

УДК 512.643.8

В. М. Бондаренко, М. Ю. Бортош (Інститут математики НАН України)

ОПИС ДЕЯКИХ КАТЕГОРІЙ НЕЗВІДНИХ МАТРИЦЬ МАЛИХ ПОРЯДКІВ НАД ЛОКАЛЬНИМИ КІЛЬЦЯМИ

One describes the categories of irreducible t -monomial matrices of order $n < 7$ over a commutative local ring K with radical $R = tK, R^2 = 0$.

Описуються категорії незвідних t -мономіальних матриць порядку $n < 7$ над комутативним локальним кільцем K з радикалом $R = tK, R^2 = 0$.

1. Вступ. Нехай K — комутативне кільце з одиницею. Під *мономіальною матрицею* $M = (m_{ij})$ над K будемо розуміти квадратну матрицю порядку $n \geq 1$, в кожному рядку і в кожному стовпці якої стоїть рівно один ненульовий елемент. Такій матриці можна природнім чином зіставити незорієнтований граф $\Gamma(M)$ з n вершинами, занумерованими числами $1, \dots, n$, і ребрами $i-j$ для всіх $m_{ij} \neq 0$. Очевидно, що $\Gamma(M)$ є неперетинним об'єднанням циклів. Якщо цикл лише один, то мономіальну матрицю будемо називати *циклічною*. Циклічну матрицю вигляду

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & m_{1n} \\ m_{21} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & m_{n,n-1} & 0 \end{pmatrix} \quad (1)$$

будемо називати *канонічно циклічною*. Зауважимо, що будь-яка циклічна матриця перестановочно подібна канонічно циклічній матриці.

У випадку, коли всі ненульові елементи m_{ij} мономіальної (відповідно циклічної, канонічно циклічної) матриці M мають вигляд $t^{s_{ij}}$ ($t \in K$), де $s_{ij} \geq 0$, матрицю M будемо називати *t -мономіальною* (відповідно *t -циклічною*, *канонічно t -циклічною*); очевидно, що тоді $t^{s_i} \neq 0$ для всіх i .

Найбільш цікавим випадком є, очевидно, випадок, коли t — необоротний елемент.

Стаття присвячена вивченню з категорної точки зору мономіальних матриць малих порядків над комутативними локальними кільцями.

Переходимо до постановки задачі та основних результатів.

Множину всіх матриць порядку n над кільцем K (яка є K -алгеброю) позначимо через $M_n(K)$ і покладемо $M(K) = \cup_{n \in \mathbb{N}} M_n(K)$. Множину $M(K)$ можна розглядати як категорію, якщо для довільних матриць $A, B \in M(K)$ покласти

$$\text{Hom}(A, B) = \{X \in M(K) \mid AX = XB\}.$$

Позначимо цю категорію через $\mathcal{M}(K)$; вона є, очевидно, K -категорією, тобто всі множини морфізмів є K -модулями і множення морфізмів K -білінійне. Повну підкатегорію категорії $\mathcal{M}(K)$ з множиною об'єктів X будемо позначати через $\mathcal{M}(K, X)$.

Нагадаємо, що матриця $M \in M(K)$ називається *звідною*, якщо

$$X^{-1}MX = \begin{pmatrix} N_{11} & N_{12} \\ 0 & N_{22} \end{pmatrix}$$

для деякої оборотної матриці X , і розкладною, якщо

$$Y^{-1}MY = \begin{pmatrix} N_{11} & 0 \\ 0 & N_{22} \end{pmatrix}$$

для деякої оборотної матриці Y (X і Y — матриці над K). В іншому разі M називається відповідно незвідною матрицею і нерозкладною матрицею. Ці означення легко переформулювати в термінах категорії $\mathcal{M}(K)$.

Надалі будемо вважати, що K — комутативне локальне кільце з радикалом $R = tK \neq 0$, $R^2 = 0$.

Введемо такі підмножини в $M_n(K)$: $M_{t,n} = M_{t,n}(K)$, $C_{t,n} = C_{t,n}(K)$ і $C_{t,n}^\circ = C_{t,n}^\circ(K)$ — відповідно множини всіх t -мономіальних, t -циклічних і канонічно t -циклічних матриць; $IRD_{t,n} = IRD_{t,n}(K)$, $Ird_{t,n} = Ird_{t,n}(K)$ і $Ird_{t,n}^\circ = Ird_{t,n}^\circ(K)$ — відповідно множини всіх незвідних матриць із $M_{t,n}$, $C_{t,n}$ і $C_{t,n}^\circ$. Тоді, очевидно, $\mathcal{M}(K, IRD_{t,n}) = \mathcal{M}(K, Ird_{t,n})$ (як підкатегорії в $\mathcal{M}(K)$) і ця категорія еквівалентна своїй підкатегорії $\mathcal{M}(K, Ird_{t,n}^\circ)$ (бо кожний об'єкт першої категорії ізоморфний, і навіть перестановочно ізоморфний, деякому об'єкту другої категорії).

P -остовом категорії $\mathcal{M}(K, X)$ для кожної із вище введених множин X будемо називати повну її підкатегорію, об'єктами якої є представники класів еквівалентності відносно перестановочних ізоморфізмів (із кожного класу по одному представнику); перестановочний ізоморфізм — це 1-мономіальна матриця (див. вище). P -остов не залежить від вибору представників у тому сенсі, що в різних випадках будемо отримувати ізоморфні категорії. P -остов категорії $\mathcal{M}(K, X)$ будемо позначати через $\mathcal{PSM}(K, X)$.

Із результатів роботи [1] та вище введених понять і позначень впливає наступна теорема.

Теорема 1. *Якщо об'єкт категорії $\mathcal{M}(K, C_{t,n})$ незвідний, то число його елементів t взаємно просте з n . У випадку $n < 7$ вірне і обернене твердження.*

Основна ціль цієї статті — опис категорії $\mathcal{M}(K, IRD_{t,n})$ незвідних t -мономіальних матриць порядку $n < 7$ над кільцем K . Під описом категорії мається на увазі опис її об'єктів і морфізмів. Оскільки (як було сказано вище) кожний об'єкт категорії $\mathcal{M}(K, IRD_{t,n})$ перестановочно ізоморфний деякому об'єкту її підкатегорії $\mathcal{M}(K, Ird_{t,n}^\circ)$ (до того ж цей об'єкт, як і відповідний ізоморфізм легко вказати), то достатньо описати категорію $\mathcal{M}(K, Ird_{t,n}^\circ)$. Більш того, по аналогічній причині достатньо описати категорію $\mathcal{PSM}(K, Ird_{t,n}^\circ)$. Саме останню категорію ми і будемо описувати. Випадки $n \leq 4$, $n = 5$ і $n = 6$ розглядаються відповідно в параграфах 3, 4 і 5, а в параграфі 2 буде вказана необхідна і достатня умова перестановочної подібності канонічно циклічних (а значить і канонічно t -циклічних) матриць. Одне зауваження до теореми 1 розглядається в параграфі 6.

2. Перестановочна подібність канонічно циклічних матриць. Нехай x_1, x_2, \dots, x_m — деяка послідовність; (+)-циклічною перестановкою її членів назвемо послідовність вигляду

$$x_i, x_{i+1}, \dots, x_m, x_1, x_2, \dots, x_{i-1},$$

а (–)-циклічною перестановкою — послідовність вигляду

$$x_i, x_{i-1}, \dots, x_1, x_m, x_{m-1}, \dots, x_{i+1}.$$

Очевидно, що добуток двох (+)-циклічних чи (-)-циклічних перестановок є (+)-циклічною перестановкою, а добуток (+)-циклічної і (-)-циклічної перестановок (в довільному порядку) є (-)-циклічною перестановкою.

Дві матриці назвемо (+)-циклічно подібними (відповідно (-)-циклічно подібними), якщо одну із них можна отримати із іншої за допомогою (+)-циклічної (відповідно (-)-циклічної) перестановки її рядків і стовпців.

Має місце наступне просте твердження.

Теорема 2. *Дві канонічно циклічні матриці (над будь-яким кільцем) перестановочно подібні тоді і лише тоді, коли вони (+)-циклічно подібні.*

Якщо взяти довільну канонічно циклічну матрицю і транспоновану до неї, то вони будуть (-)-циклічно подібними.

3. Опис категорії незвідних t -мономіальних матриць порядку $n \leq 4$.

Випадок $n = 1$ очевидний: маємо 2 незвідних об'єкта $A_1 = (1)$, $A_2 = (t)$ і $\text{Hom}(A_1, A_1) = K$, $\text{Hom}(A_2, A_2) = K/R$, $\text{Hom}(A_1, A_2) = \text{Hom}(A_2, A_1) = 0$.

Випадок $n = 2$. Із теорем 1 і 2 випливає, що категорія $\mathcal{PSM}(K, \text{Ird}_{t,2}^\circ)$ має один об'єкт. Будемо вважати, що це матриця

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & t \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Із рівності $A_1 X = X A_1$ або, в розгорнутому вигляді,

$$\begin{pmatrix} 0 & t \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & t \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

маємо $tx_{21} = x_{12}$, $tx_{22} = x_{11}t$, $x_{11} = x_{22}$, $x_{12} = x_{21}t$.

Отже, $\text{Hom}(A_1, A_1)$ складається із усіх матриць вигляду

$$\begin{pmatrix} x_1 & y_1 t \\ y_1 & x_1 \end{pmatrix}.$$

Випадок $n = 3$. Із теорем 1 і 2 випливає, що за об'єкти категорії $\mathcal{PSM}(K, \text{Ird}_{t,3}^\circ)$ можна взяти такі матриці:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & t \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ t & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 \end{pmatrix}.$$

Розглянемо 4 випадки: $A_1 X = X A_1$, $A_2 Y = Y A_2$, $A_1 Z = Z A_2$, $A_2 V = V A_1$, де

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & y_{13} \\ y_{21} & y_{22} & y_{23} \\ y_{31} & y_{32} & y_{33} \end{pmatrix},$$

$$Z = \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} & z_{13} \\ z_{21} & z_{22} & z_{23} \\ z_{31} & z_{32} & z_{33} \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} & v_{13} \\ v_{21} & v_{22} & v_{23} \\ v_{31} & v_{32} & v_{33} \end{pmatrix}.$$

Розглянемо спочатку випадок $A_1 X = X A_1$.

В розгорнутому вигляді ця рівність має наступний вигляд:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & t \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & t \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Звідси

$$\begin{pmatrix} tx_{31} & tx_{32} & tx_{33} \\ x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{12} & x_{13} & x_{11}t \\ x_{22} & x_{23} & x_{21}t \\ x_{32} & x_{33} & x_{31}t \end{pmatrix}.$$

Випишемо відповідні скалярні рівності, позначаючи через (i, j) рівність елементів лівої та правої матриць, що стоять на перетині i -го рядка і j -го стовпця:

$$\begin{aligned} (1, 1) : tx_{31} &= x_{12}, & (1, 2) : tx_{32} &= x_{13}, & (1, 3) : tx_{33} &= x_{11}t; \\ (2, 1) : x_{11} &= x_{22}, & (2, 2) : x_{12} &= x_{23}, & (2, 3) : x_{13} &= x_{21}t; \\ (3, 1) : x_{21} &= x_{32}, & (3, 2) : x_{22} &= x_{33}, & (3, 3) : x_{23} &= x_{31}t. \end{aligned}$$

Отже, матриця X буде мати, як легко бачити, наступний вигляд:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & y_1t & z_1t \\ z_1 & x_1 & y_1t \\ y_1 & z_1 & x_1 \end{pmatrix}.$$

Із усіх матриць такого вигляду і складається множина морфізмів із об'єкта A_1 в себе, тобто

$$\text{Hom}(A_1, A_1) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & y_1t & z_1t \\ z_1 & x_1 & y_1t \\ y_1 & z_1 & x_1 \end{pmatrix} \right\}.$$

По такій схемі розглядаються всі подальші випадки (і не лише цього параграфа).

Розглянемо випадок $A_2Y = YA_2$.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ t & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & y_{13} \\ y_{21} & y_{22} & y_{23} \\ y_{31} & y_{32} & y_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & y_{13} \\ y_{21} & y_{22} & y_{23} \\ y_{31} & y_{32} & y_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ t & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} y_{31} & y_{32} & y_{33} \\ ty_{11} & ty_{12} & ty_{13} \\ ty_{21} & ty_{22} & ty_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{12}t & y_{13}t & y_{11} \\ y_{22}t & y_{23}t & y_{21} \\ y_{32}t & y_{33}t & y_{31} \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} (1, 1) : y_{31} &= y_{12}t, & (1, 2) : y_{32} &= y_{13}t, & (1, 3) : y_{33} &= y_{11}; \\ (2, 1) : ty_{11} &= y_{22}t, & (2, 2) : ty_{12} &= y_{23}t, & (2, 3) : ty_{13} &= y_{21}; \\ (3, 1) : ty_{21} &= y_{32}t, & (3, 2) : ty_{22} &= y_{33}t, & (3, 3) : ty_{23} &= y_{31}. \end{aligned}$$

Отже,

$$\text{Hom}(A_2, A_2) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ z_1t & x_1 + x_2t & y_1 + y_2t \\ y_1t & z_1t & x_1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Розглянемо випадок $A_1Z = ZA_2$.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & t \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} & z_{13} \\ z_{21} & z_{22} & z_{23} \\ z_{31} & z_{32} & z_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} & z_{13} \\ z_{21} & z_{22} & z_{23} \\ z_{31} & z_{32} & z_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ t & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} tz_{31} & tz_{32} & tz_{33} \\ z_{11} & z_{12} & z_{13} \\ z_{21} & z_{22} & z_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_{12}t & z_{13}t & z_{11} \\ z_{22}t & z_{23}t & z_{21} \\ z_{32}t & z_{33}t & z_{31} \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} (1,1) : & \quad tz_{31} = z_{12}t, & (1,2) : & \quad tz_{32} = z_{13}t, & (1,3) : & \quad tz_{33} = z_{11}; \\ (2,1) : & \quad z_{11} = z_{22}t, & (2,2) : & \quad z_{12} = z_{23}t, & (2,3) : & \quad z_{13} = z_{21}; \\ (3,1) : & \quad z_{21} = z_{32}t, & (3,2) : & \quad z_{22} = z_{33}t, & (3,3) : & \quad z_{23} = z_{31}. \end{aligned}$$

Отже,

$$\text{Hom}(A_1, A_2) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y_1t \\ y_1t & z_1t & x_1t \end{pmatrix} \right\}.$$

Розглянемо випадок $A_2V = VA_1$.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ t & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} & v_{13} \\ v_{21} & v_{22} & v_{23} \\ v_{31} & v_{32} & v_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} & v_{13} \\ v_{21} & v_{22} & v_{23} \\ v_{31} & v_{32} & v_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & t \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} v_{31} & v_{32} & v_{33} \\ tv_{11} & tv_{12} & tv_{13} \\ tv_{21} & tv_{22} & tv_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{12} & v_{13} & v_{11}t \\ v_{22} & v_{23} & v_{21}t \\ v_{32} & v_{33} & v_{31}t \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} (1,1) : & \quad v_{31} = v_{12}, & (1,2) : & \quad v_{32} = v_{13}, & (1,3) : & \quad v_{33} = v_{11}t; \\ (2,1) : & \quad tv_{11} = v_{22}, & (2,2) : & \quad tv_{12} = v_{23}, & (2,3) : & \quad tv_{13} = v_{21}t; \\ (3,1) : & \quad tv_{21} = v_{32}, & (3,2) : & \quad tv_{22} = v_{33}, & (3,3) : & \quad tv_{23} = v_{31}t. \end{aligned}$$

Отже,

$$\text{Hom}(A_2, A_1) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1t & y_1t & 0 \\ z_1t & 0 & 0 \\ y_1t & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Випадок $n = 4$. Із теорем 1 і 2 випливає, що за об'єкти категорії $\mathcal{PSM}(K, \text{Ird}_{t,4}^\circ)$ можна взяти такі матриці:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & t \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t & 0 \end{pmatrix}.$$

Розглянемо 4 випадки: $A_1X = XA_1$, $A_2Y = YA_2$, $A_1Z = ZA_2$, $A_2V = VA_1$.
де

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & x_{44} \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & y_{13} & y_{14} \\ y_{21} & y_{22} & y_{23} & y_{24} \\ y_{31} & y_{32} & y_{33} & y_{34} \\ y_{41} & y_{42} & y_{43} & y_{44} \end{pmatrix},$$

$$Z = \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} & z_{13} & z_{14} \\ z_{21} & z_{22} & z_{23} & z_{24} \\ z_{31} & z_{32} & z_{33} & z_{34} \\ z_{41} & z_{42} & z_{43} & z_{44} \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} & v_{13} & v_{14} \\ v_{21} & v_{22} & v_{23} & v_{24} \\ v_{31} & v_{32} & v_{33} & v_{34} \\ v_{41} & v_{42} & v_{43} & v_{44} \end{pmatrix}.$$

Розглянемо спочатку випадок $A_1 X = X A_1$.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & t \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & x_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & x_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & t \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} tx_{41} & tx_{42} & tx_{43} & tx_{44} \\ x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{12} & x_{13} & x_{14} & x_{11}t \\ x_{22} & x_{23} & x_{24} & x_{21}t \\ x_{32} & x_{33} & x_{34} & x_{31}t \\ x_{42} & x_{43} & x_{44} & x_{41}t \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} (1, 1) : tx_{41} &= x_{12}, & (1, 2) : tx_{42} &= x_{13}, & (1, 3) : tx_{43} &= x_{14}, & (1, 4) : tx_{44} &= x_{11}t; \\ (2, 1) : x_{11} &= x_{22}, & (2, 2) : x_{12} &= x_{23}, & (2, 3) : x_{13} &= x_{24}, & (2, 4) : x_{14} &= x_{21}t; \\ (3, 1) : x_{21} &= x_{32}, & (3, 2) : x_{22} &= x_{33}, & (3, 3) : x_{23} &= x_{34}, & (3, 4) : x_{24} &= x_{31}t; \\ (4, 1) : x_{31} &= x_{42}, & (4, 2) : x_{32} &= x_{43}, & (4, 3) : x_{33} &= x_{44}, & (4, 4) : x_{34} &= x_{41}t. \end{aligned}$$

Отже,

$$\text{Hom}(A_1, A_1) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & y_1t & z_1t & u_1t \\ u_1 & x_1 & y_1t & z_1t \\ z_1 & u_1 & x_1 & y_1t \\ y_1 & z_1 & u_1 & x_1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Розглянемо випадок $A_2 Y = Y A_2$.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & y_{13} & y_{14} \\ y_{21} & y_{22} & y_{23} & y_{24} \\ y_{31} & y_{32} & y_{33} & y_{34} \\ y_{41} & y_{42} & y_{43} & y_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & y_{13} & y_{14} \\ y_{21} & y_{22} & y_{23} & y_{24} \\ y_{31} & y_{32} & y_{33} & y_{34} \\ y_{41} & y_{42} & y_{43} & y_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} y_{41} & y_{42} & y_{43} & y_{44} \\ ty_{11} & ty_{12} & ty_{13} & ty_{14} \\ ty_{21} & ty_{22} & ty_{23} & ty_{24} \\ ty_{31} & ty_{32} & ty_{33} & ty_{34} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{12}t & y_{13}t & y_{14}t & y_{11} \\ y_{22}t & y_{23}t & y_{24} & y_{21} \\ y_{32}t & y_{33}t & y_{34}t & y_{31} \\ y_{42}t & y_{43}t & y_{44}t & y_{41} \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} (1, 1) : y_{41} &= y_{12}t, & (1, 2) : y_{42} &= y_{13}t, & (1, 3) : y_{43} &= y_{14}t, & (1, 4) : y_{44} &= y_{11}; \\ (2, 1) : ty_{11} &= y_{22}t, & (2, 2) : ty_{12} &= y_{23}t, & (2, 3) : ty_{13} &= y_{24}t, & (2, 4) : ty_{14} &= y_{21}; \\ (3, 1) : ty_{21} &= y_{32}t, & (3, 2) : ty_{22} &= y_{33}t, & (3, 3) : ty_{23} &= y_{34}t, & (3, 4) : ty_{24} &= y_{31}; \\ (4, 1) : ty_{31} &= y_{42}t, & (4, 2) : ty_{32} &= y_{43}t, & (4, 3) : ty_{33} &= y_{44}t, & (4, 4) : ty_{34} &= y_{41}. \end{aligned}$$

Отже,

$$\text{Hom}(A_2, A_2) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & u_1 \\ u_1t & x_1 + x_2t & y_1 + y_2t & z_1 + z_2t \\ z_1t & u_2t & x_1 + x_3t & y_1 + y_3t \\ y_1t & z_1t & u_1t & x_1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Розглянемо випадок $A_1 Z = Z A_2$.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & t \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} & z_{13} & z_{14} \\ z_{21} & z_{22} & z_{23} & z_{24} \\ z_{31} & z_{32} & z_{33} & z_{34} \\ z_{41} & z_{42} & z_{43} & z_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} & z_{13} & z_{14} \\ z_{21} & z_{22} & z_{23} & z_{24} \\ z_{31} & z_{32} & z_{33} & z_{34} \\ z_{41} & z_{42} & z_{43} & z_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} tz_{41} & tz_{42} & tz_{43} & tz_{44} \\ z_{11} & z_{12} & z_{13} & z_{14} \\ z_{21} & z_{22} & z_{23} & z_{24} \\ z_{31} & z_{32} & z_{33} & z_{34} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_{12}t & z_{13}t & z_{14}t & z_{11} \\ z_{22}t & z_{23}t & z_{24}t & z_{21} \\ z_{32}t & z_{33}t & z_{34}t & z_{31} \\ z_{42}t & z_{43}t & z_{44}t & z_{41} \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} (1, 1) : tz_{41} &= z_{12}t, & (1, 2) : tz_{42} &= z_{13}t, & (1, 3) : tz_{43} &= z_{14}t, & (1, 4) : tz_{44} &= z_{11}; \\ (2, 1) : z_{11} &= z_{22}t, & (2, 2) : z_{12} &= z_{23}t, & (2, 3) : z_{13} &= z_{24}t, & (2, 4) : z_{14} &= z_{21}; \\ (3, 1) : z_{21} &= z_{32}t, & (3, 2) : z_{22} &= z_{33}t, & (3, 3) : z_{23} &= z_{34}t, & (3, 4) : z_{24} &= z_{31}; \\ (4, 1) : z_{31} &= z_{42}t, & (4, 2) : z_{32} &= z_{43}t, & (4, 3) : z_{33} &= z_{44}t, & (4, 4) : z_{34} &= z_{41}. \end{aligned}$$

Отже,

$$\text{Hom}(A_1, A_2) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & y_1t \\ y_1t & z_1t & u_1t & x_1t \end{pmatrix} \right\}.$$

Розглянемо випадок $A_2 V = V A_1$.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} & v_{13} & v_{14} \\ v_{21} & v_{22} & v_{23} & v_{24} \\ v_{31} & v_{32} & v_{33} & v_{34} \\ v_{41} & v_{42} & v_{43} & v_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} & v_{13} & v_{14} \\ v_{21} & v_{22} & v_{23} & v_{24} \\ v_{31} & v_{32} & v_{33} & v_{34} \\ v_{41} & v_{42} & v_{43} & v_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & t \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} v_{41} & v_{42} & v_{43} & v_{44} \\ tv_{11} & tv_{12} & tv_{13} & tv_{14} \\ tv_{21} & tv_{22} & tv_{23} & tv_{24} \\ tv_{31} & tv_{32} & tv_{33} & tv_{34} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{12} & v_{13} & v_{14} & v_{11}t \\ v_{22} & v_{23} & v_{24} & v_{21}t \\ v_{32} & v_{33} & v_{34} & v_{31}t \\ v_{42} & v_{43} & v_{44} & v_{41}t \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} (1, 1) : v_{41} &= v_{12}, & (1, 2) : v_{42} &= v_{13}, & (1, 3) : v_{43} &= v_{14}, & (1, 4) : v_{44} &= v_{11}t; \\ (2, 1) : tv_{11} &= v_{22}, & (2, 2) : tv_{12} &= v_{23}, & (2, 3) : tv_{13} &= v_{24}, & (2, 4) : tv_{14} &= v_{21}t; \\ (3, 1) : tv_{21} &= v_{32}, & (3, 2) : tv_{22} &= v_{33}, & (3, 3) : tv_{23} &= v_{34}, & (3, 4) : tv_{24} &= v_{31}t; \\ (4, 1) : tv_{31} &= v_{42}, & (4, 2) : tv_{32} &= v_{43}, & (4, 3) : tv_{33} &= v_{44}, & (4, 4) : tv_{34} &= v_{41}t. \end{aligned}$$

Отже,

$$\text{Hom}(A_2, A_1) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1t & y_1t & 0 & 0 \\ u_1t & 0 & 0 & 0 \\ z_1t & 0 & 0 & 0 \\ y_1t & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

4. Опис категорії незвідних t -мономіальних матриць порядку $n = 5$.

Із теорем 1 і 2 випливає, що за об'єкти категорії $\mathcal{PSM}(K, \text{Ird}_{t,5}^\circ)$ можна взяти такі матриці:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & t \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & t \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & t \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t & 0 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & t \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t & 0 \end{pmatrix}, \quad A_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & t \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тоді

$$\text{Hom}(A_1, A_1) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & y_1t & z_1t & u_1t & v_1t \\ v_1 & x_1 & y_1 & z_1 & u_1 \\ u_1 + u_2t & v_1t & x_1 + x_2t & y_1 + y_2t & z_1 + z_2t \\ z_1 + z_3t & u_1t & v_2t & x_1 + x_3t & y_1 + y_3t \\ y_1 + y_4t & z_1t & u_3t & v_3t & x_1 + x_4t \end{pmatrix} \right\},$$

$$\text{Hom}(A_2, A_2) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & y_1t & 0 & 0 & v_1t \\ v_1 & x_1 & y_1t & z_1t & u_1t \\ u_1 & v_1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ z_1 + z_2t & u_1t & v_1t & x_1 + x_2t & y_1 + y_2t \\ y_1 + y_3t & z_1t & 0 & v_2t & x_1 + x_3t \end{pmatrix} \right\},$$

$$\text{Hom}(A_3, A_3) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & y_1t & 0 & 0 & v_1t \\ v_1 & x_1 & y_1t & 0 & u_1t \\ u_1 & v_1 & x_1 & y_1t & z_1t \\ z_1 & u_1 & v_1 & x_1 & y_1 \\ y_1 + y_2t & z_1t & u_1t & v_1t & x_1 + x_2t \end{pmatrix} \right\},$$

$$\text{Hom}(A_4, A_4) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & y_1t & z_1t & u_1t & v_1t \\ v_1 & x_1 & y_1t & z_1t & u_1t \\ u_1 & v_1 & x_1 & y_1t & z_1t \\ z_1 & u_1 & v_1 & x_1 & y_1t \\ y_1 & z_1 & u_1 & v_1 & x_1 \end{pmatrix} \right\},$$

$$\text{Hom}(A_5, A_5) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1t & u_1 & v_1 \\ v_1t & x_1 + x_2t & y_1t & z_2t & u_1 + u_2t \\ u_1 + u_2t & v_1 + v_2t & x_1 + x_2t & y_1 + y_2t & z_2 + z_3t \\ z_2t & u_1 + u_3t & v_1t & x_1 + x_3t & y_1 + y_3t \\ y_1t & z_1t & u_1t & v_1t & x_1 \end{pmatrix} \right\},$$

$$\text{Hom}(A_6, A_6) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & y_1t & z_1 & u_1t & v_1t \\ v_1 & x_1 & y_1 & z_1 & u_1t \\ u_1t & v_1t & x_1 + x_2t & y_1t & z_1t \\ z_1 + z_2t & u_1t & v_1 + v_2t & x_1 + x_2t & y_1t \\ y_1 + y_2t & z_1 + z_2t & u_1 & v_1 + v_2t & x_1 + x_2t \end{pmatrix} \right\},$$

$$\begin{aligned}
Hom(A_1, A_2) &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1t & 0 & 0 & u_1t & v_1t \\ v_1 & x_1t & 0 & z_1t & u_1 \\ u_1 + u_2t & v_1t & 0 & y_1t & z_3t \\ z_2t & u_1t & 0 & x_3t & y_3t \\ y_2t & 0 & 0 & v_2t & x_2t \end{pmatrix} \right\}, \\
Hom(A_2, A_1) &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ v_1t & 0 & 0 & z_1t & u_1t \\ u_1 & v_1t & x_1t & y_1t & z_1 \\ z_1 + z_2t & u_1t & v_3t & x_3t & y_3t \\ y_2t & z_1t & u_2t & v_2t & x_2t \end{pmatrix} \right\}, \\
Hom(A_1, A_3) &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1t & 0 & 0 & 0 & v_1t \\ v_1 & x_1t & 0 & 0 & u_1t \\ u_2t & v_1t & 0 & 0 & z_1t \\ z_2t & 0 & 0 & 0 & y_1t \\ y_2t & 0 & 0 & 0 & x_2t \end{pmatrix} \right\}, \\
Hom(A_3, A_1) &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ u_1t & 0 & 0 & 0 & z_1t \\ z_1 & u_1t & v_1t & x_1t & y_1t \\ y_2t & z_1t & u_2t & v_2t & x_2t \end{pmatrix} \right\}, \\
Hom(A_1, A_4) &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ v_1t & x_1t & 0 & 0 & 0 \\ u_1t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ z_1t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ y_1t & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}, \\
Hom(A_4, A_1) &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ z_1t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ y_1t & z_1t & u_1t & v_1t & x_1t \end{pmatrix} \right\}, \\
Hom(A_1, A_5) &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & y_1t & 0 & u_1t & v_1t \\ v_1t & x_1t & y_1t & z_1t & u_1 \\ u_1t & v_3t & 0 & y_3t & z_3t \\ 0 & u_2t & 0 & x_3t & y_2t \\ 0 & z_2t & 0 & v_2t & x_2t \end{pmatrix} \right\}, \\
Hom(A_5, A_1) &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1t & y_1t & z_1t & u_1t & v_1t \\ v_3t & 0 & 0 & 0 & u_2t \\ u_2 + u_3t & v_3t & x_3t & y_3t & z_3t \\ z_2t & u_2t & v_2t & x_2t & y_2t \\ y_1t & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}, \\
Hom(A_1, A_6) &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1t & 0 & z_1t & 0 & 0 \\ v_1t & x_1t & y_1t & z_1t & 0 \\ u_1t & 0 & x_2t & 0 & 0 \\ z_2t & 0 & v_2t & 0 & 0 \\ y_2t & 0 & u_2t & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Hom(A_6, A_1) &= \left\{ \left(\begin{array}{ccccc} x_1t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ v_1t & x_1t & y_1t & z_1t & u_1t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ z_2t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ y_2t & z_2t & u_2t & v_2t & x_2t \end{array} \right) \right\}, \\
Hom(A_2, A_3) &= \left\{ \left(\begin{array}{ccccc} x_1t & 0 & 0 & 0 & v_1t \\ v_1 & x_1t & 0 & 0 & u_1t \\ u_1 & v_1 & x_1t & 0 & z_1t \\ z_2t & u_1t & v_1t & 0 & y_1t \\ y_2t & 0 & 0 & 0 & x_2t \end{array} \right) \right\}, \\
Hom(A_3, A_2) &= \left\{ \left(\begin{array}{ccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ v_1t & 0 & 0 & 0 & u_1t \\ u_1 & v_1t & 0 & 0 & z_1t \\ z_1 & u_1 & v_1t & x_1t & y_1t \\ y_2t & z_1t & u_1t & v_2t & x_2t \end{array} \right) \right\}, \\
Hom(A_2, A_4) &= \left\{ \left(\begin{array}{ccccc} x_1t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ v_1t & x_1t & 0 & 0 & 0 \\ u_1t & v_1t & x_1t & 0 & 0 \\ z_1t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ y_1t & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \right\}, \\
Hom(A_4, A_2) &= \left\{ \left(\begin{array}{ccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ u_1t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ z_1t & u_1t & 0 & 0 & 0 \\ y_1t & z_1t & u_1t & v_1t & x_1t \end{array} \right) \right\}, \\
Hom(A_2, A_5) &= \left\{ \left(\begin{array}{ccccc} x_1t & y_1t & 0 & u_1t & v_1t \\ v_1t & x_1 & y_1t & z_1t & u_1 \\ u_1 & v_1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ z_1t & u_1 + u_2t & v_1t & x_1 + x_2t & y_1 + y_2t \\ y_1t & z_2t & u_1t & v_2t & x_1 + x_3t \end{array} \right) \right\}, \\
Hom(A_5, A_2) &= \left\{ \left(\begin{array}{ccccc} x_1 & y_1 & z_1t & u_1t & v_1 \\ v_1 + v_2t & x_1t & y_1t & z_1t & u_2t \\ u_2 + u_3t & v_1 + v_2t & x_1t & y_1 + y_2t & z_1 \\ z_1 + z_2t & u_2t & v_1t & x_2t & y_1 + y_3t \\ y_1 & z_1t & 0 & v_1t & x_1t \end{array} \right) \right\}, \\
Hom(A_2, A_6) &= \left\{ \left(\begin{array}{ccccc} x_1t & 0 & z_1t & 0 & 0 \\ v_1t & x_1t & y_1t & z_1t & 0 \\ u_1t & v_1t & x_1 & y_1t & z_1t \\ z_2t & 0 & v_2t & x_1t & 0 \\ y_2t & 0 & u_2t & 0 & 0 \end{array} \right) \right\}, \\
Hom(A_6, A_2) &= \left\{ \left(\begin{array}{ccccc} x_1t & y_1t & 0 & 0 & 0 \\ v_1t & x_1t & y_1t & z_1t & u_1t \\ u_2t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ z_2t & u_2t & 0 & 0 & y_1t \\ y_1 & z_2t & u_2t & v_2t & x_2t \end{array} \right) \right\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Hom(A_3, A_4) &= \left\{ \left(\begin{array}{ccccc} x_1t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ v_1t & x_1t & 0 & 0 & 0 \\ u_1t & v_1t & x_1t & 0 & 0 \\ z_1t & u_1t & v_1t & x_1t & 0 \\ y_1t & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \right\}, \\
Hom(A_4, A_3) &= \left\{ \left(\begin{array}{ccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ v_1t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ u_1t & v_1t & 0 & 0 & 0 \\ z_1t & u_1t & v_1t & 0 & 0 \\ y_1t & z_1t & u_1t & v_1t & x_1t \end{array} \right) \right\}, \\
Hom(A_3, A_5) &= \left\{ \left(\begin{array}{ccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & u_1t \\ u_1t & v_1t & 0 & y_1t & z_1t \\ z_1t & u_1 & v_1t & x_1t & y_1 \\ y_1t & z_2t & u_1t & v_2t & x_2t \end{array} \right) \right\}, \\
Hom(A_5, A_3) &= \left\{ \left(\begin{array}{ccccc} x_1 & y_1t & 0 & 0 & v_1t \\ v_2t & x_1t & 0 & 0 & u_1t \\ u_1 & v_2t & x_1t & 0 & z_1t \\ z_2t & u_1t & 0 & 0 & y_2t \\ y_1t & 0 & 0 & 0 & x_1t \end{array} \right) \right\}, \\
Hom(A_3, A_6) &= \left\{ \left(\begin{array}{ccccc} x_1t & y_1t & z_1t & u_1t & 0 \\ v_1t & x_1t & y_1 & z_1t & u_1t \\ u_1 & v_1t & x_1 & y_1 & z_1t \\ z_1 & u_1 & v_1 & x_1 & y_1 \\ y_1 + y_2t & z_1t & u_1 + u_2t & v_1t & x_1t \end{array} \right) \right\}, \\
Hom(A_6, A_3) &= \left\{ \left(\begin{array}{ccccc} x_1 & y_1t & z_1t & u_1t & v_1t \\ v_1 & x_1 & y_1t & z_1t & u_1 \\ u_1 + u_2t & v_1t & x_1t & 0 & z_1t \\ z_1 & u_1 + u_2t & v_1t & x_1t & y_1t \\ y_1 & z_1 & u_1 + u_2t & v_1t & x_1 + x_2t \end{array} \right) \right\}, \\
Hom(A_4, A_5) &= \left\{ \left(\begin{array}{ccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u_1t & 0 & 0 & y_1t \\ y_1t & z_1t & u_1t & v_1t & x_1t \end{array} \right) \right\}, \\
Hom(A_5, A_4) &= \left\{ \left(\begin{array}{ccccc} x_1t & y_1t & 0 & 0 & 0 \\ v_1t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ u_1t & v_1t & 0 & 0 & 0 \\ z_1t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ y_1t & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \right\}, \\
Hom(A_4, A_6) &= \left\{ \left(\begin{array}{ccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_1t & 0 & 0 \\ z_1t & 0 & v_1t & x_1t & 0 \\ y_1t & z_1t & u_1t & v_1t & x_1t \end{array} \right) \right\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Hom}(A_6, A_4) &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ v_1t & x_1t & 0 & 0 & 0 \\ u_1t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ z_1t & u_1t & 0 & 0 & 0 \\ y_1t & z_1t & u_1t & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}, \\ \text{Hom}(A_5, A_6) &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1t & y_1t & z_1t & u_1t & 0 \\ v_1t & 0 & y_2t & 0 & 0 \\ u_2t & v_1t & x_2t & y_2t & 0 \\ z_2t & 0 & v_2t & 0 & 0 \\ y_1t & 0 & u_1t & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}, \\ \text{Hom}(A_6, A_5) &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & y_1t & 0 & 0 & v_1t \\ v_1t & x_1t & y_1t & z_1t & u_1t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u_2t & 0 & 0 & y_2t \\ y_2t & z_2t & u_2t & v_2t & x_2t \end{pmatrix} \right\}. \end{aligned}$$

Доведення легко провести по вказаній вище схемі, якщо скористатися наступними рівностями:

$$A_1X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & t \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} & x_{15} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} & x_{25} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} & x_{35} \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & x_{44} & x_{45} \\ x_{51} & x_{52} & x_{53} & x_{54} & x_{55} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} tx_{51} & tx_{52} & tx_{53} & tx_{54} & tx_{55} \\ x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} & x_{15} \\ tx_{21} & tx_{22} & tx_{23} & tx_{24} & tx_{25} \\ tx_{31} & tx_{32} & tx_{33} & tx_{34} & tx_{35} \\ tx_{41} & tx_{42} & tx_{43} & tx_{44} & tx_{45} \end{pmatrix},$$

$$A_2X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & t \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} & x_{15} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} & x_{25} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} & x_{35} \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & x_{44} & x_{45} \\ x_{51} & x_{52} & x_{53} & x_{54} & x_{55} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} tx_{51} & tx_{52} & tx_{53} & tx_{54} & tx_{55} \\ x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} & x_{15} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} & x_{25} \\ tx_{31} & tx_{32} & tx_{33} & tx_{34} & tx_{35} \\ tx_{41} & tx_{42} & tx_{43} & tx_{44} & tx_{45} \end{pmatrix},$$

$$A_3X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & t \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} & x_{15} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} & x_{25} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} & x_{35} \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & x_{44} & x_{45} \\ x_{51} & x_{52} & x_{53} & x_{54} & x_{55} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} tx_{51} & tx_{52} & tx_{53} & tx_{54} & tx_{55} \\ x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} & x_{15} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} & x_{25} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} & x_{35} \\ tx_{41} & tx_{42} & tx_{43} & tx_{44} & tx_{45} \end{pmatrix},$$

$$A_4X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & t \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} & x_{15} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} & x_{25} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} & x_{35} \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & x_{44} & x_{45} \\ x_{51} & x_{52} & x_{53} & x_{54} & x_{55} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} tx_{51} & tx_{52} & tx_{53} & tx_{54} & tx_{55} \\ x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} & x_{15} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} & x_{25} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} & x_{35} \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & x_{44} & x_{45} \end{pmatrix},$$

$$A_5X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} & x_{15} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} & x_{25} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} & x_{35} \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & x_{44} & x_{45} \\ x_{51} & x_{52} & x_{53} & x_{54} & x_{55} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{51} & x_{52} & x_{53} & x_{54} & x_{55} \\ tx_{11} & tx_{12} & tx_{13} & tx_{14} & tx_{15} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} & x_{25} \\ tx_{31} & tx_{32} & tx_{33} & tx_{34} & tx_{35} \\ tx_{41} & tx_{42} & tx_{43} & tx_{44} & tx_{45} \end{pmatrix},$$

$$A_6 X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & t \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} & x_{15} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} & x_{25} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} & x_{35} \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & x_{44} & x_{45} \\ x_{51} & x_{52} & x_{53} & x_{54} & x_{55} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} tx_{51} & tx_{52} & tx_{53} & tx_{54} & tx_{55} \\ x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} & x_{15} \\ tx_{21} & tx_{22} & tx_{23} & tx_{24} & tx_{25} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} & x_{35} \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & x_{44} & x_{45} \end{pmatrix},$$

$$X A_1 = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} & x_{15} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} & x_{25} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} & x_{35} \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & x_{44} & x_{45} \\ x_{51} & x_{52} & x_{53} & x_{54} & x_{55} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & t \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{12} & x_{13}t & x_{14}t & x_{15}t & x_{11}t \\ x_{22} & x_{23}t & x_{24}t & x_{25}t & x_{21}t \\ x_{32} & x_{33}t & x_{34}t & x_{35}t & x_{31}t \\ x_{42} & x_{43}t & x_{44}t & x_{45}t & x_{41}t \\ x_{52} & x_{53}t & x_{54}t & x_{55}t & x_{51}t \end{pmatrix},$$

$$X A_2 = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} & x_{15} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} & x_{25} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} & x_{35} \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & x_{44} & x_{45} \\ x_{51} & x_{52} & x_{53} & x_{54} & x_{55} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & t \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{12} & x_{13} & x_{14}t & x_{15}t & x_{11}t \\ x_{22} & x_{23} & x_{24}t & x_{25}t & x_{21}t \\ x_{32} & x_{33} & x_{34}t & x_{35}t & x_{31}t \\ x_{42} & x_{43} & x_{44}t & x_{45}t & x_{41}t \\ x_{52} & x_{53} & x_{54}t & x_{55}t & x_{51}t \end{pmatrix},$$

$$X A_3 = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} & x_{15} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} & x_{25} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} & x_{35} \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & x_{44} & x_{45} \\ x_{51} & x_{52} & x_{53} & x_{54} & x_{55} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & t \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{12} & x_{13} & x_{14} & x_{15}t & x_{11}t \\ x_{22} & x_{23} & x_{24} & x_{25}t & x_{21}t \\ x_{32} & x_{33} & x_{34} & x_{35}t & x_{31}t \\ x_{42} & x_{43} & x_{44} & x_{45}t & x_{41}t \\ x_{52} & x_{53} & x_{54} & x_{55}t & x_{51}t \end{pmatrix},$$

$$X A_4 = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} & x_{15} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} & x_{25} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} & x_{35} \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & x_{44} & x_{45} \\ x_{51} & x_{52} & x_{53} & x_{54} & x_{55} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & t \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{12} & x_{13} & x_{14} & x_{15} & x_{11}t \\ x_{22} & x_{23} & x_{24} & x_{25} & x_{21}t \\ x_{32} & x_{33} & x_{34} & x_{35} & x_{31}t \\ x_{42} & x_{43} & x_{44} & x_{45} & x_{41}t \\ x_{52} & x_{53} & x_{54} & x_{55} & x_{51}t \end{pmatrix},$$

$$X A_5 = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} & x_{15} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} & x_{25} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} & x_{35} \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & x_{44} & x_{45} \\ x_{51} & x_{52} & x_{53} & x_{54} & x_{55} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{12}t & x_{13} & x_{14}t & x_{15}t & x_{11} \\ x_{22}t & x_{23} & x_{24}t & x_{25}t & x_{21} \\ x_{32}t & x_{33} & x_{34}t & x_{35}t & x_{31} \\ x_{42}t & x_{43} & x_{44}t & x_{45}t & x_{41} \\ x_{52}t & x_{53} & x_{54}t & x_{55}t & x_{51} \end{pmatrix},$$

$$X A_6 = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} & x_{15} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} & x_{25} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} & x_{35} \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & x_{44} & x_{45} \\ x_{51} & x_{52} & x_{53} & x_{54} & x_{55} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & t \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{12} & x_{13}t & x_{14} & x_{15} & x_{11}t \\ x_{22} & x_{23}t & x_{24} & x_{25} & x_{21}t \\ x_{32} & x_{33}t & x_{34} & x_{35} & x_{31}t \\ x_{42} & x_{43}t & x_{44} & x_{45} & x_{41}t \\ x_{52} & x_{53}t & x_{54} & x_{55} & x_{51}t \end{pmatrix}.$$

5. Опис категорії незвідних t -мономіальних матриць порядку $n = 6$. Цей випадок аналогічний випадку $n = 4$. Проведемо доведення в трохи скороченому вигляді.

Із теорем 1 і 2 випливає, що за об'єкти категорії $\mathcal{PSM}(K, \text{Ird}_{t,6}^{\circ})$ можна взяти

такі матриці:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t & 0 \end{pmatrix}.$$

Розглянемо 4 випадки: $A_1X = XA_1$, $A_2Y = YA_2$, $A_1Z = ZA_2$, $A_2V = VA_1$, де

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} & x_{15} & x_{16} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} & x_{25} & x_{26} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} & x_{35} & x_{36} \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & x_{44} & x_{45} & x_{46} \\ x_{51} & x_{52} & x_{53} & x_{54} & x_{55} & x_{56} \\ x_{61} & x_{62} & x_{63} & x_{64} & x_{65} & x_{66} \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & y_{13} & y_{14} & y_{15} & y_{16} \\ y_{21} & y_{22} & y_{23} & y_{24} & y_{25} & y_{26} \\ y_{31} & y_{32} & y_{33} & y_{34} & y_{35} & y_{36} \\ y_{41} & y_{42} & y_{43} & y_{44} & y_{45} & y_{46} \\ y_{51} & y_{52} & y_{53} & y_{54} & y_{55} & y_{56} \\ y_{61} & y_{62} & y_{63} & y_{64} & y_{65} & y_{66} \end{pmatrix},$$

$$Z = \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} & z_{13} & z_{14} & z_{15} & z_{16} \\ z_{21} & z_{22} & z_{23} & z_{24} & z_{25} & z_{26} \\ z_{31} & z_{32} & z_{33} & z_{34} & z_{35} & z_{36} \\ z_{41} & z_{42} & z_{43} & z_{44} & z_{45} & z_{46} \\ z_{51} & z_{52} & z_{53} & z_{54} & z_{55} & z_{56} \\ z_{61} & z_{62} & z_{63} & z_{64} & z_{65} & z_{66} \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} & v_{13} & v_{14} & v_{15} & v_{16} \\ v_{21} & v_{22} & v_{23} & v_{24} & v_{25} & v_{26} \\ v_{31} & v_{32} & v_{33} & v_{34} & v_{35} & v_{36} \\ v_{41} & v_{42} & v_{43} & v_{44} & v_{45} & v_{46} \\ v_{51} & v_{52} & v_{53} & v_{54} & v_{55} & v_{56} \\ v_{61} & v_{62} & v_{63} & v_{64} & v_{65} & v_{66} \end{pmatrix}.$$

Розглянемо спочатку випадок $A_1X = XA_1$.

$$\begin{pmatrix} tx_{61} & tx_{62} & tx_{63} & tx_{64} & tx_{65} & tx_{66} \\ x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} & x_{15} & x_{16} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} & x_{25} & x_{26} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} & x_{35} & x_{36} \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & x_{44} & x_{45} & x_{46} \\ x_{51} & x_{52} & x_{53} & x_{54} & x_{55} & x_{56} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{12} & x_{13} & x_{14} & x_{15} & x_{16} & x_{11}t \\ x_{22} & x_{23} & x_{24} & x_{25} & x_{26} & x_{21}t \\ x_{32} & x_{33} & x_{34} & x_{35} & x_{36} & x_{31}t \\ x_{42} & x_{43} & x_{44} & x_{45} & x_{46} & x_{41}t \\ x_{52} & x_{53} & x_{54} & x_{55} & x_{56} & x_{51}t \\ x_{62} & x_{63} & x_{64} & x_{65} & x_{66} & x_{61}t \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} (1, 1) : tx_{61} &= x_{12}, & (1, 2) : tx_{62} &= x_{13}, & (1, 3) : tx_{63} &= x_{14}, \\ (2, 1) : x_{11} &= x_{22}, & (2, 2) : x_{12} &= x_{23}, & (2, 3) : x_{13} &= x_{24}, \\ (3, 1) : x_{21} &= x_{32}, & (3, 2) : x_{22} &= x_{33}, & (3, 3) : x_{23} &= x_{34}, \\ (4, 1) : x_{31} &= x_{42}, & (4, 2) : x_{32} &= x_{43}, & (4, 3) : x_{33} &= x_{44}, \\ (5, 1) : x_{41} &= x_{52}, & (5, 2) : x_{42} &= x_{53}, & (5, 3) : x_{43} &= x_{54}, \\ (6, 1) : x_{51} &= x_{62}, & (6, 2) : x_{52} &= x_{63}, & (6, 3) : x_{53} &= x_{64}, \\ (1, 4) : tx_{64} &= x_{15}, & (1, 5) : tx_{65} &= x_{16}, & (1, 6) : tx_{66} &= x_{11}t; \\ (2, 4) : x_{14} &= x_{25}, & (2, 5) : x_{15} &= x_{26}, & (2, 6) : x_{16} &= x_{21}t; \\ (3, 4) : x_{24} &= x_{35}, & (3, 5) : x_{25} &= x_{36}, & (3, 6) : x_{26} &= x_{31}t; \\ (4, 4) : x_{34} &= x_{45}, & (4, 5) : x_{35} &= x_{46}, & (4, 6) : x_{36} &= x_{41}t; \\ (5, 4) : x_{44} &= x_{55}, & (5, 5) : x_{45} &= x_{56}, & (5, 6) : x_{46} &= x_{51}t; \\ (6, 4) : x_{54} &= x_{65}, & (6, 5) : x_{55} &= x_{66}, & (6, 6) : x_{56} &= x_{61}t. \end{aligned}$$

Отже,

$$\text{Hom}(A_1, A_1) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & y_1t & z_1t & u_1t & v_1t & w_1t \\ w_1 & x_1 & y_1t & z_1t & u_1t & v_1t \\ v_1 & w_1 & x_1 & y_1t & z_1t & u_1t \\ u_1 & v_1 & w_1 & x_1 & y_1t & z_1t \\ z_1 & u_1 & v_1 & w_1 & x_1 & y_1t \\ y_1 & z_1 & u_1 & v_1 & w_1 & x_1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Розглянемо випадок $A_2Y = YA_2$.

$$\begin{pmatrix} y_{61} & y_{62} & y_{63} & y_{64} & y_{65} & y_{66} \\ ty_{11} & ty_{12} & ty_{13} & ty_{14} & ty_{15} & ty_{16} \\ ty_{21} & ty_{22} & ty_{23} & ty_{24} & ty_{25} & ty_{26} \\ ty_{31} & ty_{32} & ty_{33} & ty_{34} & ty_{35} & ty_{36} \\ ty_{41} & ty_{42} & ty_{43} & ty_{44} & ty_{45} & ty_{46} \\ ty_{51} & ty_{52} & ty_{53} & ty_{54} & ty_{55} & ty_{56} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{12}t & y_{13}t & y_{14}t & y_{15}t & y_{16}t & y_{11} \\ y_{22}t & y_{23}t & y_{24}t & y_{25}t & y_{26}t & y_{21} \\ y_{32}t & y_{33}t & y_{34}t & y_{35}t & y_{36}t & y_{31} \\ y_{42}t & y_{43}t & y_{44}t & y_{45}t & y_{46}t & y_{41} \\ y_{52}t & y_{53}t & y_{54}t & y_{55}t & y_{56}t & y_{51} \\ y_{62}t & y_{63}t & y_{64}t & y_{65}t & y_{66}t & y_{61} \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} (1, 1) : y_{61} &= y_{12}t, & (1, 2) : y_{62} &= y_{13}t, & (1, 3) : y_{63} &= y_{14}t, \\ (2, 1) : ty_{11} &= y_{22}t, & (2, 2) : ty_{12} &= y_{23}t, & (2, 3) : ty_{13} &= y_{24}t, \\ (3, 1) : ty_{21} &= y_{32}t, & (3, 2) : ty_{22} &= y_{33}t, & (3, 3) : ty_{23} &= y_{34}t, \\ (4, 1) : ty_{31} &= y_{42}t, & (4, 2) : ty_{32} &= y_{43}t, & (4, 3) : ty_{33} &= y_{44}t, \\ (5, 1) : ty_{41} &= y_{52}t, & (5, 2) : ty_{42} &= y_{53}t, & (5, 3) : ty_{43} &= y_{54}t, \\ (6, 1) : ty_{51} &= y_{62}t, & (6, 2) : ty_{52} &= y_{63}t, & (6, 3) : ty_{53} &= y_{64}t, \\ (1, 4) : y_{64} &= y_{15}t, & (1, 5) : y_{65} &= y_{16}t, & (1, 6) : y_{66} &= y_{11}; \\ (2, 4) : ty_{14} &= y_{25}t, & (2, 5) : ty_{15} &= y_{26}t, & (2, 6) : ty_{16} &= y_{21}; \\ (3, 4) : ty_{24} &= y_{35}t, & (3, 5) : ty_{25} &= y_{36}t, & (3, 6) : ty_{26} &= y_{31}; \\ (4, 4) : ty_{34} &= y_{45}t, & (4, 5) : ty_{35} &= y_{46}t, & (4, 6) : ty_{36} &= y_{41}; \\ (5, 4) : ty_{44} &= y_{55}t, & (5, 5) : ty_{45} &= y_{56}t, & (5, 6) : ty_{46} &= y_{51}; \\ (6, 4) : ty_{54} &= y_{65}t, & (6, 5) : ty_{55} &= y_{66}t, & (6, 6) : ty_{56} &= y_{61}. \end{aligned}$$

Отже,

$$\text{Hom}(A_2, A_2) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & u_1 & v_1 & w_1 \\ w_1t & x_1 + x_2t & y_1 + y_2t & z_1 + z_2t & u_1 + u_2t & v_1 + v_2t \\ v_1t & w_2t & x_1 + x_3t & y_1 + y_3t & z_1 + z_3t & u_1 + u_3t \\ u_1t & v_3t & w_3t & x_1 + x_4t & y_1 + y_4t & z_1 + z_4t \\ z_1t & u_4t & v_4t & w_4t & x_1 + x_5t & y_1 + y_5t \\ y_1t & z_1t & u_1t & v_1t & w_1t & x_1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Розглянемо випадок $A_1Z = ZA_1$.

$$\begin{pmatrix} tz_{61} & tz_{62} & tz_{63} & tz_{64} & tz_{65} & tz_{66} \\ z_{11} & z_{12} & z_{13} & z_{14} & z_{15} & z_{16} \\ z_{21} & z_{22} & z_{23} & z_{24} & z_{25} & z_{26} \\ z_{31} & z_{32} & z_{33} & z_{34} & z_{35} & z_{36} \\ z_{41} & z_{42} & z_{43} & z_{44} & z_{45} & z_{46} \\ z_{51} & z_{52} & z_{53} & z_{54} & z_{55} & z_{56} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_{12}t & z_{13}t & z_{14}t & z_{15}t & z_{16}t & z_{11} \\ z_{22}t & z_{23}t & z_{24}t & z_{25}t & z_{26}t & z_{21} \\ z_{32}t & z_{33}t & z_{34}t & z_{35}t & z_{36}t & z_{31} \\ z_{42}t & z_{43}t & z_{44}t & z_{45}t & z_{46}t & z_{41} \\ z_{52}t & z_{53}t & z_{54}t & z_{55}t & z_{56}t & z_{51} \\ z_{62}t & z_{63}t & z_{64}t & z_{65}t & z_{66}t & z_{61} \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned}
(1, 1) : tz_{61} = z_{12}t, & \quad (1, 2) : tz_{62} = z_{13}t, & \quad (1, 3) : tz_{63} = z_{14}t, \\
(2, 1) : z_{11} = z_{22}t, & \quad (2, 2) : z_{12} = z_{23}t, & \quad (2, 3) : z_{13} = z_{24}t, \\
(3, 1) : z_{21} = z_{32}t, & \quad (3, 2) : z_{22} = z_{33}t, & \quad (3, 3) : z_{23} = z_{34}t, \\
(4, 1) : z_{31} = z_{42}t, & \quad (4, 2) : z_{32} = z_{43}t, & \quad (4, 3) : z_{33} = z_{44}t, \\
(5, 1) : z_{41} = z_{52}t, & \quad (5, 2) : z_{42} = z_{53}t, & \quad (5, 3) : z_{43} = z_{54}t, \\
(6, 1) : z_{51} = z_{62}t, & \quad (6, 2) : z_{52} = z_{63}t, & \quad (6, 3) : z_{53} = z_{64}t, \\
(1, 4) : tz_{64} = z_{15}t, & \quad (1, 5) : tz_{65} = z_{16}t, & \quad (1, 6) : tz_{66} = z_{11}; \\
(2, 4) : z_{14} = z_{25}t, & \quad (2, 5) : z_{15} = z_{26}t, & \quad (2, 6) : z_{16} = z_{21}; \\
(3, 4) : z_{24} = z_{35}t, & \quad (3, 5) : z_{25} = z_{36}t, & \quad (3, 6) : z_{26} = z_{31}; \\
(4, 4) : z_{34} = z_{45}t, & \quad (4, 5) : z_{35} = z_{46}t, & \quad (4, 6) : z_{36} = z_{41}; \\
(5, 4) : z_{44} = z_{55}t, & \quad (5, 5) : z_{45} = z_{56}t, & \quad (5, 6) : z_{46} = z_{51}; \\
(6, 4) : z_{54} = z_{65}t, & \quad (6, 5) : z_{55} = z_{66}t, & \quad (6, 6) : z_{56} = z_{61}.
\end{aligned}$$

Отже,

$$\text{Hom}(A_1, A_2) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & y_1t \\ y_1t & z_1t & u_1t & v_1t & w_1t & x_1t \end{pmatrix} \right\}.$$

Розглянемо випадок $A_2V = VA_1$.

$$\begin{pmatrix} v_{61} & v_{62} & v_{63} & v_{64} & v_{65} & v_{66} \\ tv_{11} & tv_{12} & tv_{13} & tv_{14} & tv_{15} & tv_{16} \\ tv_{21} & tv_{22} & tv_{23} & tv_{24} & tv_{25} & tv_{26} \\ tv_{31} & tv_{32} & tv_{33} & tv_{34} & tv_{35} & tv_{36} \\ tv_{41} & tv_{42} & tv_{43} & tv_{44} & tv_{45} & tv_{46} \\ tv_{51} & tv_{52} & tv_{53} & tv_{54} & tv_{55} & tv_{56} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{12} & v_{13} & v_{14} & v_{15} & v_{16} & v_{11}t \\ v_{22} & v_{23} & v_{24} & v_{25} & v_{26} & v_{21}t \\ v_{32} & v_{33} & v_{34} & v_{35} & v_{36} & v_{31}t \\ v_{42} & v_{43} & v_{44} & v_{45} & v_{46} & v_{41}t \\ v_{52} & v_{53} & v_{54} & v_{55} & v_{56} & v_{51}t \\ v_{62} & v_{63} & v_{64} & v_{65} & v_{66} & v_{61}t \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned}
(1, 1) : v_{61} = v_{12}, & \quad (1, 2) : v_{62} = v_{13}, & \quad (1, 3) : v_{63} = v_{14}, \\
(2, 1) : tv_{11} = v_{22}, & \quad (2, 2) : tv_{12} = v_{23}, & \quad (2, 3) : tv_{13} = v_{24}, \\
(3, 1) : tv_{21} = v_{32}, & \quad (3, 2) : tv_{22} = v_{33}, & \quad (3, 3) : tv_{23} = v_{34}, \\
(4, 1) : tv_{31} = v_{42}, & \quad (4, 2) : tv_{32} = v_{43}, & \quad (4, 3) : tv_{33} = v_{44}, \\
(5, 1) : tv_{41} = v_{52}, & \quad (5, 2) : tv_{42} = v_{53}, & \quad (5, 3) : tv_{43} = v_{54}, \\
(6, 1) : tv_{51} = v_{62}, & \quad (6, 2) : tv_{52} = v_{63}, & \quad (6, 3) : tv_{53} = v_{64}, \\
(1, 4) : v_{64} = v_{15}, & \quad (1, 5) : v_{65} = v_{16}, & \quad (1, 6) : v_{66} = v_{11}t; \\
(2, 4) : tv_{14} = v_{25}, & \quad (2, 5) : tv_{15} = v_{26}, & \quad (2, 6) : tv_{16} = v_{21}t; \\
(3, 4) : tv_{24} = v_{35}, & \quad (3, 5) : tv_{25} = v_{36}, & \quad (3, 6) : tv_{26} = v_{31}t; \\
(4, 4) : tv_{34} = v_{45}, & \quad (4, 5) : tv_{35} = v_{46}, & \quad (4, 6) : tv_{36} = v_{41}t; \\
(5, 4) : tv_{44} = v_{55}, & \quad (5, 5) : tv_{45} = v_{56}, & \quad (5, 6) : tv_{46} = v_{51}t; \\
(6, 4) : tv_{54} = v_{65}, & \quad (6, 5) : tv_{55} = v_{66}, & \quad (6, 6) : tv_{56} = v_{61}t.
\end{aligned}$$

Отже,

$$\text{Hom}(A_2, A_1) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1t & y_1t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ w_1t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ v_1t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ u_1t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ z_1t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ y_1t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

6. Зауваження. Для $n \geq 7$ морфізми між канонічно t -циклічними матрицями, звичайно ж, можна обчислювати по запропонованій схемі, але, якщо говорити про незвідні матриці, то друга частина теореми 1 вже не виконується. Як контрприклад можна привести наступну матрицю:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & t \\ t & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t & 0 \end{pmatrix}$$

Її звідність доведена в останньому параграфі роботи [1].

Список використаної літератури

1. *Bondarenko V. M., Bortos M. Yu., Dinis M. Yu., Tylyshchak A. A.* Reducibility and irreducibility of monomial matrices over commutative rings, *Algebra and Discrete Mathematici* **16** (2), 2013. – P. 171–187.

Одержано 15.05.2016