УДК 512.547.25

В. М. Петечук (Закарпатський ін-т післядипломної педагог. освіти), **Ю. В. Петечук** (Ужгородський нац. ун-т)

ГОМОМОРФІЗМИ З УМОВОЮ (*) ПІДГРУП ГРУПИ $GL(n,R)$, $n \geq 4$, В ЯКИХ $E(n,R)$ Є НОРМАЛЬНОЮ ПІДГРУПОЮ

В работі розглядаються гомоморфізми з умовою (*) підгруп $E(n,R) \lhd G \subseteq GL(n,R)$, $n \geq 4$ над довільними асоціативними кільцями R з 1. Показано, що вони мають розширене стандартне описання, а в окремих випадках стандартне описання.

The article deals with the homomorphisms on codition (*) of subgroups, $E(n,R) \lhd G \subseteq GL(n,R)$, $n \geq 4$ above arbitrary rings R with 1. It is shown that they have extended standart description and standart description in special cases.

Дія гомоморфізмів з умовою (*) групи $E(n,R) \subseteq G \subseteq GL(n,R)$, $n \geq 4$ над довільними асоціативними кільцями R з 1 на підгрупі $E(n,R)$ вивчена авторами в [1,2]. Виявилося, що вона є стандартною. Тому виникає природне запитанння про дію таких гомоморфізмів на всій групі G. Для відповіді на це запитання потрібні співвідношення між елементами групи G і елементами її підгрупи $E(n,R)$. У загальному випадку ця задача повністю не вирішена, хоча існує багато окремих випадків для яких це можливо зробити. Відзначимо, що у всіх цих випадках у тій або іншій формі використовується умова, що підгрупа $E(n,R)$ є нормальною підгрупою групи G.

У даній роботі описуються гомоморфізми з умовою (*) групи $E(n,R) \lhd G \subseteq GL(n,R)$, $n \geq 4$ над асоціативними кільцями R з 1. Показано, що вони мають розширене стандартне описання, а в окремих випадках стандартне описання.

1. Стандартні гомоморфізми. Розглянемо гомоморфізми, які прийнято називати стандартними. Окремі з них є ізоморфізмами. Такими є внутрішні ізоморфізми.

Нехай V і W — ліві K-модулі, $g : W \to V$ ізоморфізм K-модулів, $V = gW$. Ізоморфізм g індукує внутрішній ізоморфізм

$$i_g : GL(W) \to GL(V)$$

за правилом $i_g(x) = gxg^{-1}$, де x — довільний елемент групи $GL(W)$.

Неважко бачити, що ізоморфізм g індукує ізоморфізм

$$g^{-1} : V \to W, \quad i_{g^{-1}} : GL(V) \to GL(W)$$

і мають місце рівності $i_g i_{g^{-1}} = 1$, $i_{g^{-1}} i_g = 1$, $i_{g^{-1}} = (i_g)^{-1}$.

Нехай R — асоціативне кільце з 1, δ і ν — деякі кільцевий і антикільцевий гомоморфізми кільця R в асоціативне кільце K з 1 відповідно, e — центральний ідемпотент кільця K.

Гомоморфізм δ і антигомоморфізм ν кільця R в кільце K індукують гомоморфізм $\overline{\delta} : R_n \to K_n$ і антигомоморфізм $\overline{\nu} : R_n \to K_n$ кільця матриць R_n у кільце матриць K_n за правилом

$$\overline{\delta}(x_{ij}) = (\delta x_{ij}), \overline{\nu}(x_{ij}) = (\nu x_{ji}) = \text{т}(\nu x_{ij})$$

для довільної матриці $x = (x_{ij})$ кільця R_n, де т — означає класичне транспонування.

Цілком очевидно, що звуження гомоморфізмів $\overline{\delta}$ і $\overline{\nu}$ є відповідно гомоморфізмом і антигомоморфізмом групи $GL(n,R)$ в групу $GL(n,K)$.

Неважко бачити, що довільний антигомоморфізм Λ групи G індукує груповий гомоморфізм Λ' групи G, якщо визначити його за правилом
$$\Lambda'(g) = \Lambda(g)^{-1}$$
для всіх g з G.

З вище сказаного випливає, що гомоморфізм δ і антигомоморфізм ν кільця R у деяке кільце K з 1 індукують гомоморфізм $\Lambda_e : GL(n,R) \to GL(n,K)$ за правилом
$$\Lambda_e x = \overline{\delta}(x)\, e + \overline{\nu}(x)^{-1}(1-e),$$
де x — довільна матриця групи $GL(n,R)$, а e — центральний ідемпотент кільця K.

Очевидно, що гомоморфізм Λ_e індукує гомоморфізм, який також прийнято позначати через Λ_e, групи $GL(n,R)$ в групу $diag(GL(n,K),1)$ за правилом
$$\Lambda_e x = diag(\Lambda_e x, 1) = \overline{\delta}(x)\, e + \overline{\nu}(x)^{-1}(1-e) + e_1\ ,$$
де x — довільна матриця групи $GL(n,R)$, e і e_1 — ортогональні ідемпотенти.

Зокрема, дія гомоморфізму Λ_e на елементарних трансвекціях $t_{ij}(r) = 1 + re_{ij}$, $1 \le i \ne j \le n$, $r \in R$ визначається за правилом
$$\Lambda_e t_{ij}(r) = t_{ij}(\delta r)\, e + t_{ji}(-\nu r)(1-e) + e_1\ ,$$
де e_{ij} - стандартна матрична одиниця, тобто матриця в якої на місці (i,j) стоїть 1, а на інших місцях нулі.

Гомоморфізм Λ_e прийнято називати контраградієнтно-кільцевим гомоморфізмом.

Насправді $\overline{\delta} : R_n \to K_n$, де $\delta : R \to K$ — гомоморфізм кілець, прийнято називати кільцевим гомоморфізмом. Він отримується заміною в R_n кільця R на кільце K за допомогою δ .

Позначимо через K^0 — кільце, яке складається з елементів кільця K, на якому задана операція додавання як у кільці K і множення $k_1 \circ k_2 = k_2 k_1$ для довільних елементів k_1 і k_2 кільця K.

Кільце K^0 називається опозитом кільця K. Зрозуміло, що відображення $\nu_0 : K \to K^0$ за правилом $\nu_0(k) = k$ є антиізоморфізмом кілець K і K^0 , $\nu_0^2 = 1$. Антиізоморфізм ν_0 прийнято називати елементарним антиізоморфізмом. Неважко бачити, що довільний антиізоморфізм $\nu = \nu_0(\nu_0\nu)$ є добутком кільцевого гомоморфізма $\nu_0\nu$ і елементарного антиізоморфізма ν_0 .

Відмітимо, що кільцевий гомоморфізм $\delta : R \to K$ індукує кільцевий гомоморфізм $\delta : R \to Ke$, де e — центральний ідемпотент кільця K, який також будемо позначати через δ . Аналогічно кільцеві антигомоморфізми $\nu : R \to K$, $\nu_0 : K \to K^0$ індукують кільцеві антигомоморфізми $\nu : R \to K(1-e)$, $\nu_0 : K \to K^0(1-e)$, які також будемо позначати v і v_0 відповідно.

У цих позначеннях сума $\delta + \nu_0\nu$ кільцевих гомоморфізмів δ і $\nu_0\nu$ є кільцевим гомоморфізмом і її можна позначити через δ . Гомоморфізм Λ_e в такому разі діє за правилом
$$\Lambda_e x = \overline{\delta}(x)\, e + \overline{\nu_0}\left(\overline{\delta}(x)\right)^{-1}(1-e) + e_1\ ,$$
де x – довільна матриця групи $GL(n,R)$, а e і e_1 — ортогональні ідемпотенти, $\delta : R \to K$ - кільцевий гомоморфізм. Надалі будемо вважати, що гомоморфізм Λ_e визначений саме в такий спосіб.

Зокрема,
$$\Lambda_e t_{ij}(r) = t_{ij}(\delta r)\, e + t_{ji}(-\nu_0 \delta r)(1-e) + e_1\ ,$$

де r - довільний елемент кільця R, а e і e_1 - ортогональні ідемпотенти.

Антиізоморфізм $\nu_0 : K \to K^0$ індукує антиізоморфізм $\overline{\nu_0} : K_n \to (K^0)_n$ і, як наслідок, антиізоморфізм $\overline{\nu_0}$ груп $GL(n, K)$ і $GL(n, K^0)$. Останній прийнято називати елементарно-контраградієнтним. Він утворюється із нетотожнього (єдиного) автоморфізма графа типу A_n , що зберігає кути, тобто який пару (i, j) відображає у пару (j, i) .

Аналогічно кільцевий гомоморфізм утворюється, з точністю до кільцевого гомоморфізма, з тотожнього відображення $K \to K$ і тотожнього автоморфізма графа типу A_n , що зберігає кути графа.

Таким чином, з точністю до внутрішнього ізоморфізма і кільцевого гомоморфізма, під стандартними неодиничними гомоморфізмами алгебраїчної групи, яка пов'язана із графом типу A_n , слід розуміти пов'язані з ідемпотентами e і $1 - e$ гомоморфізми (тотожний і контраградієнтний), які індуковані автоморфізмами графа, що зберігають його кути.

У більш загальній ситуації розумно вважати стандартними ті неодиничні гомоморфізми алгебраїчної групи, які, з точністю до внутрішнього ізоморфізма і кільцевого гомоморфізма, при відповідних ідемпотентах повної системи центральних ортогональних ідемпотентів утворюють гомоморфізми алгебраїчної групи, породжені автоморфізмами графа, що зберігають його кути.

Нагадаємо, що систему центральних ортогональних ідемпотентів кільця прийнято називати повною, якщо їх сума дорівнює одиниці.

Такі гомоморфізми можна називати стандартними навіть над довільними асоціативними кільцями з одиницями. У більш широкому розумінні поняття стандартності гомоморфізму запропонував Ж.Тітс [3]. Подібним чином влаштовані гомоморфізми груп Шевалльє над комутативними кільцями з 1. Найбільш істотні результати в цьому напрямку отримані Р.Стейнбергом [4], Дж.Є.Хамфрі [5], Є.Абе [6], О.І.Буніною [7].

2. Загальна схема описання гомоморфізмів. Описання гомоморфізмів $\Lambda : G \to GL(W)$, $E(n, R) \subseteq G \subseteq GL(n, R)$ відбувається за такою схемою:

1) визначається розклад модуля W у пряму суму n ізоморфних між собою підмодулів, які ізоморфні модулю L і деякого підмодуля модуля W, який ізоморфний модулюP.

2) будується модуль $V = L \oplus \cdots \oplus L \oplus P$, де L береться n раз і будується відповідний ізоморфізм $g : W \to V$, $V = gW$.

3) розглядаються гомоморфізми $i_g : GL(W) \to GL(V)$, $\Lambda_e : GL(n, R) \to GL(V)$, $\Lambda_0 = i_{g^{-1}} \Lambda_e : GL(n, R) \to GL(V) \to GL(W)$.

4) доводиться, що гомоморфізм $i_g \Lambda$ відображає групу $E(n, R)$ в групу $diag$ $(GL(n, EndL), 1)$ і $\Lambda = \Lambda_0$ на групі $E(n, R)$ відносно кільцевого гомоморфізма $\delta : R \to EndL$ і центрального ідемпотента e кільця $EndL$.

5) використовуючи співвідношення між елементами $h \in G$ і елементами групи $E(n, R)$ визначаються властивості відображення $\gamma : G \to GL(W)$, яке задається за правилом $\gamma(h) = \Lambda_0(h)^{-1} \Lambda(h)$, де $h \in G$.

Відповідно до пунктів 1-4 вищеописаної схеми авторами даної статті описані гомоморфізми $\Lambda : G \to GL(W)$ з умовою (*), де $E(n, R) \subseteq G \subseteq GL(n, R)$, $n \geq 4$ над асоціативними кільцями R і K з одиницями.

3. Визначення і попередні результати. Будемо казати, що гомоморфізм

$$\Lambda : G \to GL(W) \ , \ E(n, R) \subseteq G \subseteq GL(n, R)$$

над довільним асоціативним кільцем R з 1 має розширене стандартне описання, якщо існує гомоморфізм γ групи G у групу $GL\left(W\right)$ такий, що

$$\Lambda\left(h\right)=\Lambda_0\left(h\right)\gamma\left(h\right)$$

для всіх $h\in G$ і елементи груп $\Lambda_0\left(G\right)$ і $\gamma\left(G\right)$ між собою попарно комутують.

Якщо в розширеному стандартному описанні $\gamma\left(G\right)$ — комутативна група, то кажуть, що Λ має стандартне описання. Підкреслимо, що при стандартному описанні елементи груп $\Lambda\left(G\right)$ і $\gamma\left(G\right)$ попарно комутують, у той час як при розширеному стандартному описанні цього не вимагається.

Відзначимо, що внутрішній ізоморфізм наділяє групу $GL\left(W\right)$ структурою повної лінійної групи, а Λ_e за допомогою кільцевого гомоморфізму відображає групу $GL\left(n,R\right)$ в цю групу. Множення на $\gamma\left(h\right)$ в деяких випадках породжується гомотетією $x\rightarrow x\gamma\left(x\right)$, де γ — гомоморфізм групи в центр її розширення, а x– довільний елемент цієї групи.

Скажемо, що гомоморфізм $\Lambda:G\rightarrow GL\left(W\right)$, $E\left(n,R\right)\subseteq G\subseteq GL\left(n,R\right)$ задовольняє умову (*), якщо для довільного ненульового нільпотентного елемента $m\in EndW$, $m^2=0$ існують оборотні в K натуральні числа s_1,s_2 і $A\in G$ такі, що $\Lambda A=1+s_1m$ і з рівності $\Lambda A\Lambda B=\Lambda B\Lambda A$, $B\in G$ випливає, що $A^{s_2}B=BA^{s_2}$. Передбачається, що у визначенні гомоморфізма з умовою (*) ненульовий елемент $m\in EndW$ існує.

Зокрема, умову (*) задовольняє довільний ізоморфізм групи G на групу $GL\left(W\right)$. Для цього досить покласти $s_1=s_2=1$ і скористатися тим, що $1+m\in GL\left(W\right)$.

Описання автоморфізмів матричних груп почалося роботою Шраєра і Ван дер Вардена 1928 року, у якій вони описали автоморфізми проективної групи $PE\left(n,R\right)$, $n\geq 3$ над довільним полем R. Потім Дьедонне і Ріккарт напочатку 50-их років поширили це описання на випадок, коли R — тіло. Випадки, які залишилися не розглянутими, коли R — тіло і $n=2$ були повністю описані різними методами тільки наприкінці 80-их років [8, 9, 10].

Перший крок у побудові теорії автоморфізмів над кільцями, а саме над кільцями цілих чисел, зробили Хуа Ло-ген і І. Райнер. Ізоморфізми і навіть гомоморфізми груп $GL\left(n,R\right)$, $n\geq 3$ і $GL\left(m,K\right)$, $m\geq 2$ з деякими обмеженнями над асоціативними кільцями R і K з 1 надалі описувалися багатьма авторами (Вань Чжесянь, О'Міра, Янь Шіцзянь, Ж.Помфре і Б.Макдональд, М.Далл, В.С.Дроботенко і Е.Я.Погоріляк, В.Я.Блощіцин, Д.Джеймс, Б.Вайсфайлер,

Г.А.Носков, Е.Коннорс, Чі Фуан, П.Кон, Р.Солацці, А.Хан, Ю.І.Мерзляков, Ю.В.Сосновський, В.Уотергауз і інші). Найбільш загальні результати можна знайти в [11, 12, 13, 14, 15, 16, 17]. У повному об'ємі, без обмеження на асоціативні кільця R і K з 1, ізоморфізми повних матричних груп $GL\left(n,R\right)$ і $GL\left(m,K\right)$, $n\geq 4$ вперше описав І.З.Голубчик. Ним доведена

Теорема 1. *[18] Нехай R і K — асоціативні кільця з 1, $n\geq 4$, $m\geq 2$, $\Lambda:GL\left(n,R\right)\rightarrow GL\left(m,K\right)$ — ізоморфізм груп. Тоді існують центральні ідемпотенти e і f кілець матриць R_n і K_m відповідно і кільцевий ізоморфізм $\Lambda_1:eR_n\rightarrow fS_m$ і кільцевий антиізоморфізм $\Lambda_2:\left(1-e\right)R_n\rightarrow\left(1-f\right)K_m$ такі, що*

$$\Lambda\left(x\right)=\Lambda_1\left(ex\right)+\Lambda_2\left(\left(1-e\right)x^{-1}\right)$$

для всіх $x \in E(n,R)$.

Зведення гомоморфізмів матричних груп над кільцями до описання кільцевих гомоморфізмів матричних кілець є цілком природним. Адже навіть довільні гомоморфізми кілець матриць R_n і K_m , $n \geq 2$, $m \geq 2$ над асоціативними кільцями R і K з 1 повністю описані В.М. Петечуком [14]. Відзначимо, що в окремих випадках вони описувалися різними авторами (А.Хан, А.В. Міхальов, М. Болла).

Авторами даної статті доведено, що має місце

Теорема 2. *[19, 20] Нехай R і K — асоціативні кільця з 1, $E(n,R) \subseteq G \subseteq GL(n,R)$, $n \geq 4$, W — лівий K-модуль, гомоморфізм $\Lambda : G \to GL(W)$ задовольняє умову (*). Тоді існують модулі L і P і ізоморфізм $g : W \to \underbrace{L \oplus \cdots \oplus L}_{n} \oplus P$ такі, що $\Lambda = \Lambda_0$ на $E(n,R)$, де $\delta : R \to EndL$ — кільцевий гомоморфізм, e – центральний ідемпотент кільця $EndL$, e_1 — одиниця кільця $EndP$.*

Якщо додатково припустити, що $2 \in R^*$, то теорема 2 має місце при $n \geq 3$. Якщо $n = 3$ і $2 \notin R^*$, то існують нестандартні гомоморфізми [15, 19].

Можливо в теоремі 2 умову (*) можна послабити або запропонувати іншу умову на гомоморфізм як, наприклад це зроблено в [14]. Тому проблематика описання гомоморфізмів матричних груп над асоціативними кільцями містить чимало фундаментальних запитань.

4. Основний результат. Основні результати даної статті викладені в теоремах 3 і 4. Зокрема з теореми 2 випливає теорема 3, а з неї випливає теорема 1.

В теоремі 3 описуються гомоморфізми з умовою (*), які є мономорфізмами або образи групи елементарних трансвекцій є достатньо великими.

В теоремі 4 вивчаються гомоморфізми з умовою (*) підгруп групи $GL(n,R)$, $n \geq 4$ над асоціативними кільцями R з 1, які містять нормальну підгрупу $E(n,R)$. Зокрема це так, якщо R довільне комутативне кільце з 1 [20].

Теорема 3. *Нехай R і K — асоціативні кільця з 1, $E(n,R) \subseteq G \subseteq GL(n,R)$, $n \geq 4$, W — лівий K -модуль, $\dim W = m$, $\Lambda : G \to GL(m,K) \equiv GL(W)$ — гомоморфізм з умовою (*), який є мономорфізмом (такими є ізоморфізми) або $E(n,K) \subseteq \Lambda E(n,R)$. Тоді існує модуль L і ізоморфізм $g : W \to \underbrace{L \oplus \cdots \oplus L}_{n}$ такі, що*

$$\Lambda t_{ij}(r) = g^{-1}\left(t_{ij}(\delta r)\, e + t_{ji}(-\nu_0 \delta r)(1-e)\right) g \ ,$$

де $\delta : R \to EndL$ — ізоморфізм кілець, e — центральний ідемпотент кільця $EndL$, r – довільний елемент кільця R.

Доведення. Для доведення теореми 3 розглянемо централізатори

$$C_1 = C_G\left\{t_{in}(1), t_{nj}(1) \mid\ 1 \leq i < n, 1 < j < n\right\} ,$$
$$C_2 = C_G\left\{t_{in}(1), t_{nj}(1) \mid\ 1 < i < n, 1 \leq j < n\right\} .$$

Неважко бачити, що вони співпадають з централізатором

$$C = C_G\left\{t_{ij}(1), |1 \leq i \neq j \leq n\right\}$$

і складаються із скалярних матриць групи G .

У відповідності з теоремою 2 існують модулі $L \neq 0$, P і ізоморфізм $g : W \to V = \underbrace{L \oplus \cdots \oplus L}_{n} \oplus P$ такий, що $\delta : R \to EndL$ — епіморфізм і $\Lambda = \Lambda_0$ на $E(n,R)$, де e — центральний ідемпотент кільця $EndL$.

Згідно з умовою $(*)$ мають місце включення

$$g^{-1}\begin{pmatrix} E & 0 & sex \\ 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} g \in \Lambda C_1 = \Lambda C \ , \ g^{-1}\begin{pmatrix} E & 0 & s(1-e)x \\ 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} g \in \Lambda C_2 = \Lambda C \ ,$$

де s — натуральне число, яке оборотне в кільці K , x — довільний елемент із $Hom(P,L)$.

Тому $sex = s(1-e)x = 0$. Це означає, що $x = 0$, $Hom(P,L) = 0$. Аналогічно доводиться, що $Hom(L,P) = 0$. Тому

$$K_m = g^{-1} diag\left((EndL)_n, EndP\right) g \ , \ E_m = g^{-1} diag\left(E_n, 1\right) g$$

Неважко бачити, що елемент $g^{-1}diag(0,1)\,g$ належить центру кільця K_m , а тому має вигляд λE_m , де $\lambda^2 = \lambda$ — елемент центра кільця K .

Аналогічно елемент $g^{-1}diag(E_n,0)\,g$ також належить центру кільця K_m і має вигляд $(1-\lambda)E_m$. Окрім цього,

$$\Lambda E(n,R) \subseteq (1-\lambda)K_m + \lambda E_m \ .$$

Тому трансвекції $t_{ji}(\lambda K)$, $1 \leq i \neq j \leq m$ комутують із усіма елементами групи $\Lambda E(n,R)$.

За умовою (*) прообрази деяких степенів елементів $t_{ij}(\lambda)$ існують і комутують із скінченною кількістю елементів із групи $E(n,R)$, а тому є скалярними матрицями. Однак, з цього не випливає, що ці скалярні матриці комутують між собою.

Якщо ж накласти додаткову умову на Λ , з якої випливає, що деякі степені трансвекцій $t_{ij}(\lambda)$ і $t_{ji}(\lambda)$ з оборотними показниками в кільці K комутують між собою, то $\lambda^2 = 0$, $\lambda = 0$, $P = 0$.

Такою додатковою умовою може бути, наприклад, вимога, щоб гомоморфізм з умовою (*) був мономорфізмом. Адже, тоді деякі степені прообразів трансвекцій $t_{ij}(\lambda)$, з оборотними показниками в K, комутують з усіма елементами групи $E(n,R)$, а тому є центральними скалярними матрицями, які комутують між собою. Аналогічне твердження має місце, якщо хоча б одна трансвекція $t_{ij}(\lambda)$ належить групі $\Lambda E(n,R)$.

Теорема 4. *Нехай R і K — асоціативні кільця з 1, W — лівий K-модуль, $E(n,R) \triangleleft G \subseteq GL(n,R)$, $n \geq 4$, $\Lambda : G \to GL(W)$ — довільний гомоморфізм з умовою (*). Тоді Λ має розширене стандартне описання. Якщо комутант $G' = E(n,R)$, то Λ має стандартне описання.*

Доведення. Нехай h — довільний елемент групи G. За умовою група $E(n,R)$, $n \geq 3$ є нормальною підгрупою групи G. Тому

$$ht_{ij}(r)\,h^{-1} = \prod t_{kl}(r_{kl}) \ ,$$

де $h \in G$, $1 \leq i \neq j \leq n$, $r \in R$, $r_{kl} \in R$ і добуток береться по $1 \leq k \neq l \leq n$. .

За теоремою 2 існують модулі $L \neq 0$, P і ізоморфізм $g : W \to V = \underbrace{L \oplus \cdots \oplus L}_{n} \oplus P$ такий, що $\Lambda = \Lambda_0$ на елементарних трансвекціях $t_{ij}(r)$ групи G. Тому

$$\Lambda h \Lambda t_{ij}(r)\,\Lambda h^{-1} = \Lambda\left(ht_{ij}(r)\,h^{-1}\right) = \prod \Lambda t_{kl}(r_{kl}) =$$

$$\prod \Lambda_0 t_{kl}\left(r_{kl}\right) = \Lambda_0\left(h t_{ij}\left(r\right) h^{-1}\right) = \Lambda_0\left(h\right) \Lambda t_{ij}\left(r\right) \left(\Lambda_0\left(h\right)\right)^{-1}.$$

Тим самим доведено, що елементи $\gamma\left(h\right) = \left(\Lambda_0\left(h\right)\right)^{-1} \Lambda\left(h\right)$ комутують із елементами $\Lambda t_{ij}\left(r\right)$ для всіх $1 \leq i \neq j \leq n$ і $r \in R$.

Зрозуміло, що γ — відображення групи G у групу $GL\left(W\right)$ і $\Lambda\left(h\right) = \Lambda_0\left(h\right) \gamma\left(h\right)$.

Розглянемо відображення $\chi : G \to GL\left(V\right)$, яке задане за правилом $\chi\left(h\right) = i_g \gamma\left(h\right)$ для всіх $h \in G$. Неважко бачити, що елементи $\chi\left(h\right)$ комутують із елементами $i_g \Lambda t_{ij}\left(r\right) = \Lambda_e t_{ij}\left(r\right)$ і $\Lambda\left(h\right) = i_{g^{-1}}\left(\Lambda_e\left(h\right) \chi\left(h\right)\right)$ для всіх $h \in G$, $1 \leq i \neq j \leq n$, $r \in R$. Тому

$$\chi\left(h\right)\left(t_{ij}\left(\delta r\right) e + t_{ji}\left(-\nu_0 \delta r\right)\left(1-e\right) + e_1\right) =$$
$$\left(t_{ij}\left(\delta r\right) e + t_{ji}\left(-\nu_0 \delta r\right)\left(1-e\right) + e_1\right) \chi\left(h\right)$$

для всіх $1 \leq i \neq j \leq n$, $r \in R$.

З останньої рівності випливає, що $\chi\left(h\right)$ комутує з

$$\delta r\left(e_{ij} e - e_{ji}\left(1-e\right)\right)$$

для всіх $1 \leq i \neq j \leq n$, $r \in R$. Тому

$$\chi\left(h\right) = \chi_1\left(h\right) e + \chi_2\left(h\right)\left(1-e\right) + \chi_3\left(h\right) e_1$$

де $\chi_1\left(h\right)$ і $\chi_2\left(h\right)$ — формальні скалярні матриці, які комутують із δr для всіх $r \in R$.

Оскільки Λ — гомоморфізм із умовою (*), то $\delta R = EndL$ і $\chi_1\left(h\right)$, $\chi_2\left(h\right)$ містяться в центрі кільця $\left(EndL\right)_n$. Тому елементи $\chi\left(h\right)$ попарно комутують із елементами

$$\Lambda_e\left(h_1\right) = \overline{\delta}\left(h_1\right) e + \overline{\nu_0}\left(\overline{\delta}\left(h_1\right)^{-1}\right)\left(1-e\right) + e_1$$

для довільних елементів h і h_1 групи G. Отже, елементи $\chi\left(G\right)$ попарно комутують із елементами групи $\Lambda_e\left(G\right)$, а елементи $\gamma\left(G\right)$ попарно комутують із елементами групи $i_{g^{-1}} \Lambda_e\left(G\right)$.

Неважко бачити, що $\Lambda_e\left(h\right) \chi\left(h\right) = i_g\left(i_{g^{-1}} \Lambda_e\left(h\right) \gamma\left(h\right)\right) = i_g\left(\Lambda\left(h\right)\right)$ для всіх $h \in G$. Тому відображення $\Lambda_e \chi : G \to GL\left(V\right)$, яке задане за правилом $\left(\Lambda_e \chi\right)\left(h\right) = \Lambda_e\left(h\right) \chi\left(h\right)$, є гомоморфізмом групи G. Оскільки $\Lambda_e : G \to GL\left(V\right)$ також є гомоморфізмом групи G, то відображення $\chi : G \to GL\left(V\right)$ і, як наслідок, відображення $\gamma : G \to GL\left(W\right)$ також є гомоморфізмами групи G.

Тим самим доведено, що Λ має розширене стандартне описання. Відмітимо, що оскільки $\chi : G \to GL\left(V\right)$ є гомоморфізмом, то $\chi_3 : G \to GL\left(P\right)$ також є гомоморфізмом групи G таким, що $\chi_3 E\left(n, R\right) = 1$. Тому χ_3 індукує груповий гомоморфізм $\chi_3 : {}^{G}\!/_{E\left(n, R\right)} \to GL\left(P\right)$.

Якщо комутант G' групи G збігається із групою $E\left(n, R\right)$, то група ${}^{G}\!/_{E\left(n, R\right)}$-комутативна. Це означає, що елементи $\chi_3\left(h\right)$ і $\chi_3\left(h_1\right)$, а значить і елементи $\chi\left(h\right)$ і $\chi\left(h_1\right)$ комутують для всіх h і χ групи G.

Тому елементи $\chi\left(h_1\right)$, $\chi\left(h\right)$, $\Lambda_e\left(h\right)$ і, як наслідок, елементи $\gamma\left(h_1\right) = i_{g^{-1}} \chi\left(h_1\right)$, $\gamma\left(h\right) = i_{g^{-1}} \chi\left(h\right)$, $i_{g^{-1}} \Lambda_e\left(h\right)$ попарно комутують для довільних елементів h і h_1 групи G. Тим самим доведено, що $\gamma\left(G\right)$ — комутативна група і елем енти груп $\gamma\left(G\right)$ і $\Lambda\left(G\right)$ попарно комутують між собою. Отже, Λ має стандартне описання.

Якщо в якості групи G вибрати групу, породжену групою оборотних діагональних матриць $D\left(n, R\right)$ і групою $E\left(n, R\right)$, то комутант групи G збігається із групою $E\left(n, R\right)$. Тому гомоморфізми з умовою (*) групи $D\left(n, R\right) \cdot E\left(n, R\right)$, $n \geq 4$ над асоціативними кільцями R з 1 є стандартними.

Відмітимо, що якщо $P = 0$, то Λ також має стандартне описання. Адже, в цьому випадку елементи груп $\gamma\left(G\right)$ і $\Lambda\left(G\right)$ попарно комутують між собою.

Зокрема, якщо R комутативне кільце з 1, $n \geq 3$, то, з точністю до стандартних автоморфізмів (внутрішнього, розширено-кільцевого, контраградієнтного), описання автоморфізмів Λ групи G, $E(n,R) \subseteq G$ зводиться до випадку, коли $\Lambda\big|_{E(n,R)} = 1$. Враховуючи те, що $E(n,R)$ нормальна підгрупа групи $GL(n,R)$ одержуємо, що $\Lambda(g) f \Lambda(g)^{-1} = \Lambda(gfg^{-1}) = gfg^{-1}$ для довільних $g \in G$, $f \in E(n,R)$. Отже, елементи $\gamma(g) = g^{-1}\Lambda(g)$ комутують із усіма елементами групи $E(n,R)$ і тому є центральними скалярними матрицями. Тим самим доведено, що $\Lambda(g) = \gamma(g)\, g$ для всіх $g \in G$, де γ — гомоморфізм групи Gв групу R^* . Це означає, що Λ є гомотетією.

Багато теорем про гомоморфізми матричних груп над кільцями мають місце і у випадку проективних груп [11, 12, 13, 21, 14]. Нагадаємо, що згідно з означенням, якщо G — підгрупа групи $GL(n,R)$, то $PG = G/_{G \bigcap \xi GL(n,R)}$ — проективна група, де $\xi GL(n,R)$ — центр групи $GL(n,R)$. У роботі доведено, що над комутативними кільцямиR і K з 1 ендоморфізми $\Lambda : PG \to PH$, де $E(n,R) \subseteq G \subseteq GL(n,R)$, $n \geq 3$, $E(m,K) \subseteq H \subseteq GL(m,K)$, $m \geq 3$ є стандартними (при $n = m = 3$ в розширеному змісті).

Зокрема, якщо R — комутативне кільце з 1 і Λ — автоморфізм групи PG, $E(n,R) \subseteq G \subseteq GL(n,R)$, $n \geq 3$, то Λ індукує автоморфізм групи $PE(n,R)$, який є стандартним у розширеному змісті і продовжується до автоморфізму групи PG . Тому, з точністю до стандартних автоморфізмів, можна вважати, що автоморфізм Λ є тотожним на групі $PE(n,R)$. Як і вище доводиться, що Λ — гомотетія. Це означає, що автоморфізм Λ є тотожним на групі PG.

Зрозуміло, що ці міркування придатні для випадку, коли $E(n,R) \triangleleft G \subseteq GL(n,R)$, $n \geq 2$ і Λ — автоморфізм групи PG , який тотожний на групі $PE(n,R)$ над довільним асоціативним кільцем R з 1. Як і вище, тоді Λ — тотожний автоморфізм на всій групі PG . Інформацію про кільця R, для яких група $E(n,R)$ є нормальною підгрупою в групі $GL(n,R)$, можна знайти в [22], [23], [24].

Однак, розраховувати на те, що з тотожності автоморфізму Λ групи PG, $E(n,R) \subseteq G \subseteq GL(n,R)$ на підгрупі $PE(n,R)$ випливає тотожність автоморфізму Λ групи PG над довільним асоціативним кільцем R з 1, не доводиться. Адже як випливає із роботи Герасімова В.М. [25] існують асоціативні кільця R з 1 над якими група $E(n,R)$ не є нормальною підгрупою групи $GL(n,R)$ і існують нетотожні автоморфізми групи $PGL(n,R)$, які тотожні на всій групі $PE(n,R)$.

Проте клас асоціативних кілець R з 1 для яких з тотожності автоморфізмів групи PG , $E(n,R) \subseteq G \subseteq GL(n,R)$ на підгрупі $PE(n,R)$ випливає їхня тотожність на всій групі PG , досить широкий. Як випливає із робіт І.З.Голубчика і А.В.Міхальова [26], І.З.Голубчика [12] це вірно, якщо R є PI -кільцем або R є двостороннім порядком у регулярному в змісті Ноймана кільці.

Список використаної літератури

1. *Петечук В.М., Петечук Ю.В.* Гомоморфизмы матричных групп над ассоциативными кольцами. Часть I // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ. – 2014. – Вип. 26. №2 – С. 152–171.
2. *Петечук В.М., Петечук Ю.В.* Гомоморфизмы матричных групп над ассоциативными кольцами. Часть II // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ. – 2015. – Вип. №1 (26). – С. 99–114.

3. *J.Tits.* Homomorphismes et automorphismes "abstracts"de groupes algebriques et arithmetiques // Actes. Congres intern. Math. – 1970. – Tom 2. – p.349–355. (Русский перевод в кн.: Автоморфизмы классических групп. – Мир. – 1976. – с.218–225).
4. *Steinberg R.* Lectures of Chevalley groups // New Haven: Yale Unib. Math. Dept. 1968 (Русский перевод: Стейнберг Р. Лекции о группах Шевалле. М.: Мир, 1975).
5. *Humphress T.F.* On the automorphisms of infinite Chevalley groups // Canad. T. Math. – 1969. – vol. 21. p. 908–911.
6. *Абе Э.* Автоморфизмы групп Шевалье над коммутативными кольцами//Алгебра и анализ. //1993. -Т.5. -вып. -2. – С. 74–90.
7. *Bunina E. I.* Automorphisms of Chevalley groups of different types over commutative rings // J. Algebra. – 2012. – Vol. 355, no. 1. – P. 154-170.
8. *V.M. Petechuk.* The isomorphisms of linear groups over division rings // lviv. Abstracts of the XIX All-Union Algebraic Conference. – 1987. p. 220–221.
9. *H. Ren, Z. Wan and X. Wu.* Automorphisms and isomorphisms of linear groups over skew fields // Proceedins of Symposia in Pure Mathematics. – 1987. – vol. 47. p. 473–476.
10. *V.M. Petechuk.* Isomorphisms between linear groups over division rings // Can. I. Math. 1993. vol. 45 (5). p. 997–1008.
11. *Голубчик И.З., Михалев А.В.* Изоморфизмы полной линейной группы над ассоциативным кольцом // Вестн.Моск.у-та.Сер.1.Матем., мех. – 1983. – №3. – с. 61–72.
12. *Петечук В. М.* Стабильность колец //Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ. – 2009. – Вип. 19. – С. 87–111. – arXiv 1003.2301.
13. *Hahn A. J., O'Meara O. T.* The Classical Groups and K-Theory. – Berlin: Springer,1989.
14. *Bunina E. I.* Automorphisms of Chevalley groups of different types over commutative rings // J. Algebra. – 2012. – Vol. 355, no. 1. – P. 154–170.
15. *Петечук В.М.* Автоморфизмы матричных групп над коммутативными кольцами // Мат. сб. – 1982. – №.4. – С. 539–547.
16. *Hahn A. J., O'Meara O. T.* The Classical Groups and K-Theory. – Berlin: Springer, 1989.
17. *W.C. Waterhouse.* Automorphisms of $GL\,(n,R)$ // Proc. Amer. Soc. – 1980. vol. 79. p. 347–351.
18. *Golubchik I.Z.* Isomorphism of the General Linear Group $\mathrm{GL_n}(R)$, $n \geq 4$ over on associative Ring // Contemporary Mathematics. – 1992. – Vol. 131. – Part 1. – P.123–136.
19. *Петечук В. М.* Автоморфизмы групп $SL_3\,(K)$, $GL_3\,(K)$ // Мат. заметки. – 1982. – Т. 31, № 5. – С. 657–668.
20. *Суслин А.А.* О структуре специальной линейной группы над кольцом многочленов // Изв. АН СРСР. Серия. матем. // – 1977. – Т.41. – N.2. С. 235–252.
21. *Петечук В.М.* Гомоморфизмы линейных групп над коммутативными кольцами // Математические заметки. – 1989. – Т.46. – В.5. – С. 50–61.
22. *Петечук В. М.* Стабильность колец //Научн. вестник Ужгород. ун-та. Серия. матем. и информ. – 2009. – Вып. 19. – С. 87–111. – arxiv 1003.2301.
23. *Боревич З.И., Вавилов Н.А.* Размещение подгрупп в полной линейной группе над коммутативним кольцом // Тр. МИАН СРСР // – 1984. – Т.165. – С. 24–42.
24. *Голубчик І.З.* О подгруппах полной линейной группы $GL\,(n,R)$ над ассоциативным кольцом R// УМН. – 1984. – Т.39. – №1. – С. 125–126.
25. *Герасимов В.Н.* Група единиц свободного произведения колец //Матем. сб. – 1987. – Т. 134. – №1. – С. 42–65.
26. *Голубчик И.З., Михалев А.В.* О группе элементарных матриц над Pi-кольцами // Иссл. по алгебре. Тбилиси. – 1985. – С. 20–24.

Одержано 15.05.2016