УДК 517.937

С. А. Щоголев, В. В. Джашитова (Одеський нац. ун-т імені І. І. Мечникова)

ПРО СПЕЦІАЛЬНІ КЛАСИ РОЗВ'ЯЗКІВ ЗЛІЧЕННОЇ БЛОЧНО-ДІАГОНАЛЬНОЇ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОЇ СИСТЕМИ

For the countable quasilinear system of the differential equations with the block-diagonal matrix of the coefficients of the linear part the conditions of the existence of the partiqular solution, which are represented by a absolutely and uniformly convergent Fourier-series with slowly varying coefficients and frequency, are obtained.

Для зліченної квазілінійної системи диференціальних рівнянь з блочно-діагональною матрицею коефіцієнтів лінійної частини отримано умови існування частинного розв'язку, зображуваного у вигляді абсолютно та рівномірно збіжних рядів Фур'є з повільно змінними коефіцієнтами та частотою.

Вступ. Зліченні системи диференціальних рівнянь займають помітне місце в сучасній теорії диференціальних рівнянь, та їм присвячено численні дослідження [1, 2]. Як відмічається в монографії [2], зліченні системи диференціальних рівнянь, незважаючи на те, що вони є частинним випадком диференціальних рівнянь у банахових просторах [3, 4] мають низку специфічних властивостей, що приводить до розробки теорії таких рівнянь. Статтю присвячено розповсюдженню на випадок зліченних диференціальних систем результатів [5], щодо існування у цих систем частинних розв'язків, зображуваних абсолютно та рівномірно збіжними рядами Фур'є із повільно змінними коефіцієнтами та частотами в деяких критичних випадках.

1. Основні позначення та означення. Нехай

$$G(\varepsilon_0) = \{t, \varepsilon : \ t \in \mathbf{R}, \ \varepsilon \in [0, \varepsilon_0], \ \varepsilon_0 \in \mathbf{R}^+\}.$$

Означення 1. *Скажемо, що функція $p(t,\varepsilon)$ належить до класу $S(m;\varepsilon_0)$ $(m \in \mathbf{N} \cup \{0\})$, якщо виконано наступні умови*
1) $p : G(\varepsilon_0) \to \mathbf{C}$, 2) $p(t,\varepsilon) \in C^m(G(\varepsilon_0))$ за t;
3) $d^k p(t,\varepsilon)/dt^k = \varepsilon^k p_k^*(t,\varepsilon)$ $(0 \le k \le m)$, причому

$$\|p\|_{S(m,\varepsilon_0)} \stackrel{def}{=} \sum_{k=0}^{m} \sup_{G(\varepsilon_0)} |p_k^*(t,\varepsilon)| < +\infty.$$

Означення 2. *Скажемо, що функція $f(t,\varepsilon,\theta(t,\varepsilon))$ належить до класу $F(m;\varepsilon_0;\theta)$ $(m \in \mathbf{N} \cup \{0\})$, якщо ця функція зображувана у вигляді:*

$$f(t,\varepsilon,\theta(t,\varepsilon)) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n(t,\varepsilon) \exp\left(in\theta(t,\varepsilon)\right),$$

причому
1) $f_n(t,\varepsilon) \in S(m,\varepsilon_0)$ $(n \in \mathbf{Z})$;
2) $\|f\|_{F(m;\varepsilon_0,\theta)} \stackrel{def}{=} \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} \|f_n\|_{S(m;\varepsilon_0)} < +\infty$;
3) $\theta(t,\varepsilon) = \int\limits_0^t \varphi(\tau,\varepsilon)d\tau$, $\varphi \in \mathbf{R}^+$, $\varphi \in S(m,\varepsilon_0)$, $\inf\limits_{G(\varepsilon_0)} \varphi(t,\varepsilon) = \varphi_0 > 0$.

Множина функцій класу $F(m;\varepsilon_0;\theta)$ утворює лінійний простір, який перетворюється на повний нормований простір введенням норми $\|\cdot\|_{F(m;\varepsilon_0;\theta)}$. Має місце ланцюжок включень: $F(0;\varepsilon_0;\theta)\supset F(1;\varepsilon_0;\theta)\supset\ldots\supset F(m;\varepsilon_0;\theta)$.

Нехай задано дві функції класу $F(m;\varepsilon_0;\theta)$:

$$u(t,\varepsilon,\theta)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}u_n(t,\varepsilon)\exp\left(in\theta(t,\varepsilon)\right),\ v(t,\varepsilon,\theta)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}v_n(t,\varepsilon)\exp\left(in\theta(t,\varepsilon)\right).$$

Добуток цих функцій визначимо формулою [6]:

$$(uv)(t,\varepsilon,\theta)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\sum_{s=-\infty}^{\infty}u_{n-s}(t,\varepsilon)v_s(t,\varepsilon)\right)\exp(in\theta(t,\varepsilon)). \tag{1}$$

Очевидно, що $uv\in F(m;\varepsilon_0;\theta)$.

Сформулюємо деякі властивості норми $\|\cdot\|_{F(m;\varepsilon_0;\theta)}$. Нехай $u,v\in F(m;\varepsilon_0;\theta)$, $k=\mathrm{const}$. Тоді:
1) $\|ku\|_{F(m;\varepsilon_0;\theta)}=|k|\cdot\|u\|_{F(m;\varepsilon_0;\theta)}$;
2) $\|u+v\|_{F(m;\varepsilon_0;\theta)}\le\|u\|_{F(m;\varepsilon_0;\theta)}+\|v\|_{F(m;\varepsilon_0;\theta)}$;
3) $\|u\|_{F(m;\varepsilon_0;\theta)}=\sum_{k=0}^{m}\left\|\frac{1}{\varepsilon^k}\frac{\partial^k u}{\partial t^k}\right\|_{F(0;\varepsilon_0;\theta)}$;
4) $\|uv\|_{F(m;\varepsilon_0;\theta)}\le 2^m\|u\|_{F(m;\varepsilon_0;\theta)}\cdot\|v\|_{F(m;\varepsilon_0;\theta)}$.

Дійсно, при $m=0$ згідно з формулою (1) маємо: $\|uv\|_{F(0;\varepsilon_0;\theta)}\le\|u\|_{F(0;\varepsilon_0;\theta)}\cdot\|v\|_{F(0;\varepsilon_0;\theta)}$. Далі, на підставі властивостей 1) – 3):

$$\|uv\|_{F(m;\varepsilon_0;\theta)}=\sum_{k=0}^{m}\left\|\frac{1}{\varepsilon^k}\frac{\partial^k(uv)}{\partial t^k}\right\|_{F(0;\varepsilon_0;\theta)}\le\sum_{k=0}^{m}\frac{1}{\varepsilon^k}\sum_{j=0}^{k}C_k^j\left\|\frac{\partial^j u}{\partial t^j}\right\|_{F(0;\varepsilon_0;\theta)}\cdot\left\|\frac{\partial^{k-j}u}{\partial t^{k-j}}\right\|_{F(0;\varepsilon_0;\theta)}\le$$

$$\le 2^m\left(\sum_{j=0}^{m}\frac{1}{\varepsilon^j}\left\|\frac{\partial^j u}{\partial t^j}\right\|_{F(0;\varepsilon_0;\theta)}\right)\cdot\left(\sum_{j=0}^{m}\frac{1}{\varepsilon^j}\left\|\frac{\partial^j v}{\partial t^j}\right\|_{F(0;\varepsilon_0;\theta)}\right)=2^m\|u\|_{F(m;\varepsilon_0;\theta)}\cdot\|v\|_{F(m;\varepsilon_0;\theta)}.$$

Зокрема, якщо $u\in F(m;\varepsilon_0;\theta)$, то $\forall\ k\in\mathbf{N}$ виконано: $u^k\in F(m;\varepsilon_0;\theta)$, причому

$$\|u^k\|_{F(m;\varepsilon_0;\theta)}\le 2^{m(k-1)}\|u\|^k_{F(m;\varepsilon_0;\theta)}.$$

На підставі властивості 4) можна стверджувати, що простір $F(m;\varepsilon_0;\theta)$ утворює банахову алгебру [7].

Для будь-якої функції $f(t,\varepsilon,\theta)\in F(m;\varepsilon_0;\theta)$ позначимо:

$$\Gamma_n[f]=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(t,\varepsilon,\theta)\exp(-in\theta)d\theta.$$

Означення 3. *Скажемо, що нескінченновимірний вектор* $x(t,\varepsilon)=\mathrm{col}(x_1(t,\varepsilon),x_2(t,\varepsilon),\ldots)$ *належить до класу* $S_1(m;\varepsilon_0)$, *якщо* $x_j\in S(m;\varepsilon_0)$ $(j=1,2,\ldots)$, *причому*

$$\|x\|_{S_1(m;\varepsilon_0)}\stackrel{def}{=}\sup_j\|x_j\|_{S(m;\varepsilon_0)}<+\infty.$$

Означення 4. *Скажемо, що нескінченна матриця* $A(t,\varepsilon) = (a_{jk}(t,\varepsilon))_{j,k=1,2,\ldots}$ *належить до класу* $S_2(m;\varepsilon_0)$, *якщо* $a_{jk} \in S(m;\varepsilon_0)$, *причому*

$$\|A\|_{S_2(m;\varepsilon_0)} \stackrel{def}{=} \sup_j \sum_{k=1}^{\infty} \|a_{jk}\|_{S(m;\varepsilon_0)} < +\infty.$$

Означення 5. *Скажемо, що нескінченновимірний вектор* $x(t,\varepsilon,\theta) = = \mathrm{col}(x_1(t,\varepsilon,\theta), x_2(t,\varepsilon,\theta),\ldots)$ *належить до класу* $F_1(m;\varepsilon_0,\theta)$, *якщо* $x_j \in F(m;\varepsilon_0;\theta)$ $(j=1,2,\ldots)$, *причому* $\|x\|_{F_1(m;\varepsilon_0,\theta)} \stackrel{def}{=} \sup\limits_j \|x_j\|_{F(m;\varepsilon_0,\theta)} < +\infty$.

Означення 6. *Скажемо, що нескінченна матриця* $A(t,\varepsilon,\theta) = (a_{jk}(t,\varepsilon,\theta)_{j,k=1,2,\ldots}$ *належить до класу* $F_2(m;\varepsilon_0,\theta)$, *якщо* $a_{jk} \in F(m;\varepsilon_0,\theta)$, *причому*

$$\|A\|_{F_2(m;\varepsilon_0,\theta)} \stackrel{def}{=} \sup_j \sum_{k=1}^{\infty} \|a_{jk}\|_{F(m;\varepsilon_0,\theta)} < +\infty.$$

Очевидно, що якщо $A \in F_2(m;\varepsilon_0;\theta)$, $x \in F_1(m;\varepsilon_0;\theta)$, то $Ax \in F_1(m;\varepsilon_0;\theta)$, при цьому $\|Ax\|_{F_1(m;\varepsilon_0;\theta)} \le 2^m \|A\|_{F_2(m;\varepsilon_0;\theta)} \cdot \|x\|_{F_1(m;\varepsilon_0;\theta)}$.

Умова $\|A\|_{F_2(m;\varepsilon_0;\theta)} < 1$ забезпечує існування матриці $(E+A)^{-1} = E + + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k A^k$, де $E = \mathrm{diag}(1,1,...)$.

Позначимо $(A)_{jk}$ елемент a_{jk} нескінченної матриці $A = (a_{jk})_{j,k=1,2,\ldots}$.

2. Постановка задачі. Розглядається зліченна система диференціальних рівнянь:

$$\frac{dx}{dt} = A(t,\varepsilon)x + f(t,\varepsilon,\theta) + \mu X(t,\varepsilon,\theta,x), \qquad (2)$$

де $t,\varepsilon \in G(\varepsilon_0)$, $x = \mathrm{col}(x_1,x_2,\ldots) \in D \subset l_1$ (l_1 – простір обмежених числових послідовностей), $f = \mathrm{col}(f_1,f_2,\ldots) \in F_1(m;\varepsilon_0;\theta)$, $A = \mathrm{diag}[A_1,A_2,\ldots]$, $A_j = A_j(t,\varepsilon) = (a_{j,\alpha\beta})_{\alpha,\beta=1,2}$ $(j=1,2,\ldots)$, $a_{j,\alpha\beta} \in S(m;\varepsilon_0)$ $(j=1,2,\ldots;\ \alpha,\beta=1,2)$, причому власні значення матриці $A_j(t,\varepsilon)$ мають вигляд $\pm i\omega_j(t,\varepsilon)$, $\omega_j \in \mathbf{R}^+$ $(j = 1,2,\ldots)$; нескінченновимірна вектор-функція $X = \mathrm{col}(X_1,X_2,\ldots) \in F_1(m;\varepsilon_0;\theta)$ відносно t,ε,θ та неперервна за $x \in D$; параметр $\mu \in (0,\mu_0) \subset \mathbf{R}^+$.

Метою статті є встановлення умов, за яких система (2) має частинний розв'язок $x(t,\varepsilon,\theta,\mu) \in F_1(m_1;\varepsilon_1;\theta)$ $(0 \le m_1 \le m;\ 0 < \varepsilon_1 \le \varepsilon_0)$.

3. Допоміжні результати. Система (2) розглядається за наступними припущеннями.

1^0. $\inf\limits_{G(\varepsilon_0)} |a_{j,12}(t,\varepsilon)| = a_0 > 0$ $(j=1,2,\ldots)$.

2^0. $\sup\limits_j \sup\limits_{G(\varepsilon_0)} \omega_j(t,\varepsilon) = \omega < +\infty$.

3^0. $\forall\, n \in \mathbf{Z}$: $|n| \le (2\omega+1)\varphi_0^{-1}$ виконується

$$\inf_{G(\varepsilon_0)} |k\omega_j(t,\varepsilon) - n\varphi(t,\varepsilon)| \ge \gamma > 0 \quad (k=1,2;\ j=1,2,\ldots). \qquad (3)$$

Зауваження 1. *Для значень* n *таких, що* $|n| > (2\omega+1)\varphi_0^{-1}$ *нерівність (3) виконеться автоматично з константою* $\gamma = 1$.

4^0. Функції X_j $(j=1,2,\ldots)$ мають в D неперервні частинні похідні за $x_1,x_2,...$ до порядку $2q+1$ $(q \in \mathbf{N})$ включно, і, якщо $x_1,x_2,... \in F(m;\varepsilon_0;\theta)$, то всі ці частинні похідні також належать до класу $F(m;\varepsilon_0;\theta)$, причому

$$\sup_j \left\| \frac{\partial^{2q+1} X_j(x_1, x_2, ...)}{\partial x_{k_1}^{q_1} \partial x_{k_2}^{q_2} \cdots \partial x_{k_s}^{q_s}} \right\|_{F(m;\varepsilon_0;\theta)} < +\infty$$

$(q_1 + q_2 + ... + q_s = 2q+1;\ k_1, k_2, ..., k_s \in \mathbf{N})$.

Лема 1. *Нехай зліченна система диференціальних рівнянь*

$$\frac{dx}{dt} = \left(\Lambda(t,\varepsilon) + \sum_{l=1}^{q} B_l(t,\varepsilon,\theta)\mu^l \right) x, \tag{4}$$

де $x = \operatorname{col}(x_1, x_2, ...)$, $\Lambda(t,\varepsilon) = \operatorname{diag}(\lambda_1(t,\varepsilon), \lambda_2(t,\varepsilon), ...)$, $\lambda_j \in S(m;\varepsilon_0)$, $B_l(t,\varepsilon,\theta) \in F_2(m;\varepsilon_0;\theta)$ $(l = \overline{1,q})$, $\mu \in (0,\mu_0) \subset \mathbf{R}^+$, *задовольняє умову:* $\forall\ n \in \mathbf{Z}$, $j \neq k$:

$$\inf_{G(\varepsilon_0)} |\lambda_j(t,\varepsilon) - \lambda_k(t,\varepsilon) - in\varphi(t,\varepsilon)| \geq \gamma_1 > 0,$$

де $\varphi(t,\varepsilon)$ *– функція, що фігурує в означенні класу* $F(m;\varepsilon_0;\theta)$. *Тоді існує* $\mu_1 \in (0,\mu_0)$ *таке, що* $\forall\ \mu \in (0,\mu_1)$ *існує невироджене перетворення*

$$x = \left(E + \sum_{l=1}^{q} \Phi_l(t,\varepsilon,\theta)\mu^l \right) y, \tag{5}$$

де $\Phi_l \in F_2(m;\varepsilon_0;\theta)$ $(l = \overline{1,q})$, *що зводить систему (4) до вигляду*

$$\frac{dy}{dt} = \left(\Lambda(t,\varepsilon) + \sum_{l=1}^{q} U_l(t,\varepsilon)\mu^l + \varepsilon \sum_{l=1}^{q} V_l(t,\varepsilon,\theta)\mu^l + \mu^{q+1} W(t,\varepsilon,\theta,\mu) \right) y, \tag{6}$$

де $U_l(t,\varepsilon)$ *– нескінченні діагональні матриці, елементи яких належать до класу* $S(m;\varepsilon_0)$, $V_l, W \in F_2(m-1;\varepsilon_0;\theta)$ $(l = \overline{1,q})$.

Доведення. Визначимо матриці $\Phi_1, \ldots, \Phi_q$ з наступних рівнянь:

$$\frac{d\Phi_1}{dt} = \Lambda(t,\varepsilon)\Phi_1 - \Phi_1\Lambda(t,\varepsilon) + B_1(t,\varepsilon,\theta) - U_1(t,\varepsilon) - \varepsilon V_1(t,\varepsilon,\theta), \tag{7}$$

$$\frac{d\Phi_s}{dt} = \Lambda(t,\varepsilon)\Phi_s - \Phi_s\Lambda(t,\varepsilon) + B_s(t,\varepsilon,\theta) + \sum_{\nu=1}^{s-1} B_\nu(t,\varepsilon,\theta)\Phi_{s-\nu} -$$

$$- \sum_{\nu=1}^{s-1} \Phi_\nu U_{s-\nu}(t,\varepsilon) - \varepsilon \sum_{\nu=1}^{s-1} \Phi_\nu V_{s-\nu}(t,\varepsilon,\theta) - U_s(t,\varepsilon) - \varepsilon V_s(t,\varepsilon,\theta),\ s = \overline{2,q}. \tag{8}$$

При цьому матриця W визначиться з рівняння:

$$\left(E + \sum_{l=1}^{q} \Phi_l \mu^l \right) W = \sum_{s=0}^{q-1} \left[\sum_{\sigma+\delta=s+q+1} (B_\sigma \Phi_\delta - \Phi_\sigma U_\delta) \right] \mu^s - \varepsilon \sum_{s=0}^{q-1} \left(\sum_{\sigma+\delta=s+q+1} \Phi_\sigma V_\delta \right) \mu^s. \tag{9}$$

Виходячи з рівнянь (7), (8), покладемо:

$$(\Phi_l)_{jj} = \sum_{\substack{n=-\infty \\ (n\neq 0)}}^{\infty} \frac{\Gamma_n((T_l)_{jj})}{in\varphi} \exp(in\theta), \quad (\Phi_l)_{jk} = -\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\Gamma_n((T_l)_{jk})}{\lambda_j - \lambda_k - in\varphi} \exp(in\theta) \quad (j \neq k),$$

$$U_l = \mathrm{diag}[\Gamma_0((T_l)_{11}), \Gamma_0((T_l)_{22}), \ldots],$$

$$(V_l)_{jj} = -\left(\sum_{s=1}^{l-1} \Phi_s V_{l-s}\right)_{jj} - \frac{1}{\varepsilon} \sum_{\substack{n=-\infty \\ (n\neq 0)}}^{\infty} \frac{d}{dt}\left(\frac{\Gamma_n((T_l)_{jj})}{in\varphi}\right) \exp(in\theta),$$

$$(V_l)_{jk} = -\left(\sum_{s=1}^{l-1} \Phi_s V_{l-s}\right)_{jk} + \frac{1}{\varepsilon} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{d}{dt}\left(\frac{\Gamma_n((T_l)_{jk})}{\lambda_j - \lambda_k - in\varphi}\right) \exp(in\theta) \quad (j \neq k),$$

де

$$T_1 = B_1, \quad T_l = B_l + \sum_{s=1}^{l-1} (B_{l-s}\Phi_s - \Phi_s U_{l-s}) \quad (l = \overline{2, q}).$$

Очевидно, що $\Phi_l(t, \varepsilon, \theta) \in F_2(m; \varepsilon_0; \theta)$, $V_l(t, \varepsilon, \theta) \in F_2(m-1; \varepsilon_0; \theta)$ $(l = \overline{1, q})$.
Умова

$$\sum_{l=1}^{q} \|\Phi_l\|_{F_2(m;\varepsilon_0;\theta)} \mu^l < 1,$$

яку, очевидно, виконано для достатньо малих значеннях параметру μ, забезпечує однозначну розв'язність рівняння (9), при цьому $W \in F(m-1; \varepsilon_0; \theta)$.

Лему 1 доведено.

Лема 2. *Нехай система (2) задовольняє умови* $1^0 - 4^0$*. Тоді існує* $\mu_2 \in (0, \mu_0)$ *таке, що* $\forall\ \mu \in (0, \mu_2)$ *існує перетворення вигляду*

$$x = \xi(t, \varepsilon, \theta, \mu) + \Psi(t, \varepsilon, \theta, \mu) y, \tag{10}$$

де $\xi(t, \varepsilon, \theta, \mu) \in F_1(m; \varepsilon_0; \theta)$, $\Psi(t, \varepsilon, \theta, \mu) \in F_2(m; \varepsilon_0; \theta)$, *що зводить систему (2) до вигляду:*

$$\frac{dy}{dt} = \left(\widetilde{\Lambda}(t, \varepsilon) + \sum_{l=1}^{q} K_l(t, \varepsilon)\mu^l\right) y + \varepsilon h(t, \varepsilon, \theta, \mu) + \mu^{2q} r(t, \varepsilon, \theta, \mu) +$$

$$+\varepsilon C(t, \varepsilon, \theta, \mu) y + \mu^{q+1} P(t, \varepsilon, \theta, \mu) y + \mu Y(t, \varepsilon, \theta, y, \mu), \tag{11}$$

де $\widetilde{\Lambda}(t, \varepsilon) = \mathrm{diag}\,[\Lambda_1(t, \varepsilon), \Lambda_2(t, \varepsilon), \ldots]$, $\Lambda_j(t, \varepsilon) = \mathrm{diag}(-i\omega_j(t, \varepsilon), i\omega_j(t, \varepsilon))$ $(j = 1, 2, \ldots)$, $K_l(t, \varepsilon) = \mathrm{diag}(k_{l,1}(t, \varepsilon), k_{l,2}(t, \varepsilon), \ldots) \in S_2(m; \varepsilon_0)$, $h, r \in F_1(m-1; \varepsilon_0; \theta)$, $C, P \in F_2(m-1; \varepsilon_0; \theta)$. *Вектор-функція* Y *належить до класу* $F_1(m; \varepsilon_0; \theta)$ *відносно* (t, ε, θ) *і містить доданки не нижче 2-го порядку відносно компонент вектора* y.

Доведення. Поряд з системою (2) розглянемо допоміжну систему:

$$\varphi(t, \varepsilon) \frac{d\xi}{dt} = A(t, \varepsilon)\xi + f(t, \varepsilon, \theta) + \mu X(t, \varepsilon, \theta, \xi), \tag{12}$$

де t, φ розглядаються як сталі. Коефіцієнти цієї системи є 2π-періодичними функціями змінної θ. Згідно з методом малого параметру Пуанкаре [8] запишемо наближений 2π-періодичний за θ розв'язок системи (12):

$$\xi(t,\varepsilon,\theta,\mu)=\sum_{k=0}^{2q-1}\xi^{(k)}(t,\varepsilon,\theta)\mu^k, \tag{13}$$

де коефіцієнти $\xi^{(k)}$ визначаються з наступного ланцюжка векторних рівнянь:

$$\varphi(t,\varepsilon)\frac{d\xi^{(0)}}{dt}=A(t,\varepsilon)\xi^{(0)}+f(t,\varepsilon,\theta), \tag{14}$$

$$\varphi(t,\varepsilon)\frac{d\xi^{(1)}}{dt}=A(t,\varepsilon)\xi^{(1)}+X(t,\varepsilon,\theta,\xi^{(0)}), \tag{15}$$

$$\varphi(t,\varepsilon)\frac{d\xi^{(2)}}{dt}=A(t,\varepsilon)\xi^{(2)}+\frac{\partial X(t,\varepsilon,\theta,\xi^{(0)})}{\partial x}\,\xi^{(1)}, \tag{16}$$

$$\varphi(t,\varepsilon)\frac{d\xi^{(s)}}{dt}=A(t,\varepsilon)\xi^{(s)}+\frac{\partial X(t,\varepsilon,\theta,\xi^{(0)})}{\partial x}\,\xi^{(s-1)}+\widetilde{F}(t,\varepsilon,\theta,\xi^{(0)},\ldots,\xi^{(s-2)}),\ s=\overline{3,2q-1}, \tag{17}$$

де

$$\frac{\partial X(t,\varepsilon,\theta,x)}{\partial x}=\left(\frac{\partial X_\alpha(t,\varepsilon,\theta,x)}{\partial x_\beta}\right)_{\alpha,\beta=1,2,\ldots}.$$

Компоненти вектор-функції $\widetilde{F}(t,\varepsilon,\theta,\xi^{(0)},\ldots,\xi^{(s-2)})$ є многочленами відносно компонент векторів $\xi^{(0)},\ldots,\xi^{(s-2)}$, причому коефіцієнти цих многочленів є функціями з класу $F(m;\varepsilon_0;\theta)$.

Розглянемо визначник $\Delta_{j,n}(t,\varepsilon)=\det(A_j(t,\varepsilon)-in\varphi(t,\varepsilon)E_2)$, де $E_2=\mathrm{diag}(1,1)$. Легко довести справедливість рівності:

$$\Delta_{j,n}(t,\varepsilon)=(\omega_j(t,\varepsilon)-n\varphi(t,\varepsilon))(\omega_j(t,\varepsilon)+n\varphi(t,\varepsilon)).$$

Звідси внаслідок умови 3^0: $\inf\limits_{G(\varepsilon_0)}|\Delta_{j,n}(t,\varepsilon)|\geq\gamma^2>0 \quad \forall\, n\in\mathbf{Z}$.

Розглянемо породжуюче векторне рівняння (14). Внаслідок структури нескінченної матриці $A(t,\varepsilon)$ і умови 3^0 це рівняння має єдиний 2π-періодичний за θ розв'язок $\xi^{(0)}(t,\varepsilon,\theta)$, і цей розв'язок, очевидно, належить до класу $F_1(m;\varepsilon_0;\theta)$. Підставляючи цей розв'язок в праву частину рівняння (15) внаслідок умов 3^0, 4^0, отримаємо, що й це рівняння має єдиний 2π-періодичний за θ розв'язок $\xi^{(1)}(t,\varepsilon,\theta)$, і цей розв'язок також належить до класу $F_1(m;\varepsilon_0;\theta)$. Аналогічним чином з рівнянь (16), (17) визначимо всі коефіцієнти $\xi^{(2)},\ldots,\xi^{(2q-1)}$ в виразі (13), а, отже, вектор-функцію $\xi(t,\varepsilon,\theta,\mu)$, яка також належатиме до класу $F_1(m;\varepsilon_0;\theta)$.

Здійснимо в системі (2) підстановку:

$$x=\xi(t,\varepsilon,\theta,\mu)+z, \tag{18}$$

де z – нова невідома вектор-функція, для якої одержимо векторне рівняння:

$$\frac{dz}{dt}=A(t,\varepsilon)z+\varepsilon g(t,\varepsilon,\theta,\mu)+\mu^{2q}c(t,\varepsilon,\theta,\mu)+\left(\sum_{l=1}^{q}D_l(t,\varepsilon,\theta)\mu^l\right)z+$$

$$+\mu^{q+1}Q(t,\varepsilon,\theta,\mu)z+\mu Z(t,\varepsilon,\theta,z,\mu), \tag{19}$$

де $g \in F_1(m-1;\varepsilon_0;\theta)$, $c \in F_1(m;\varepsilon_0;\theta)$, $D_l, Q \in F_2(m;\varepsilon_0;\theta)$, вектор-функція Z належить до класу $F_1(m;\varepsilon_0;\theta)$ відносно (t,ε,θ) і містить доданки не нижче 2-го порядку відносно компонент вектора z.

В системі (19) у свою чергу здійснимо підстановку

$$z = H(t,\varepsilon)\widetilde{z}, \tag{20}$$

де $H(t,\varepsilon) = \mathrm{diag}[H_1(t,\varepsilon), H_2(t,\varepsilon),\ldots]$,

$$H_j(t,\varepsilon) = \begin{pmatrix} a_{j,12}(t,\varepsilon) & a_{j,12}(t,\varepsilon) \\ -i\omega_j(t,\varepsilon)-a_{j,11}(t,\varepsilon) & i\omega_j(t,\varepsilon)-a_{j,11}(t,\varepsilon) \end{pmatrix} \quad (j=1,2,\ldots).$$

В силу умов 1^0 – 3^0 леми перетворення (20) буде невиродженим. Для вектора $\widetilde{z}$ дістанемо векторне рівняння:

$$\frac{d\widetilde{z}}{dt} = \widetilde{\Lambda}(t,\varepsilon)\widetilde{z}+\varepsilon\widetilde{A}(t,\varepsilon)\widetilde{z}+\varepsilon\widetilde{g}(t,\varepsilon,\theta,\mu)+\mu^{2q}\widetilde{c}(t,\varepsilon,\theta,\mu)+$$

$$+\left(\sum_{l=1}^{q}\widetilde{D}_l(t,\varepsilon,\theta)\mu^l\right)\widetilde{z}+\mu^{q+1}\widetilde{Q}(t,\varepsilon,\theta,\mu)+\mu\widetilde{Z}(t,\varepsilon,\theta,\widetilde{z},\mu), \tag{21}$$

де $\widetilde{A} \in S_2(m-1;\varepsilon_0)$, $\widetilde{g} \in F_1(m-1;\varepsilon_0;\theta)$, $\widetilde{c} \in F_1(m;\varepsilon;\theta)$, $\widetilde{D}_l, \widetilde{Q} \in F_2(m;\varepsilon_0;\theta)$, вектор-функція $\widetilde{Z}$ належить до класу $F_1(m;\varepsilon_0;\theta)$ відносно (t,ε,θ) і містить доданки не нижче 2-го порядку відносно компонент вектора $\widetilde{z}$.

Тепер на підставі леми 1 за допомогою перетворення вигляду $\widetilde{z} = \Psi(t,\varepsilon,\theta,\mu)y$, де $\Psi \in F_2(m;\varepsilon_0;\theta)$, систему (21) приводимо до вигляду (11).

Лему 2 доведено.

4. Основні результати.

Теорема 1. *Нехай система (11) задовольняє умову: існує $q_0 \in \mathrm{N}$ таке, що $|\mathrm{Re}k_{q_0,j}(t,\varepsilon)| \geq \gamma_0 > 0$, причому для будь-якого $l = \overline{1,q_0-1}$ (якщо $q_0 > 1$) виконано: $\mathrm{Re}k_{l,j}(t,\varepsilon) \equiv 0$ $(j=1,2,\ldots)$. Тоді існують $\mu_3 \in (0,\mu_0)$, $\varepsilon_1(\mu) \in (0,\varepsilon_0)$ такі, що для будь-якого $\mu \in (0,\mu_3)$, $\varepsilon \in (0,\varepsilon_1(\mu))$ система (11) має частинний розв'язок $y(t,\varepsilon,\theta,\mu) \in F_1(m-1;\varepsilon_1(\mu))$.*

Доведення. Здійснимо в системі (11) підстановку:

$$y = \frac{\varepsilon+\mu^{2q}}{\mu^{q_0}}\,\widetilde{y}, \tag{22}$$

де $\widetilde{y}$ – новий невідомий вектор. Дістанемо:

$$\frac{d\widetilde{y}}{dt} = \left(\widetilde{\Lambda}(t,\varepsilon)+\sum_{l=1}^{q}K_l(t,\varepsilon)\mu^l\right)\widetilde{y}+\frac{\varepsilon\mu^{q_0}}{\varepsilon+\mu^{2q}}\,h(t,\varepsilon,\theta,\mu)+\frac{\mu^{2q+q_0}}{\varepsilon+\mu^{2q}}\,r(t,\varepsilon,\theta,\mu)+$$

$$+\varepsilon C(t,\varepsilon,\theta,\mu)\widetilde{y}+\mu^{q+1}P(t,\varepsilon,\theta,\mu)\widetilde{y}+\frac{\varepsilon+\mu^{2q}}{\mu^{q_0-1}}\widetilde{Y}(t,\varepsilon,\theta,\widetilde{y},\mu). \tag{23}$$

Розглянемо відповідну лінійну неоднорідну і діагональну систему:

$$\frac{d\widetilde{y}^{(0)}}{dt} = \left(\widetilde{\Lambda}(t,\varepsilon) + \sum_{l=1}^{q} K_l(t,\varepsilon)\mu^l\right)\widetilde{y}^{(0)} + \frac{\varepsilon\mu^{q_0}}{\varepsilon+\mu^{2q}}\ h(t,\varepsilon,\theta,\mu) + \frac{\mu^{2q+q_0}}{\varepsilon+\mu^{2q}}\ r(t,\varepsilon,\theta,\mu). \tag{24}$$

У роботі [9] було показано, що умови теореми забезпечують існування у системи (24) частинного розв'язку $\widetilde{y}^{(0)}(t,\varepsilon,\theta,\mu) \in F_1(m-1;\varepsilon_0;\theta)$, причому існує $M \in (0,+\infty)$ таке, що:

$$\|\widetilde{y}^{(0)}\|_{F_1(m-1;\varepsilon_0;\theta)} \leq \frac{M}{\gamma_0\mu^{q_0}}\left(\frac{\varepsilon\mu^{q_0}}{\varepsilon+\mu^{2q}}\|h\|_{F_1(m-1;\varepsilon_0;\theta)} + \frac{\mu^{2q+q_0}}{\varepsilon+\mu^{2q}}\|r\|_{F_1(m-1;\varepsilon_0;\theta)}\right) <$$

$$< \frac{M}{\gamma_0}\left(\|h\|_{F_1(m-1;\varepsilon_0;\theta)} + \|r\|_{F_1(m-1;\varepsilon_0;\theta)}\right).$$

Розв'язок з класу $F_1(m-1;\varepsilon_1(\mu);\theta)$ системи (23) шукатимемо методом послідовних наближень, обираючи в ролі початкового наближення $\widetilde{y}^{(0)}$, а подальші наближення визначаючи як розв'язки з класу $F_1(m-1;\varepsilon_0;\theta)$ зліченних лінійних неоднорідних і діагональних систем:

$$\frac{d\widetilde{y}^{(s+1)}}{dt} = \left(\widetilde{\Lambda}(t,\varepsilon) + \sum_{l=1}^{q} K_l(t,\varepsilon)\mu^l\right)\widetilde{y}^{(s+1)} + \frac{\varepsilon\mu^{q_0}}{\varepsilon+\mu^{2q}}\ h(t,\varepsilon,\theta,\mu) + \frac{\mu^{2q+q_0}}{\varepsilon+\mu^{2q}}\ r(t,\varepsilon,\theta,\mu) +$$

$$+\varepsilon C(t,\varepsilon,\theta,\mu)\widetilde{y}^{(s)} + \mu^{q+1}P(t,\varepsilon,\theta,\mu)\widetilde{y}^{(s)} + \frac{\varepsilon+\mu^{2q}}{\mu^{q_0-1}}\widetilde{Y}(t,\varepsilon,\theta,\widetilde{y}^{(s)},\mu),\ s=0,1,2,\ldots \tag{25}$$

Нехай $\Omega = \left\{\ \widetilde{y} \in F_1(m-1;\varepsilon_0;\theta):\ \|\widetilde{y} - \widetilde{y}^{(0)}\|_{F_1(m-1;\varepsilon_0;\theta)} \leq d\ \right\}$.

Внаслідок умови 4^0 існує $L(d) \in (0,+\infty)$ таке, що $\forall\ \widetilde{y}, \widetilde{z} \in \Omega$ виконано:

$$\|\widetilde{Y}(t,\varepsilon,\theta,\widetilde{y},\mu) - \widetilde{Y}(t,\varepsilon,\theta,\widetilde{z},\mu)\|_{F_1(m-1;\varepsilon_0;\theta)} \leq L(d)\|\widetilde{y} - \widetilde{z}\|_{F_1(m-1;\varepsilon_0;\theta)}.$$

Використовуючи звичайну методику принципу стискуючих відображень [7], нескладно показати, що існують $\mu_3 \in (0,\mu_0)$, $N_1 \in (0,+\infty)$ такі, що $\forall\ \mu \in (0,\mu_0)$, $\forall\ \varepsilon \in (0,\varepsilon_1(\mu))$, де $\varepsilon_1(\mu) = N_1\mu^{2q_0-1}$, процес (25) збігається до розв'язку $\widetilde{y}(t,\varepsilon,\theta,\mu) \in F_1(m-1;\varepsilon_1(\mu);\theta)$ системи (23).

Теорему 1 доведено.

Безпосередньо з леми 2 і теореми 1 випливає наступний результат.

Теорема 2. *Нехай система (2) така, шо виконано умови* 1^0 – 4^0, *і система (11), що отримується з системи (2) за допомогою перетворення (10), задовольняє умови теореми 1.*

Тоді існують $\mu_4 \in (0,\mu_0)$, $\varepsilon_2(\mu) \in (0,\varepsilon_0)$ *такі, що* $\forall\ \mu \in (0,\mu_4)$, $\varepsilon \in (0,\varepsilon_2(\mu))$ *система (2) має частинний розв'язок з класу* $F_1(m-1;\varepsilon_1(\mu);\theta)$.

Список використаної літератури

1. *Валеев К. Г., Жаутыков О. А.* Бесконечные системы дифференциальных уравнений. – М.: Из-во иностр. лит., 1962. – 468 с.
2. *Самойленко А. М., Теплинский Ю. В.* Счётные системы дифференциальных уравнений. – К.: ИМ НАН Украины, 1993. - 308 с.

3. *Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. – М.: Наука, 1970. - 536 с.
4. *Массера Х., Шеффер Х.* Линейные дифференциальные уравнения и функциональные пространства. – М.: Мир, 1970. – 456 с.
5. *Костин А. В., Щёголев С. А.* О решениях квазилинейной дифференциальной си-стемы второго порядка, представимых рядами Фурье, содержащими медленно меняющиеся параметры // Укр. матем. журн. – 1998. – Т.50, № 5. – С. 654-664.
6. *Бари Н. К.* Тригонометрические ряды. – М.: Физматгиз,. 1961. – 935 с.
7. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1972. – 496 с.
8. *Малкин И. Г.* Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. – М.: Гостехиздат, 1956. – 491 с.
9. *Костин А. В., Щёголев С. А.* Об устойчивости колебаний,. представимых рядами Фурье с медленно меняющимися параметрами // Дифференц. уравн. – 2008. – Т. 44, № 1. – С. 45 – 51.

Одержано 25.06.2016