УДК 519.8

П. П. Антосяк, Самусь Є. І. (Ужгородський нац. ун-т)

ПРО МЕДІАНУ КЕМЕНІ-СНЕЛЛА ТА КОЕФІЦІЄНТ УЗГОДЖЕНОСТІ ДУМОК ЕКСПЕРТІВ

The problem of determination of strict resulting ranking of alternatives based on the rankings of alternatives which were given by experts is considered. Important here is how consistent the opinions of experts are. The ranking of experts are given in the form of ranking matrixes or directly in the form of rank alternatives. We investigate the validity of the geometric approach to the resulting collective opinion depending on the consistency of the experts' opinions. Consistency of rankings of all members of the expert committee or their parts is estimated by coefficient of concordance. Kemeny-Snell median is considered as the resulting strict ranking of alternatives. The relationship between strict Kemeny-Snell median and consistency coefficient of expert opinion is investigated. Thus the problem of Kemeny-Snell median determining is considered in the equivalent formulation of alternatives linear ordering. The result obtained is inequality, which sets limits of the possible values for the median distance depending on the consistency of experts' opinions. This inequality depends on the largest and the smallest number of the experts who prefer one alternative over another.

Розглядається проблема визначення строгого результуючого ранжування альтернатив на основі ранжувань альтернатив, які задали експерти. Досліджено зв'язок між медіаною Кемені-Снелла та коефіцієнтом узгодженості думок експертів.

Вступ. Важливим при проведенні експертиз є питання узгодженості думок членів експертної комісії. Узгодженість експертів оцінюється за допомогою коефіцієнтів рангової кореляції і конкордації. Коефіцієнти рангової кореляції оцінюють узгодженість ранжувань альтернатив двома експертами, коефіцієнти конкордації - узгодженість ранжувань всіх членів експертної групи або їх частини [1].

У роботі [2] встановлено існування зв'язку між мірою близькості у моделі Кемені-Снелла [3] та коефіцієнтом рангової кореляції за Кенделом.

У даній статті досліджено зв'язок між медіаною Кемені-Снелла та коефіцієнтом узгодженості думок експертів при ранжуванні альтернатив.

1. Постановка задачі. Нехай задано множину альтернатив $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Із кожним строгим ранжуванням r множини альтернатив A пов'язана матриця $R = (r_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$, елементи якої визначаються наступним чином:

$$r_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{якщо} \quad a_i \quad \text{передує} \quad a_j \quad \text{в} \quad R, \\ 0, & \text{якщо} \quad a_j \quad \text{передує} \quad a_i \quad \text{в} \quad R. \end{cases}$$

Якщо ранжування R задано рангами $\{r_1, r_2, \ldots, r_n\}$ альтернатив множини A, то матриця $R = (r_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$, яка відповідає цьому ранжуванню буде мати елементи:

$$r_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{якщо} \quad sign(r_i - r_j) \; < \; 0, \\ 0, & \text{якщо} \quad sign(r_i - r_j) \; > \; 0. \end{cases}$$

Як відомо $[3, 4]$ найбільш обґрунтованим підходом у визначенні результуючого ранжування r^* на основі заданих експертних ранжувань $r^{(1)}, r^{(2)}, \ldots, r^{(m)}$ є «геометричний» підхід та, зокрема, правило Кемені-Снелла:

$$r^* \in Arg \min_{r \in \Omega} \left\{ d(r) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^{m} d(r, r^{(k)}) \right\}, \tag{1}$$

де Ω – множина всіх можливих строгих ранжувань множини альтернатив A, $d(r^{(1)}, r^{(2)})$ – відстань Хемінга [3] між відповідними матрицями ранжувань $r^{(1)}$ та $r^{(2)}$.

Як відмічається у роботі [5], із статистичної точки зору медіана Кемені є найбільш корельованою в середньому з індивідуальними експертними перевагами. В цьому випадку кореляції шукають у вигляді коефіцієнта Кендела. Якщо ж m експертів ($m > 2$) задали ранжування альтернатив за перевагами, то для характеристики степені узгодженості експертів при парному порівнянні альтернатив вводиться коефіцієнт узгодженості V [2]:

$$V = \frac{8 \sum\limits_{i \neq j} C^2_{b_{ij}}}{m(m-1)n(n-1)} - 1, \tag{2}$$

де b_{ij} – число експертів, які віддали перевагу альтернативі a_i у порівнянні з альтернативою a_j, $\ i, j \in 1, 2, \ldots, n$.

Значення V змінюється від 1 при повному співпадінні ранжувань експертів до 0, коли узгодженість оцінок експертів відсутня.

В роботі [5] вказується на зв'язок, який існує між мірою близькості $d(\cdot, \cdot)$ та коефіцієнтами рангової кореляції. Виникає питання: чи існує якась залежність між медіаною Кемені-Снелла та коефіцієнтом узгодженості?

2. Дослідження залежності між медіаною Кемені-Снелла та узгодженістю думок експертів.

Оскільки ми шукаємо строге ранжування за правилом (1), то у матриці, яка буде відповідати ранжуванню r (не беручи до уваги елементи головної діагоналі) знайдеться єдиний рядок з індексом p_1, який буде міститти $(n-1)$ одиницю; далі знайдеться єдиний рядок з індексом p_2, котрий буде містити $(n-2)$ одиниці і т.д. Іншими словами: матриця строгого ранжування однозначно визначає деяку перестановку множини індексів альтернатив і навпаки: всякій перестановці відповідає матриця деякого ранжування. Враховуючи сказане та властивість асиметричності матриці строгого ранжування, зробимо перетворення цільової функції у (1):

$$\begin{gathered}
\sum_{k=1}^{m} d(r, r^{(k)}) = \sum_{k=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |r_{ij} - r^{(k)}_{ij}| = \\
= \sum_{k=1}^{m} \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} (|1 - r_{p_i, p_j}| + |0 - r^{(k)}_{p_j, p_i}|) = \\
= \sum_{k=1}^{m} \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} (1 - r^{(k)}_{p_i p_j} + r^{(k)}_{p_j p_i}) = \sum_{k=1}^{m} \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} (1 - r^{(k)}_{p_i p_j} + 1 - r^{(k)}_{p_j p_i}) = \\
= mn(n-1) - 2 \sum_{j > i} b_{p_i p_j}.
\end{gathered} \tag{3}$$

Позначимо через P множину всіх перестановок множини індексів $\{1, 2, ..., n\}$.

Нехай строгому ранжуванню r^* відповідає перестановка $p^* = (p_1^*, p_2^*, \ldots, p_n^*) \in P$. Отже, цільова функція в (1) набуде мінімуму у r^*, якщо виконається:

$$p^* \in Arg \max_{p \in P} \left\{ \sum_{j>i} b_{p_i p_j} \right\}. \tag{4}$$

Відмітимо, що задача (4) відома як задача лінійного впорядкування [6, 7]. Проведемо еквівалентні перетворення у (2).

$$\sum_{i \neq j} C_{b_{ij}}^2 = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} b_{ij}(b_{ij} - 1).$$

$$\sum_{i \neq j} b_{ij}(b_{ij} - 1) = \sum_{j>i} (b_{ij}(b_{ij} - 1) + (m - b_{ij})(m - b_{ij} - 1)) =$$

$$= \sum_{j>i} (2b_{ij}^2 - 2mb_{ij}) + \sum_{j>i} m(m-1) = \tag{5}$$

$$= 2 \sum_{j>i} b_{ij}(b_{ij} - m) + \tfrac{mn(m-1)(n-1)}{2}.$$

Враховуючи (5), коефіцієнт узгодженості V можна переписати в наступному вигляді:

$$V = \frac{8 \sum\limits_{j>i} b_{ij}(b_{ij} - m)}{m(m-1)n(n-1)} + 1.$$

Введемо в розгляд позначення:

$$M^* = \min_{i,j} \{b_{ij}\},$$

$$M^{**} = \max_{i,j} \{b_{ij}\}.$$

Очевидно, що значення коефіцієнта V не залежить від перестановки індексів. Виберемо перестановку індексів у відповідності до $p^* = (p_1^*, p_2^*, \ldots, p_n^*)$ та проведемо оцінку знизу коефіцієнта узгодженості V.

$$\frac{8 \sum\limits_{j>i} b_{p_i^* p_j^*}(b_{p_i^* p_j^*} - m)}{m(m-1)n(n-1)} \geq \frac{8(M^* - m) \sum\limits_{j>i} b_{p_i^* p_j^*}}{m(m-1)n(n-1)}.$$

Із визначення M^* випливає, що $M^* - m < 0$. Тому в кінцевому результаті отримуємо

$$\frac{(1-V)m(m-1)n(n-1)}{4(m - M^*)} \leq 2 \sum_{j>i} b_{p_i^* p_j^*}. \tag{6}$$

Аналогічним чином оцінимо зверху коефіцієнт узгодженості V.

$$\begin{gathered} \tfrac{8 \sum_{j>i} b_{p_i^* p_j^*}(b_{p_i^* p_j^*} - m)}{m(m-1)n(n-1)} \leq \tfrac{8(M^{**} - m) \sum_{j>i} b_{p_i^* p_j^*}}{m(m-1)n(n-1)}. \\ 2 \sum_{j>i} b_{p_i^* p_j^*} \leq \tfrac{(1-V)m(m-1)n(n-1)}{4(m - M^{**})}. \end{gathered} \tag{7}$$

Підставивши (6) та (7) у (3) та з урахуванням (4) отримуємо наступний результат.

Твердження. Для медіани Кемені-Снелла r^* та коефіцієнта узгодженості V справедлива наступна оцінка:

$$1 - \frac{(1-V)m(m-1)}{4(m-M^{**})} \leq \frac{d(r^*)}{mn(n-1)} \leq 1 - \frac{(1-V)m(m-1)}{4(m-M^*)}.$$

Висновки. Проведено дослідження на предмет існування залежності між коефіцієнтом узгодженості думок експертів та медіаною Кемені-Снелла. Як результат отримано нерівність, яка встановлює межі можливого значення відстані для медіани в залежності від узгодженості думок групи експертів.

Список використаної літератури

1. *Литвак Б. Г.* Экспертная информация: Методы получения и анализа / Б. Г. Литвак. – М.: Радио и связь, 1982. – 184 с.
2. *Kendall M. G.* Rank Correlation Methods / M. G. Kendall. –London: Griffin, 1970. – 272 p.
3. *Волошин О. Ф.* Моделі та методи прийняття рішень / О.Ф. Волошин, С.О. Мащенко. – К.: Видавничо-поліграфічний центр «Київський університет», 2010. – 336 с.
4. *Гуляницкий Л. Ф.* Один подход к формализации и исследованию задач группового выбора / Л. Ф. Гуляницкий, О. В. Волкович, С. А. Малышко // Кибернетика и системный анализ. – 1994. – №1. – С. 120-127.
5. *Кузьмин В. Б.* б измерениях в порядковых шкалах / В. Б. Кузьмин, С. В. Овчинников // Автоматика и телемеханика. – 1974. – Вып. 11. – С. 106-112.
6. *Marti R.* The Linear Ordering Problem / R. Marti, G. Reinelt // Applied Mathematical Sciences. Exact and Heuristic Methods in Combinatorial Optimization Series.– Berlin: Springer Verlag, 2011. – Vol. XII. – 172 p.
7. *Антосяк П. П.* Алгоритм послідовного аналізу та відсіювання варіантів для задачі лінійного впорядкування альтернатив / П. П. Антосяк // Науковий вісник Ужгородського університету. Сер. матем. і інформ.– 2009. – Вип. 18. – С. 4-8.

Одержано 25.05.2016