpha_s^2 \equiv 1 (mod\, t^s)$ $(1 \leq s \leq e)$.

Лемма 1. *Зображення $\Delta_s(\alpha_s)$ і $\Delta_{s'}(\bar{\alpha}_{s'})$ R_2-еквівалентні тоді і тільки тоді, коли $s = s'$ і $\alpha_s \equiv \overline{\alpha}_s (mod\, t^s)$.*

Доведення. Необхідність. Нехай $c^{-1}\Delta_s(\alpha_S)(g) = \Delta_{s'}(\overline{\alpha}_{s'})(g)$ для всіх $g \in G$, де $C \in GL(2, R_2)$. Легко бачити, що тоді

$$C = \begin{pmatrix} c_1 & \frac{(\alpha_s - \overline{\alpha}_s)t^{e-s}}{\alpha_s\pi} \\ 0 & \alpha_s\overline{\alpha}_s^{-1}c_4 \end{pmatrix},$$

звідки $\alpha_s \equiv \overline{\alpha}_s (mod\, t^s)$. Відмітимо, що $\Delta_s(\alpha_s)$ і $\Delta_{s'}(\bar{\alpha}_{s'})$ нееквівалентні над R_2 при $s \neq s'$, оскільки вони нееквівалентні на підгрупі $H = \langle a \rangle$.

Необхідність доведена. Достатність одержимо, якщо провести міркування в зворотному порядку. Лема доведена.

Твердження 1. *Нехай R_2 містить первісний корінь ξ степеня 2^n із 1 ($n \geq 3$). Незвідні точні R_2-зображення степеня 2 групи*

$$H_k = \langle a, b | a^{2^k} = b^2 = 1, b^{-1}ab = a^{1+2^{k-1}} \rangle \ (k = 3, \dots, n)$$

з точністю до еквівалентності вичерпуються зображеннями:

$$\Delta_0 : a \to \begin{pmatrix} \varepsilon^j & 0 \\ 0 & -\varepsilon^j \end{pmatrix}, \quad b \to \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\Delta_1 : a \to \begin{pmatrix} \varepsilon^j & t^{e-1} \\ 0 & -\varepsilon^j \end{pmatrix}, \quad b \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \pi t^{e-1} & -1 \end{pmatrix};$$

$$\Delta_s(\alpha_s) : a \to \begin{pmatrix} \varepsilon^j & t^{e-s} \\ 0 & -\varepsilon^j \end{pmatrix}, \quad b \to \begin{pmatrix} \alpha_s & \frac{(1-\alpha_s^2)t^{e-s}}{\alpha_s \pi} \\ \frac{\alpha_s \pi}{t^{e-s}} & -\alpha_s \end{pmatrix} \quad (1 \leq s \leq e),$$

де ε — деякий елемент порядку 2^k в кільці R_2, $\pi = -2\varepsilon$, $e = 2^{n-1} \cdot m$; $j = 1, 3, \dots, 2^{k-1} - 1$, а елементи α_s задаються формулою

$$\alpha_s = 1 + \lambda_h t^h + \dots + \lambda_{s-1} t^{s-1}, \tag{1}$$

де $h = \frac{s}{2}$, якщо s парне і $h = \frac{s+1}{2}$, якщо s непарне, а $\lambda_h, \dots, \lambda_{s-1}$ пробігають представники лівих суміжних класів кільця R_2 за ідеалом tR_2 (t — простий елемент кільця R_2).

Доведення. Очевидно, довільний корінь ε_1 степеня 2^k із 1 можна представити у вигляді $\varepsilon_1 = \varepsilon^j$ для деякого j ($1 \leq j \leq 2^k$). Нехай $\alpha_s \in R_2$ має вигляд

$$\alpha_s = \lambda_0 + \lambda_1 t + \dots + \lambda_{s-1} t^{s-1}, \tag{2}$$

де λ_j ($j = 0, \dots, s-1$) суть представники лівих суміжних класів R_2 за ідеалом tR_2. Якщо $\overline{\alpha}_s = \alpha_s + \lambda_s t^s$ ($\lambda_j \in R_2$), то $\alpha_s \equiv \overline{\alpha}_s (mod\, t^s)$. Таким чином, з огляду на лему 1, можна вважати, що α_s має вигляд (2). З конгруенції $\alpha_s^2 \equiv 1 (mod\, t^s)$ одержимо $(\lambda_0 + \lambda_1 t + \dots + \lambda_{s-1} t^{s-1})^2 - 1 \equiv 0 (mod t^s)$. Звідси в силу рівності $2 = \theta_1 t^e$ маємо $(\lambda_0^2 - 1) + \lambda_1^2 t_1^2 + \ldots + \lambda_{s-1}^2 t^{2(s-1)} \equiv 0 (mod t^s)$. З останньої конгруенції і того, що $\lambda_j \in \frac{R_2}{tR_2}$ випливає, що $\lambda_0 = 1$ і $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_{h-1} = 0$, де $h = \frac{s}{2}$ при парному s і $h = \frac{s+1}{2}$ при непарному s. Очевидно, що при $s = 1$, $\alpha_1 = 1$. Нехай тепер $\Delta_s(\alpha_s) \sim R_2 \Delta_s(\alpha'_s)$. Тоді з леми 1 випливає рівність

$$\alpha_s - \alpha'_s = (\lambda_h - \lambda'_h) t^h + \ldots + (\lambda_{s-1} - \lambda'_{s-1}) t^{2(s-1)} \equiv 0 (mod\, t^s).$$

Звідси і із властивостей елементів λ_j, λ'_j для всіх $j = h, \dots, s-1$. Таким чином $\alpha_s = a'_s$. Твердження доведено.

Нехай $D_4 = \langle a, b \rangle$ — група діедра, а $K_4 = \langle a, b \rangle$ – група кватерніонів порядку 8. Аналогічно твердженню 1 доводиться наступне твердження.

Твердження 2. *Нехай кільце R_2 містить елемент порядка 2^n. Незвідні точні R_2-зображення степеня 2 групи D_4 з точністю до еквівалентності вичерпуються зображеннями*:

$$\Delta_0 : a \to \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad b \to \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\Delta_1 : a \to \begin{pmatrix} i & t^{e-1} \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad b \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2it^{1-e} & -1 \end{pmatrix};$$

$$\Delta_s(\alpha_s) : a \to \begin{pmatrix} i & t^{e-s} \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad b \to \begin{pmatrix} \alpha_s & \frac{(\alpha_s^2-1)t^{e-s}}{2\alpha_s i} \\ -\frac{2\alpha_s i}{t^{e-s}} & -\alpha_s \end{pmatrix},$$

де t *— простий елемент кільця* R_2, $e = 2^{n-1} \cdot m$, *елементи* α_s *задаються формулою*

$$\alpha_s = 1 + \lambda_h t^h + \cdots + \lambda_{s-1} t^{s-1}, \tag{3}$$

λ_j $(j = h, h+1, \ldots, s-1)$ *пробігають представників лівих суміжних класів кільця* R_2 *за ідеалом* tR_2, $h = \frac{s}{2}$ *при парному* s *і* $h = \frac{s+1}{2}$, *якщо* s *непарне.*

Твердження 3. *Незвідні точні* R_2*-зображення групи* K_4 *при* $i \in P_2$ $(i^2 = -1)$ *з точністю до еквівалентностш вичерпуються зображеннями*:

$$\Delta_0 : a \to \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad b \to \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\Delta_1 : a \to \begin{pmatrix} i & t^{e-1} \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad b \to \begin{pmatrix} 1 & -\alpha_1^{-1} i t^{e-1} \\ -\frac{2i}{t^{e-1}} & -1 \end{pmatrix};$$

$$\Delta_s(\alpha_s) : a \to \begin{pmatrix} i & t^{e-s} \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad b \to \begin{pmatrix} \alpha_s & \frac{(1+\alpha_s^2)t^{e-s}}{2\alpha_s i} \\ -\frac{2\alpha_s i}{t^{e-s}} & -\alpha_s \end{pmatrix} \ (1 < s \le e),$$

де при $|P_2| = 2^n$ $(n \ge 2)$ $e = 2^{n-1} \cdot m$, *а елементи* α_s *задаютьса формулою* (3).

Нехай $G \cong G_{l,q} = \langle a, b | a^q = b^{2^l} = 1, b^{-1}ab = a^{-1} \rangle$, де $q \ne 2$ пробігає множину Π $(l = 1, \ldots, n)$. Очевидно, довільне точне R_2-зображення групи $H = \langle a \rangle$ є цілком звідним. Нехай Γ – точне R_2-зображення групи $H = \langle a \rangle$. Тоді Γ представимо у вигляді:

$$\Gamma : a \to \begin{pmatrix} \theta_q^j & 0 \\ 0 & \theta_q^{-j} \end{pmatrix} = A_j,$$

де θ_q — деякий елемент порядку q в R_2 $\left(j = 1, \ldots, \frac{q-1}{2}\right)$. Легко бачити, що тоді довільне точне R_2-зображення Δ групи G можна представити у вигляді:

$$\Delta : a \to A_j, \quad b \to \begin{pmatrix} 0 & \xi \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = B(\xi), \tag{4}$$

де ξ первісний корінь степеня 2^{k-1} із l в полі F_2, $j = 1, \ldots, \frac{q-1}{2}$ і $l = 1, \ldots, n$.

Нехай $\Delta' = \Delta'(\xi')$ — деяке друге R_2-зображення степеня 2 групи G вигляду (4). Неважко показати, що $\Delta \sim \Delta'$ над кільцем R_2 тоді і тільки тоді, коли $\xi = \xi'$. Оскільки Δ незвідне, то ми довели наступне твердження.

Твердження 4. *Незвідне точне* R_2*-зображення степеня* 2 *групи* $G_{l,q} = \langle a, b \rangle$ *з точністю до еквівалентності вичерпуються зображеннями*

$$\Delta_j(\xi) : a \to \begin{pmatrix} \theta_q^j & 0 \\ 0 & \theta_q^{-j} \end{pmatrix}, \quad b \to \begin{pmatrix} 0 & \xi \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

де θ_q *— деякий елемент порядку* q *в кільці* R_2, $j = 1, \ldots, \frac{q-1}{2}$, *а* ξ *пробігає всі первісні корені степеня* 2^{l-1} *із* l *в кільце* R_2.

Зберігаючи позначення тверджень 1–4 введемо наступні серії групи $GL(2,R_2)$:

$$V_1^{(0)} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle;$$

$$V_1^{(\alpha_s)} = \left\langle \begin{pmatrix} i & t^{e-s} \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha_s & \frac{(\alpha_s^2-1)t^{e-s}}{2\alpha_s i} \\ -\frac{2\alpha_s i}{t^{e-s}} & -\alpha_s \end{pmatrix} \right\rangle \quad \left(1 \le s \le \frac{e}{2}\right);$$

$$V_1^{\left(\beta_j^{(r)}\right)} = \left\langle \begin{pmatrix} i & t^{e-r} \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \beta_j^{(r)} & \frac{\left[\left(\beta_j^{(r)}\right)^2-1\right]t^{e-r}}{2\beta_j^{(r)} i} \\ -\frac{2\beta_j^{(r)} i}{t^{e-r}} & -\beta_j^{(r)} \end{pmatrix} \right\rangle \quad \left(\frac{e}{2} \le r \le e\right);$$

$$V_2^{(0)} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle;$$

$$V_2^{(\alpha_s)} = \left\langle \begin{pmatrix} i & t^{e-s} \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha_s & \frac{(1+\alpha_s^2)t^{e-s}}{2\alpha_s i} \\ -\frac{2\alpha_s i}{t^{e-s}} & -\alpha_s \end{pmatrix} \right\rangle \quad \left(1 \le s \le \frac{e}{2}\right);$$

$$V_2^{\left(\beta_j^{(r)}\right)} = \left\langle \begin{pmatrix} i & t^{e-r} \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \beta_j^{(r)} & \frac{\left[1+\left(\beta_j^{(r)}\right)^2\right]t^{e-r}}{2\beta_j^{(r)} i} \\ -\frac{2\beta_j^{(r)} i}{t^{e-r}} & -\beta_j^{(r)} \end{pmatrix} \right\rangle \quad \left(\frac{e}{2} < r \le e\right),$$

де елементи α_s, $\beta_j^{(r)}$ $(j = 1, \dots, n_r)$ задаються формулою (3) і $\beta_j^{(r)} \ne \beta_k^{(r)} (mod\, t^r)$ при $k \ne j$ $\left(k, j = 1, \dots, n_r; \frac{e}{2} < r \le e\right)$;

$$V_k^{(0)} = \left\langle \begin{pmatrix} \varepsilon_k & 0 \\ 0 - \varepsilon_k & \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle;$$

$$V_k^{(s)} = \left\langle \begin{pmatrix} \varepsilon_k & t^{e-s} \\ 0 & -\varepsilon_k \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha_s & \frac{(1-\alpha_s^2)t^{e-s}}{\alpha_s \Pi} \\ \frac{\alpha_s \Pi}{t^{e-s}} & -\alpha_s \end{pmatrix} \right\rangle,$$

де елементи α_s задаються формулою (3), ε_k – елемент порядку 2^k в кільці R_2 $(\Pi = -2\varepsilon_k;\ 3 \le k \le n;\ 1 \le s \le e)$;

$$W_l^{(q)} = \left\langle \begin{pmatrix} \theta_q & 0 \\ 0 & \theta_q^{-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \xi_l \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle,$$

де θ_q — елемент порядку q в кільці R_2, q — пробігає множину Π і ξ_l — деякий елемент порядку 2^{l-1} в кільці R_2 $(1 \le l \le n)$.

В цих позначеннях має місце наступна теорема.

Теорема 1. *Неабелеві мінімальні незвідні розв'язні підгрупи групи* $GL(2,R_2)$ *з точністю до спряженості вичерпуються групами*:

1) $W_1^{(q)}$ *при* $|P_2| = 2$ $(q \in \Pi)$;

2) $W_1^{(q)}$, $V_1^{(0)}$, $V_1^{(\alpha_s)}$, $V_1^{\left(\beta_j^{(r)}\right)}$, $V_2^{(0)}$, $V_2^{(\alpha_s)}$, $V_2^{\left(\beta_j^{(r)}\right)}$ *при* $|P_2| = 2^2$ $(q \in \Pi)$;

3) $W_1^{(q)}$, $V_1^{(0)}$, $V_1^{(\alpha_s)}$, $V_1^{\left(\beta_j^{(r)}\right)}$, $V_2^{(0)}$, $V_2^{(\alpha_s)}$, $V_2^{\left(\beta_j^{(r)}\right)}$, V_k, $V_k^{(\alpha_s)}$ *при* $|P_2| = 2^n$ $(n \ge 3;$ $k = 3, \dots, n;$ $1 \le s \le \frac{e}{2};$ $\frac{e}{2} < r \le s)$, *де* q *пробігає множину* Π $(l = 1, \dots, n)$.

Доведення. Нехай G — мінімальна незвідна розв'язна неабелева підгрупа групи $GL(2, R_2)$. Оскільки $|P_2| \geq 2$, то можливі такі випадки:

1) $G \cong G_{l,q}$ $(l = 1, 2, \ldots, n)$.

З твердження 4 випливає, що G можна представити у вигляді

$$G = \left\langle \begin{pmatrix} \theta_q^i & 0 \\ 0 & \theta_q^{-j} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \xi \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle,$$

де θ_q — фіксований елемент порядку $q \in \Pi$, $j = 1, \ldots, \frac{q-1}{2}$, а ξ пробігає всі елементи порядку 2^{l-1} в полі F_2.

2) Нехай D_4 — група діедра порядку 8. Введемо в розгляд групи

$$T_1^{(\gamma_s)} = \left\langle \begin{pmatrix} i & t^{e-s} \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \gamma_s & \frac{(\gamma_s^2-1)t^{e-s}}{2\gamma_s i} \\ -\frac{2\gamma_s i}{t^{e-s}} & -\gamma_s \end{pmatrix} \right\rangle \ (1 \leq s \leq e),$$

де елементи γ_s задаються формулою (3). Легко бачити, що $V_1^{(0)}$ не спряжена з групою $T_1^{(\gamma_s)}$. Неважко також перевірити, що $T_1^{(\gamma_s)}$ не спряжений з $T_1^{(\gamma_{s'})}$ при $s \neq s'$. Припустимо, що $C^{-1}T_1^{(\alpha_s)}C = T_1^{(\beta_s)}$, де

$$T_1^{(\alpha_s)} = \langle A_s, B_s\rangle,\ T_1^{(\beta_s)} = \langle A_s, B_s'\rangle,\ \alpha_s = \alpha \neq \beta_s = \beta(mod\, t^s) \text{ і } C \in GL(2, R_2).$$

Тоді можливі випадки:

а) $C^{-1}A_sC = A_s$, $C^{-1}B_sC = A_s^kB_s'$ $(k = 0, 1, 2, 3, \ldots)$.

Із співвідношення $A_sC = CA_s$ випливає, що матриця C має вигляд

$$C = \begin{pmatrix} x & \frac{(x-y)t^{e-s}}{2i} \\ 0 & y \end{pmatrix} \ (x, y \in R_2), \tag{5}$$

де $x \equiv y(mod\, t^s)$ і $x, y \in R_2^*$. Легко перевірити, що випадок $k = 0, 2$ неможливий. Припустимо, що $B_sC = CA_sB_s'$. З формули (5) і останньої рівності одержимо наступну систему рівнянь:

$$\begin{cases} \alpha x i t^{e-s} &= (x-y)\beta - \beta x t^{e-s}, \\ \alpha x i &= -\beta y, \\ \frac{\alpha^2(x-y)+(\alpha^2-1)yt^{e-s}}{\alpha i} &= \frac{\beta^2(y-x)+(\beta^2+1)yt^{e-s}}{\beta}, \\ \alpha(y-x) - \alpha y t^{e-s} &= -\beta y i t^{e-s}. \end{cases} \tag{6}$$

Знаходячи з другого рівняння системи (6) $y = -\beta^{-1}\alpha x i$ і, підставляючи його в решту рівнянь цієї системи, одержимо рівність $\alpha x i(t^{e-s} - 1) = -\beta x(t^{e-s} - 1)$, звідки $\alpha x i = -\beta x$ або $t^{e-s} = 1$. У першому випадку $\beta = -\alpha i$ і $x = y$, а в другому $s = e$ і, як легко бачити, $\beta \equiv \alpha i(mod\, t^s)$, де $\beta \neq \alpha(mod\, t^s)$, $s > \frac{e}{s}$. Якщо $B_sC = -CA_sB_s'$, то $y = \beta^{-1}\alpha x i$, а звідси, як і в попередньому випадку, $\beta = \alpha i$, або $t^{e-s} = 1$, звідки $\beta \equiv \alpha i(mod\, t^s)$, де $s > \frac{e}{2}$.

б) $C^{-1}A_sC = -A_s$, $C^{-1}B_sC = A_s^kB_s'$ $(k = 0, 1, 2, 3)$.

Аналогічно попередньому доводиться, що $T_1^{(\alpha_s)}$ спряжена з $T_1^{(\beta_s)}$ тоді і тільки тоді, коли $\beta_s \equiv \alpha_s i(mod\, t^s)$ і $s > \frac{e}{2}$ $(k = 1, 3)$.

3) Нехай K_4 — група кватерніонів порядку 8. Дотримуючись позначень твердження 3, введемо групи

$$T_2^{(\gamma_s)} = \left\langle \begin{pmatrix} i & t^{e-s} \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \gamma_s & \frac{(1+\gamma_s^2)t^{e-s}}{2\gamma_s i} \\ -\frac{2\gamma_s i}{t^{e-s}} & -\gamma_s \end{pmatrix} \right\rangle \ (1 \le s \le e),$$

де елементи γ_s задаються формулою (3). Згідно твердження 2 G спряжена в $GL(2, R_2)$ з групою $V_2^{(0)}$ або з одною із груп $T_2^{(\gamma_s)}$. Очевидно, що $T_2^{(\gamma_s)}$ і $T_2^{(\gamma_{s'})}$ не спряжені при $s \ne s'$. Припустимо, що для деякої матриці $C \in GL(2, R_2)$, $C^{-1}T_2^{(\alpha_s)}C = T_2^{(\beta_s)}$, де

$$T_2^{(\alpha_s)} = T_2^{(\alpha)} = \langle A_s, B_s\rangle, \ T_2^{(\beta_s)} = T_2^{(\beta)} = \langle A_s, B_s'\rangle, \ \alpha \ne \beta (mod\, t^s).$$

Аналогічно 2), $\beta \equiv \alpha i (mod\, t^s)$, де $s > \frac{e}{2}$. З іншого боку, якщо $\beta \equiv \alpha i (mod\, t^s)$ і $s > \frac{e}{2}$, то поклавши

$$C = \begin{pmatrix} 1 & \frac{(\beta^{-1}i+\alpha)t^{e-s}}{2\alpha i} \\ -\frac{2i}{t^{e-s}} & -1 \end{pmatrix},$$

одержимо $C^{-1}A_sC = -A_s$, $C^{-1}B_sC = A_sB_s'$, тобто $T_2^{(\alpha)}$ і $T_2^{(\beta)}$ спряжені. Неважко побачити, що при $s \le \frac{e}{2}$ або $\beta \ne \alpha i (mod\, t^s)$ при $s > \frac{e}{2}$, $T_2^{(\alpha)}$ і $T_2^{(\beta)}$ не спряжені.

4) Нехай $G \cong H_k = \langle a, b | a^{2^k} = b^2 = 1, \ b^{-1}ab = a^{1+2^{k-1}}\rangle$ $(k = 3, \ldots, n)$. Згідно з твердженням 1 G спряжена з одною з груп:

$$T_k^{(0)} = \left\langle \begin{pmatrix} \varepsilon_k^j & 0 \\ 0 - \varepsilon_k^j & \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle;$$

$$T_2^{(\alpha_s)} = \left\langle \begin{pmatrix} \varepsilon_k^j & t^{e-s} \\ 0 & -\varepsilon_k^j \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha_s & \frac{(1-\alpha_s^2)t^{e-s}}{\alpha_s \Pi} \\ \frac{\alpha_s \Pi}{t^{e-s}} & -\alpha_s \end{pmatrix} \right\rangle = \langle A_s, B_s\rangle,$$

де елементи α_s задаються формулою (3), $s = 1, \ldots, e$, $j = 1, \ldots, 2^{k-1}$ $(k = 3, \ldots, n)$. Легко бачити, що якщо при $j > 1$ покласти $C = diag[\varepsilon_k^{j-1}, 1]$, то

$$C^{-1}A_s^jC = \begin{pmatrix} \varepsilon_k & t^{e-s} \\ 0 & -\varepsilon_k \end{pmatrix},$$

тобто в $T_k^{(0)}$ і $T_k^{\alpha_s)}$ достатньо розглядати випадок $j = 1$ і вважати, що $V_k^{(0)} = T_k^{(0)}$ і $V_k^{(\alpha_s)} = T_k^{(\alpha_s)}$.

Припустимо, що група $V_k^{(\alpha_s)} = V_k^{(\alpha)} = \langle A_s, B_s\rangle$ спряжена в $GL(2, R_2)$ з групою $V_k^{(\beta_s)} = V_k^{(\beta)} = \langle A_s, B_s'\rangle$, де $\alpha \ne \beta (mod\, t^s)$. З будови групи H_k випливає, що можливі випадки:

а) $C^{-1}A_sC = \mp A_s$, $C^{-1}B_sC = \mp B_s'$.

Якщо $C^{-1}A_sC = A_s$ і $C^{-1}B_sC = \mp B_s'$, то зображення $\Gamma : a \to A_s$, $b \to \mp B_s'$ було б точним R_2-зображенням групи H_k, R_2-еквівалентним зображенню $\Delta_s(\alpha_s)$, що неможливо, оскільки $\alpha_s \ne \beta_s (mod\, t^s)$. Тоді $C^{-1}A_sC = A_s$ і $C^{-1}B_sC = \mp B_s'$. З першого співвідношення випливає, що C має вигляд

$$C = \begin{pmatrix} x & y \\ \frac{\alpha \Pi x}{t^{e-s}} & -x \end{pmatrix} \ (x, y \in R_2). \tag{7}$$

З рівняння $B_s C = C B'_s$ легко отримати

$$y = \frac{[\alpha(1-\alpha) + (1-\beta)]t^{e-s}}{\beta\Pi},$$

звідки $(1-\alpha)\alpha + (1-\beta) \equiv 0(mod\, t^s)$. Оскільки $\alpha^2 \equiv 1(mod\, t^s)$, то $\beta \equiv \alpha(mod\, t^s)$, що неможливо. З тих же міркувань неможливий і випадок $B_s C = C B'_s$. Легко перевірити, що матриці A_s і A_s^j не спряжені над R_2, якщо $\varepsilon_k^j \neq \mp\varepsilon_k$.

Нехай $\varepsilon_k^j = -\varepsilon_k$. Тоді $j = 1 + 2^{k-1}$ – розглянутий вище випадок. Тому залишилось розглянути можливість $C^{-1} A_s C = A_s^j B'_s$ $(j \neq 0)$. В цьому випадку матриця C має вигляд

$$C = \begin{pmatrix} x & c_1 z \\ z & \frac{c_2 t^{e-s}}{\varepsilon^j \beta\Pi} \end{pmatrix} \ (x, z \in R_2), \tag{8}$$

де $c_2 = \varepsilon_k + \varepsilon_k^{(j-1)})\beta\varepsilon_k + \pi)$ і c_1 — деякий елемент кільця R_2. Припустимо, що $C^{-1} B_s C = B'_s$, де C має вигляд (8). Тоді

$$x = \frac{(\alpha + \beta + \varepsilon^j c_2) z t^{e-s}}{\alpha\Pi},$$

і оскільки $z \in R_2^*$, то $\alpha + \beta + \varepsilon^j c_2 \equiv \alpha + \beta \equiv 0(mod\, t^s)$, звідки $\alpha = \beta(mod\, t^s)$, що неможливо. До такої ж конгруенції зводиться випадок $C^{-1} B_s C = -B'_s$.

Таким чином групи $V_k^{(\alpha_s)}$ і $V_k^{(\beta_s)}$ не спряжені при всіх $s = 1, \ldots, e$, якщо $\alpha_s \neq \beta_s(mod\, t^s)$. Інша частина доведення очевидна. Теорема доведена.

Список використаної літератури

1. *Юферев В. П.* Классификация минимальных неприводимых линейных групп простой степени // Изв. АН БССР. Серия физ.-мат. наук. 1963. – № 5. – С. 96–97.
2. *Кирилюк А. А.* Классификация минимальных неприводимых разрешимых подгрупп группы $GL(3, R_p)$ // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Серія матем. і інформ. 1972. – Вип. 5. – С. 41–48.
3. *Кирилюк О. А., Кирилюк А. О.* Абелеві мінімальні незвідні підгрупи групи $GL(2, R_p)$ // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Серія матем. і інформ. –2000. – Вип. 24, № 2. – С. 77–87.
4. *Кирилюк А. А.* Минимальные неприводимые разрешимые подгруппы группы $GL(2, R_p)$ // В сб. "Материалы XXXII итог. научн. конф. проф.-преп. состава Ужгород. ун-та". – Ужгород, 1978. – С. 166–190.

Одержано 27.05.2016