

УДК 519.21

**Л. О. Сінельник, Г. М. Торбін** (Нац. пед. ун-т ім. М. П. Драгоманова)

## СИНГУЛЯРНІСТЬ НЕСКІНЧЕННИХ ЗГОРТОК БЕРНУЛЛІ, ПОРОДЖЕНИХ ЧИСЛАМИ ПІЗО

The paper is devoted to study asymptotic properties of the Fourier-Stieltjes transforms (characteristic functions)  $f_\xi(t)$  of infinite Bernoulli convolutions, i.e. distributions of random variables of the the following type  $\xi = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k a_k$  where  $\{\xi_k\}$  is a sequence of independent random variables taking values -1 and 1 with probabilities  $p_{0k}$  and  $p_{1k}$  respectively;  $\{a_k\}$  is a sequence of real numbers such that the series  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  converges absolutely. We study the family of distributions, which are generated by series  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  such that  $a_k = \lambda^k l_k$ , where  $\{l_k\}$  is a sequence of positive integers, and  $\alpha = \frac{1}{\lambda}$  is a Pisot number. As the main result of the paper we prove the singularity (w.r.t. Lebesgue measure) and non-Reichmann-property ( $L_\xi := \overline{\lim}_{|t| \rightarrow \infty} |f_\xi(t)| > 0$ ) for the family (it is of continuum cardinality) of infinite Bernoulli convolutions generated by the above mentioned sequences.

Робота присвячена дослідження асимптотики перетворення Фур'є-Стілт'єса (характеристичної функції)  $f_\xi(t)$  нескінченних згорток Бернуллі, тобто розподілів випадкових величин виду  $\xi = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k a_k$  де  $\{\xi_k\}$  — послідовність незалежних випадкових величин, які набувають значень -1 та 1 з ймовірностями  $p_{0k}$  та  $p_{1k}$  відповідно;  $\{a_k\}$  — послідовність дійсних чисел таких, що ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  абсолютно збігається. Досліджено сімейство, що породжується рядами  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  такими, що  $a_k = \lambda^k l_k$ , де  $\{l_k\}$  — довільна послідовність натуральних чисел, а  $\alpha = \frac{1}{\lambda}$  — число Пізо. Основним результатом роботи є доведення сингулярності (відносно міри Лебега) та нерайхмановості ( $L_\xi := \overline{\lim}_{|t| \rightarrow \infty} |f_\xi(t)| > 0$ ) для континуального сімейства нескінченних згорток Бернуллі, породжених вказаними послідовностями.

**1. Вступ.** Розглянемо розподіл випадкової величини

$$\xi = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k a_k \quad (1)$$

де  $\{\xi_k\}$  — послідовність незалежних випадкових величин, які набувають значень -1 та 1 з ймовірностями  $p_{0k}$  та  $p_{1k}$  відповідно;  $\{a_k\}$  — послідовність дійсних чисел таких, що ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  абсолютно збігається. Функція розподілу такої випадкової величини називається нескінченною згорткою Бернуллі. З теореми Джессена-Вінтнера [1] випливає, що випадкова величина  $\xi$  має чистий розподіл (чисто дискретний, чисто абсолютно неперервний (відносно міри Лебега) або чисто сингулярно неперервний). Теорема П.Леві [2] дає необхідні і достатні умови дискретності: міра  $\mu_\xi$  дискретна тоді і тільки тоді, коли  $\prod_{k=1}^{\infty} \max\{p_{0k}, p_{1k}\} > 0$ .

У симетричному випадку  $p_{0k} = p_{1k} = \frac{1}{2}$ , коли  $a_k = \lambda^k$ , де  $\lambda \in (0, 1)$  тип розподілу випадкової величини в залежності від  $\lambda$  інтенсивно досліджується вже понад 80 років (див., наприклад, [3–6, 8–11]). При  $\lambda \in (0, \frac{1}{2})$  спектр  $S_\xi$  — ніде не щільна множина нульової міри Лебега, і тому ймовірнісна міра  $\mu_\xi$  має

сингулярний розподіл канторівського типу. Якщо  $\lambda = \frac{1}{2}$ , то ймовірнісна міра  $\mu_\xi$  має абсолютно неперервний розподіл.

Якщо  $\lambda \in (\frac{1}{2}, 1)$ , то структура розподілу випадкової величини  $\xi$  є значно складнішою. Спектром  $S_\xi$  у цьому випадку буде відрізок  $[\frac{-\lambda}{1-\lambda}, \frac{\lambda}{1-\lambda}]$ . Тому деякий час існувала гіпотеза про абсолютно неперервність ймовірнісної міри  $\mu_\xi$ . Користуючись методом характеристичних функцій, П.Ердеш довів [3], що для тих значень  $\lambda \in (\frac{1}{2}, 1)$ , при яких  $\frac{1}{\lambda}$  є числом Пізо (нагадаємо, що дійсне алгебраїчне число  $\alpha > 1$  називається числом Пізо (або числом Пізо-Віджаярагхавана, або PV-числом), якщо всі алгебраїчно спряжені з ним числа за модулем строго менші одиниці), має місце нерівність  $L_\xi := \lim_{|t| \rightarrow \infty} |f_\xi(t)| > 0$ , де  $f_\xi(t)$  – характеристична функція випадкової величини  $\xi$  (перетворення Фур'є-Стільт'єса відповідної ймовірнісної міри  $\mu_\xi$ ). Отже, випадкова величина  $\xi$  має сингулярний розподіл. На сьогоднішній день невідомі приклади інших значень  $\lambda \in (\frac{1}{2}, 1)$  при яких ймовірнісна міра  $\mu_\xi$  є сингулярною (більш того, у 1995 році Борис Солом'як [9, 10] довів одну з широковідомих гіпотез Ердеша про те, що для майже всіх (в сенсі міри Лебега) чисел  $\lambda \in (\frac{1}{2}, 1)$  відповідна нескінченна згортка Бернуллі буде мати абсолютно неперервний розподіл). Основною причиною проблем, які виникають при дослідженні структури таких мір є той факт, що при  $\lambda \in (\frac{1}{2}, 1)$  нескінченні згортки Бернуллі, хоч і мають самоподібні розподіли, але належать до мір з суттєвими перекриттями (майже всі (в сенсі міри Лебега) точки спектра мають континуальну кількість зображень у вигляді  $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k a_k$ , де  $\alpha_k \in \{-1, 1\}$ ).

У даній статті для загального випадку незалежності випадкових величин  $\xi_k$  досліджуються асимптотичні властивості характеристичних функцій нескінченних згорток Бернуллі при  $a_k = \lambda^k \cdot l_k$ , де  $\{l_k\}$  – деяка послідовність натуральних чисел, а  $\frac{1}{\lambda}$  є числом Пізо (у цьому випадку досліджувані розподіли  $\mu_\xi$  не є, взагалі кажучи, самоподібними). Основним результатом роботи є повне дослідження лебегівської структури розподілу випадкової величини  $\xi$  і доведення сингулярності та нерайхмановості ( $L_\xi > 0$ ) для континуального сімейства нескінченних згорток Бернуллі, породжених вказаними послідовностями.

**2. Про сингулярність нескінченних згорток Бернуллі, породжених PV-числами.** Як відомо, характеристичні функції є потужним інструментом вивчення властивостей ймовірнісних розподілів. Зокрема, за асимптотичними властивостями модуля характеристичної функції можна судити про тип функції розподілу. Відомо [12], що будь-яка функція розподілу може бути єдиним чином представлена у виді:

$$F_\xi(x) = \alpha_1 F_d(x) + \alpha_2 F_{ac}(x) + \alpha_3 F_{as}(x), \quad (2)$$

де  $F_d(x)$  – дискретна,  $F_{ac}(x)$  – абсолютно неперервна,  $F_{as}(x)$  – сингулярно неперервна функції розподілу,  $\alpha_i \geq 0$ ,  $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$ . Функція розподілу називається чистою, якщо один із коефіцієнтів в розкладі (2) дорівнює 1.

Нехай  $L_\xi := \lim_{|t| \rightarrow \infty} |f_\xi(t)|$ . Відомо [12], що у випадку коли  $f_\xi(t)$  є характеристичною функцією чисто дискретного розподілу ( $\alpha_1 = 1$ ), то  $L_\xi = 1$ . Якщо  $f_\xi(t)$  відповідає деякому абсолютно неперервному розподілу ( $\alpha_2 = 1$ ), то  $L_\xi = 0$ . Якщо  $f_\xi(t)$  – характеристична функція сингулярного розподілу ( $\alpha_3 = 1$ ), тоді величина  $L_\xi$  може бути будь-яким числом між 0 і 1.

Розглянемо розподіл випадкової величини  $\xi = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k a_k$ , де  $\{\xi_k\}$  – послідовність незалежних випадкових величин, які набувають значень -1 і 1, з ймовірностями  $p_{0k}$  і  $p_{1k}$  відповідно;  $a_k = \lambda^k l_k$ , де  $\{l_k\}$  – довільна послідовність натуральних чисел.

**Теорема 1.** Якщо  $\{l_k\}$  – обмежена послідовність натуральних чисел, а  $\frac{1}{\lambda}$  –  $PV$ -число, то ймовірнісна міра  $\mu_\xi$  сингулярно (відносно міри Лебега) розподілена і  $L_\xi > 0$ . При цьому  $\mu_\xi$  є чисто дискретною тоді і тільки тоді, коли

$$\prod_{k=1}^{\infty} \max\{p_{0k}, p_{1k}\} > 0$$

і сингулярно неперервною, якщо останній нескінчений добуток розбігається до нуля.

**Доведення.** Розглянемо характеристичну функцію випадкової величини  $\xi = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k a_k$ . Неважко показати (див., наприклад, [11]), що для характеристичної функції даної випадкової величини справедлива рівність:

$$|f_\xi(t)| = \prod_{k=1}^{\infty} \sqrt{1 - 4p_{0k}p_{1k} \sin^2(a_k t)}.$$

Тоді

$$|f_\xi(t)| \geq \prod_{k=1}^{\infty} (1 - 4p_{0k}p_{1k} \sin^2(a_k t)) \geq \prod_{k=1}^{\infty} (1 - \sin^2(a_k t)) = \prod_{k=1}^{\infty} \cos^2(a_k t).$$

Оскільки  $\{l_k\}$  – обмежена послідовність натуральних чисел, то існує таке  $M > 0$ , що  $l_k \leq M$ ,  $\forall k \in N$ . Нехай  $s_0$  – найменше натуральне число, для якого:

$$M \cdot \lambda^{s_0} < \frac{1}{10}. \quad (3)$$

Виберемо послідовність  $t_n = \left(\frac{1}{\lambda}\right)^n \pi$ . Тоді

$$\begin{aligned} |f_\xi(t_n)| &\geq \prod_{k=1}^{\infty} \cos^2 \left( \lambda^k l_k \cdot \frac{\pi}{\lambda^n} \right) = \\ &= \cos^2 \left( \frac{\pi}{\lambda^n} \cdot \lambda l_1 \right) \cos^2 \left( \frac{\pi}{\lambda^n} \cdot \lambda^2 l_2 \right) \cdot \dots \cdot \cos^2 \left( \frac{\pi}{\lambda^n} \cdot \lambda^n l_n \right) \cdot \dots = \\ &= \cos^2 \left( \frac{\pi}{\lambda^{n-1}} \cdot l_1 \right) \cos^2 \left( \frac{\pi}{\lambda^{n-2}} \cdot l_2 \right) \cdot \dots \cdot \cos^2 \left( \frac{\pi}{\lambda} \cdot l_{n-1} \right) \cos^2(\pi l_n) \cdot \\ &\quad \cdot \cos^2(\pi \lambda l_{n+1}) \cos^2(\pi \lambda^2 l_{n+2}) \cdot \dots \cdot \cos^2(\pi \lambda^{s_0} l_{n+s_0}) \cdot \\ &\quad \cdot \cos^2(\pi \lambda^{s_0+1} l_{n+s_0+1}) \cos^2(\pi \lambda^{s_0+2} l_{n+s_0+2}) \cdot \dots \cdot \cos^2(\pi \lambda^{s_0+k} l_{n+s_0+k}) \dots = \\ &= A(n, \lambda) \cdot B(n, \lambda) \cdot C(n, \lambda), \end{aligned}$$

де

$$A(n, \lambda) = \cos^2 \left( \frac{\pi}{\lambda^{n-1}} \cdot l_1 \right) \cos^2 \left( \frac{\pi}{\lambda^{n-2}} \cdot l_2 \right) \cdot \dots \cdot \cos^2 \left( \frac{\pi}{\lambda} \cdot l_{n-1} \right) \cos^2(\pi l_n),$$

$$B(n, \lambda) = \cos^2(\pi \lambda l_{n+1}) \cos^2(\pi \lambda^2 l_{n+2}) \cdot \dots \cdot \cos^2(\pi \lambda^{s_0} l_{n+s_0}),$$

$$C(n, \lambda) = \cos^2(\pi \lambda^{s_0+1} l_{n+s_0+1}) \cos^2(\pi \lambda^{s_0+2} l_{n+s_0+2}) \cdot \dots \cdot \cos^2(\pi \lambda^{s_0+k} l_{n+s_0+k}) \dots$$

Розглянемо нескінчений добуток  $C(\lambda)$ :

$$C(n, \lambda) = \prod_{k=1}^{\infty} \cos^2(\pi \cdot l_{n+s_0+k} \cdot \lambda^{s_0+k}) \geq \prod_{k=1}^{\infty} \cos^2\left(\frac{\pi}{10} \lambda^k\right) \geq \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \left(\frac{\pi}{10} \lambda^k\right)^2\right) > 0,$$

оскільки збігається ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\pi}{10} \lambda^k\right)^2 < \infty$ .

Отже,  $C(n, \lambda) \geq c_0 > 0$ , де  $c_0 = \text{const}$ .

Розглянемо добуток  $B(n, \lambda)$ . Він має скінченну кількість ( $s_0$ ) множників. Тому  $B(n, \lambda) > 0$ , тоді і коли серед його множників відсутні нулі, що рівносильно умові

$$l_{n+k} \cdot \lambda^k \notin \left\{ \frac{p}{2}, \quad p = 2m + 1, \quad m \in N \right\}, \quad \forall k \in \{1, 2, \dots, s_0 - 1\}.$$

Покажемо, що  $l_{n+k} \cdot \lambda^k \neq \frac{p}{2}$ , де  $p = 2m + 1$ ,  $m \in N$ ,  $\forall k \in \{1, 2, \dots, s_0 - 1\}$ .

Припустимо, що  $\lambda^k = \frac{p}{2l_{n+k}}$  для деякого  $k$ . Тобто що  $\alpha^k = \frac{2l_{n+k}}{p}$ ,  $p = 2m + 1$ ,  $m \in N$ , (оскільки  $\lambda = \frac{1}{\alpha}$ , де  $\alpha$  – число Пізо). Тоді

$$|\alpha| = \sqrt[k]{\frac{2l_{n+k}}{p}}.$$

Можливі два випадки:  $|\alpha| > 1$  або  $|\alpha| \leq 1$ .

Якщо припустити, що  $|\alpha| = \sqrt[k]{\frac{2l_{n+k}}{p}} \leq 1$ , то отримуємо суперечність з означенням числа Пізо (за означенням, число Пізо більше одиниці).

Розглянемо випадок, коли  $|\alpha| > 1$ . Тоді,  $\alpha$  – корінь рівняння  $x^k p = 2l_{n+k}$ . Але всі корені такого рівняння лежатимуть на колі радіуса  $\sqrt[k]{\frac{2l_{n+k}}{p}}$ . Це означає, що всі спряжені числа алгебраїчного числа  $\alpha$  за модулем будуть більші за 1, що суперечить тому, що  $\alpha$  – число Пізо.

Таким чином,  $l_{n+k} \cdot \lambda^k \notin \left\{ \frac{p}{2}, \quad p = 2m + 1, \quad m \in Z \right\}, \quad \forall k \in \{1, 2, \dots, s_0 - 1\}$  і серед множників добутку  $B(n, \lambda)$  немає жодного нуля. Покажемо тепер, що  $B(n, \lambda)$  відокремлений від нуля деякою константою, що не залежить від  $n$ .

Оскільки  $\{l_n\}$  – обмежена послідовність ( $l_k \leq M$ ), то значення виразу  $l_{n+k} \cdot \lambda^k$  належить множині

$$\begin{aligned} &\{1 \cdot \lambda, 1 \cdot \lambda^2, 1 \cdot \lambda^3, \dots, 1 \cdot \lambda^{s_0}, \\ &2 \cdot \lambda, 2 \cdot \lambda^2, 2 \cdot \lambda^3, \dots, 2 \cdot \lambda^{s_0}, \end{aligned}$$

.....

$$M \cdot \lambda, M \cdot \lambda^2, M \cdot \lambda^3, \dots, M \cdot \lambda^{s_0}\}.$$

Як було показано вище,

$$l_{n+k} \cdot \lambda^k \notin \left\{ \frac{p}{2}, \quad p = 2m + 1, \quad m \in Z \right\}.$$

Розглянемо наступний добуток:

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= \cos^2(1 \cdot \lambda\pi) \cos^2(1 \cdot \lambda^2\pi) \cos^2(1 \cdot \lambda^3\pi) \cdots \cos^2(1 \cdot \lambda^{s_0}\pi) \cdot \\ &\quad \cdot \cos^2(2 \cdot \lambda\pi) \cos^2(2 \cdot \lambda^2\pi) \cos^2(2 \cdot \lambda^3\pi) \cdots \cos^2(2 \cdot \lambda^{s_0}\pi) \cdots \\ &\quad \cdot \cos^2(M \cdot \lambda\pi) \cos^2(M \cdot \lambda^2\pi) \cos^2(M \cdot \lambda^3\pi) \cdots \cos^2(M \cdot \lambda^{s_0}\pi). \end{aligned}$$

З проведених вище міркувань випливає, що такий добуток додатній:  $P(\lambda) = b_0 = \text{const}$ , і, очевидно, не залежить від  $n$ .

Оскільки  $B(n, \lambda) \geq P(\lambda)$ , то

$$B(n, \lambda) = \cos^2(\pi\lambda l_{n+1}) \cos^2(\pi\lambda^2 l_{n+2}) \cdots \cos^2(\pi\lambda^{s_0} l_{n+s_0}) \geq b_0 > 0.$$

Розглянемо добуток  $A(n, \lambda)$ :

$$\begin{aligned} A(n, \lambda) &= \cos^2\left(\frac{\pi}{\lambda^{n-1}} \cdot l_1\right) \cdot \cos^2\left(\frac{\pi}{\lambda^{n-2}} \cdot l_2\right) \cdots \cos^2\left(\frac{\pi}{\lambda} \cdot l_{n-1}\right) \cdot \cos^2(\pi \cdot l_n) = \\ &= \cos^2(\pi \cdot \alpha^{n-1} l_1) \cos^2(\pi \cdot \alpha^{n-2} l_2) \cdots \cos^2(\pi \cdot \alpha l_{n-1}) \cdot 1. \end{aligned}$$

Оскільки  $\alpha \in \text{PV-числом}$ , то існує така константа  $\theta = \theta(\alpha) \in (0, 1)$ , що  $\rho(\alpha^n, N) \leq \theta^n, \forall n \in N$ , тобто  $|z_n - \alpha^n| \leq \theta^n$ , де  $z_n$  – найближче до  $\alpha^n$  натуральне число. Тоді

$$\alpha^{n-1} l_1 = (\alpha^{n-1} - z_{n-1} + z_{n-1}) \cdot l_1 = (\alpha^{n-1} - z_{n-1}) \cdot l_1 + z_{n-1} \cdot l_1.$$

Звідси:

$$\cos^2(\pi\alpha^{n-1} \cdot l_1) = \cos^2((\alpha^{n-1} - z_{n-1}) \cdot l_1\pi) \geq \cos^2(\theta^{n-1} \cdot l_1\pi).$$

Аналогічно отримаємо

$$\begin{aligned} \cos^2(\pi\alpha^{n-2} \cdot l_2) &\geq \cos^2(\theta^{n-2} \cdot l_2\pi), \\ &\dots \\ \cos^2(\pi\alpha \cdot l_{n-1}) &\geq \cos^2(\theta \cdot l_{n-1}\pi). \end{aligned}$$

Таким чином:

$$A(n, \lambda) \geq \cos^2(\theta^{n-1} \cdot l_1\pi) \cdot \cos^2(\theta^{n-2} \cdot l_2\pi) \cdots \cos^2(\theta \cdot l_{n-1}\pi).$$

Оскільки  $\{l_k\}$  – обмежена послідовність, то існує таке число  $m_0$ , що для всіх  $k \geq m_0$  і для всіх  $s \in N$ :

$$\theta^k l_s \leq \theta^k \cdot M < \frac{1}{10}.$$

Тоді:

$$A(n, \lambda) \geq \cos^2(\theta^{n-1} \cdot l_1\pi) \cdots \cos^2(\theta^{m_0+1} \cdot l_{n-m_0-1}\pi) \cdot \cos^2(\theta^{m_0} \cdot l_{n-m_0}\pi) \cdots \cos^2(\theta \cdot l_{n-1}\pi)$$

Розглянемо добуток

$$D(n) := \cos^2(\theta^{n-1} \cdot l_1\pi) \cdots \cos^2(\theta^{m_0+1} \cdot l_{n-m_0-1}\pi) \geq$$

$$\begin{aligned} &\geq \cos^2\left(\frac{\pi}{10} \cdot \theta\right) \cos^2\left(\frac{\pi}{10} \cdot \theta^2\right) \cdots \cos^2\left(\frac{\pi}{10} \cdot \theta^{n-m_0-1}\right) \geq \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \sin^2\left(\frac{\pi}{10} \cdot \theta^k\right)\right) \geq \\ &\geq \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \left(\frac{\pi}{10} \cdot \theta^k\right)^2\right) = d_0 > 0, \end{aligned}$$

оскільки ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\pi}{10} \cdot \theta^k\right)^2$  збігається. Таким чином,  $D(n) \geq d_0 > 0$ ,  $\forall n \in N$ .

Розглянемо добуток

$$E(n) := \cos^2(\theta^{m_0} \cdot l_{n-m_0} \pi) \cdots \cos^2(\theta \cdot l_{n-1} \pi).$$

Зауважимо, що якщо існує  $\theta_1 \in (0, 1)$ , яке задовольняє нерівність

$$|z_k - \alpha^k| \leq \theta_1^k, \quad \forall k \in N,$$

то довільне трансцендентне число  $\theta \in (\theta_1, 1)$  буде також задовольняти нерівність:

$$|z_k - \alpha^k| \leq \theta^k, \quad \forall k \in N.$$

Тому, не порушуючи загальності міркувань, ми можемо обрати  $\theta$  трансцендентним числом, і тоді для довільного  $k \in \{1, 2, \dots, m_0\}$  число  $\theta^k \cdot l_{n-k}$  є трансцендентним. Тому серед множників добутку  $E(n)$  немає жодного нульового. Отже,  $E(n) \geq e_0 > 0$ , де  $e_0 = \text{const}$ .

Тоді

$$A(n, \lambda) \geq D(n) \cdot E(n) \geq d_0 \cdot e_0 > 0.$$

Таким чином, ми показали, що:

$$|f_\xi(t_n)| \geq A(n, \lambda) \cdot B(n, \lambda) \cdot C(n, \lambda) \geq d_0 \cdot e_0 \cdot b_0 \cdot c_0 > 0, \quad \forall n \in N.$$

Тому  $\overline{\lim}_{|t| \rightarrow \infty} |f_\xi(t)| \geq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |f_\xi(t_n)| > 0$ , тобто  $L_\xi > 0$ .

З умови  $L_\xi > 0$  випливає, що розподіл випадкової величини  $\xi$  не є абсолютно неперервним. З теореми Джессена-Вінтнера [1] випливає чистота розподілу. Отже, розподіл випадкової величини  $\xi$  є сингулярним відносно міри Лебега. Беручи до уваги теорему P.Lévy [2], приходимо до висновку, що даний розподіл є чисто дискретним тоді і тільки тоді, коли  $\prod_{k=1}^{\infty} \max\{p_{0k}, p_{1k}\} > 0$  і сингулярно неперервним, якщо останній нескінченний добуток розбігається до нуля.

**Подяка.** Ця робота була частково підтримана науково-дослідними проектами STREVCOMS FP-7-IRSES 612669 (ЄС), «Багаторівневий аналіз сингулярних ймовірнісних мір та його застосування» (МОН України) та Alexander von Humboldt Stiftung.

### Список використаної літератури

1. Jessen B., Wintner A. Distribution function and Riemann Zeta-function // Trans. Amer. Math. Soc. –1935. –38. –P. 48-88 .
2. Lévy P. Sur les séries dont les termes sont des variables indépendantes// Studia Math. –1931. –3. –P. 19-155 .
3. Erdos P. On a family of symmetric Bernoulli convolutions// Amer. J. Math. –1939. –61. –P. 974–976.

4. *Garsia A. M.* Arithmetic properties of Bernoulli convolutions.// Trans. Amer. Math. Soc. – 1962. –**102**. –P. 409-432.
5. *Albeverio S., Torbin G.* On fine fractal properties of generalized infinite Bernoulli convolutions// Bull. Sci. Math. –2008. –**132**, №8. – P. 711–727.
6. *Albeverio S., Baranovskyi O., Pratsiovytyi M., Torbin G.* The set of incomplete sums of the first Ostrogradsky series and anomalously fractal probability distributions on it// Rev. Roum. Math. Pures Appl. –2009. –**54**, №2. –P. 85-115.
7. *Гончаренко Я. В., Працьовитий М. В., Торбін Г. М.* Фрактальні властивості деяких згорток Бернуллі // Теорія ймовірностей та математична статистика. –2008. –**79**. –P. 34-49.
8. *Peres Y., Schlag W., Solomyak B.* Sixty years of Bernoulli convolutions// Fractal geometry and Stochastics, II (Greifswald/Koserow, 1998), 39–65, Progr. Probab., 46, Birkhaeuser, Basel, 2000.
9. *Peres Y., Solomyak B.* Absolute continuity of Bernoulli convolutions, a simple proof// Math. Res. Lett. –1996. –**3** №2. – P. 231–239.
10. *Solomyak B.* On the random series  $\sum \pm \lambda(a_n)$  (an Erdos problem)// Ann. of Math. –1995. –**142** №3. –P. 611–625.
11. *Сінельник Л., Торбін Г.* Асимптотичні властивості перетворень Фур'є-Стілт'єса для деяких класів нескінченних згорток Бернуллі// Науковий часопис НПУ імені М.П.Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки –2012. –**13** №2. –С. 229-242.
12. *Лукач Е.* Характеристические функции. – М.: Наука, 1979. – 424 с.

Одержано 30.05.2016