УДК 519.8

А. Ю. Брила, В.І. Гренджа (Ужгородський нац. ун-т)

ЛЕКСИКОГРАФІЧНА ЗАДАЧА ПРО ПОКРИТТЯ З АЛЬТЕРНАТИВНИМИ КРИТЕРІЯМИ

A multicriteria minimum vertex coverage optimization problem is considered. Criteria are ranked in subordination of strict ranking. On some of criteria acceptability constraints are defined (they must archive predefined minimum values). We have to find an optimal solution using acceptable criteria with the highest possible rank. The approach of finding attainable optimal solutions of the problem was proposed.

Розглядається багатокритеріальна задача про покриття, у якій критерії упорядковано у субординації строгого ранжування. На деякі з критеріїв додатково накладені умови допустимості (у роботі розглядається випадок, коли на критерії накладаються додаткові умови досягнення ними мінімальних допустимих значень). Оптимальний розв'язок такої задачі шукається з використанням тільки допустимих критеріїв якнайвищого рангу. Для його знаходження запропоновано підхід, що грунтується на зведенні одержаної багатокритеріальної задачі до однокритеріальної, у якій цільова функція є скалярною згорткою критеріїв.

Вступ. Багато прикладних задач теорії прийняття рішень можуть бути зведені до класичної задачі про покриття. Як правило, вона має декілька оптимальних розв'язків. Вибір одного з них на практиці здійснюється шляхом введення додаткових критеріїв, що дозволяє прийняти остаточне рішення. Тобто задача стає багатокритеріальною задачею про покриття. У роботі розглядається випадок, коли на множині введених додаткових критеріїв задано субординацію строгого ранжування [1-3]. Іншими словами, одержуємо лексикографічну задачу про покриття [2-3]. Для розв'язання одержаної задачі [2] було запропоновано підхід, що грунтується на її зведенні до однокритеріальної задачі з скалярною функцією, яка є додатною лінійною згорткою критеріїв з відповідними додатними коефіцієнтами. Очевидно, такий підхід значно спрощує і полегшує розв'язання багатокритеріальної задачі. Оптимальний розв'язок багатокритеріальної задачі оптимізації (оптимальна альтернатива), який може бути одержаний шляхом розв'язання відповідної однокритеріальної задачі з цільовою функцією, що є додатною лінійною згорткою критеріїв, називається досяжним (досяжною альтернативою) [1].

На основі лексикографічної задачі оптимізації про покриття в роботі побудовано її варіант з альтернативними критеріями. Така задача виникає у випадку, коли на критерії накладаються додатковаі умови допустимості [7]. Такими умовами можуть бути, наприклад, умови досягнення критеріями мінімальних допустимих значень. Якщо деякий критерій на множині оптимальних розв'язків не досягає вказаного мінімального допустимого значення, то він є недопустимим і виключається з розгляду. Це означає, що рішення повинно прийматися з використанням критеріїв нижчого рангу. Таку задачу можна розв'язати, використовуючи модифікацію схеми скаляризації [1-3]. До розв'язання даної задачі в роботі пропонується підхід, який полягає у її зведенні до задачі однокритеріальної оптимізації з використанням коефіцієнтів додатної лінійної згортки, що дозволяє представляти лексикографічний порядок на множині допустимих розв'язків. Такий підхід має ряд переваг. Вони пов'язані з можливістю застосування класичних методів розв'язання дискретних задач оптимізації та розгляду тільки однієї задачі.

У першому розділі розглядаються класична та лексикографічна задачі про покриття. У другому розділі описується підхід до знаходження досяжних оптимальних розв'язків лексикографічної задачі про покриття [2]. Лексикографічна задача про покриття з альтернативними критеріями розглядається у третьому розділі. Алгоритм знаходження досяжних оптимальних розв'язків цієї задачі описується в четвертому роділі. У п'ятому розділі розглядаються ілюстративні приклади.

1. Лексикографічна задача про покриття. Задача про покриття є однією із класичних задач дискретного програмування [2,6]. Ця задача полягає у знаходженні такого мінімального набору ребер заданого графа G, щоб будь-яка його вершина була інцидентна деякому ребру.

Введемо позначення:

m– кількість вершин;

i– вершина графа $(i = 1, 2, ..., m)$;

n– кількість ребер;

j– ребро графа $(j = 1, 2, ..., n)$;

$A = \|a_{ij}\|$– матриця инцидентності;

$\mathrm{a}_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ якщо вершина і інцинентна ребру j}, \\ 0, \quad \text{в іншому випадку}, \end{cases};$

$u_j = \begin{cases} 1, \text{ якщо ребро j увійде до покриття}, \\ 0, \quad \text{в іншому випадку}, \end{cases}, \quad j = 1, 2, ..., n;$

$u = (u_1, u_2, ..., u_n)$.

При введених позначеннях класична задача про покриття може бути представлена наступною математичною моделлю:

$$\min \ c_1 (u) = \sum_{j=1}^{n} u_j, \tag{1}$$

при умовах

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} u_j \geq 1, \ i = 1, 2, ..., m, \tag{2}$$

$$u_j \in \{0, 1\}, \ j = 1, 2, ..., n. \tag{3}$$

Позначимо через U множину допустимих розв'язків задачі, що задається умовами (2)-(3).

В багатьох випадках задача (1)-(3) має декілька розв'язків. Вибір одного з них в якості оптимального може здійснюватись з використанням додаткових критеріїв

$$c_l (u) = \sum_{j=1}^{n} c_{lj} u_j, \ l = 2, 3, .., q.$$

Будемо вважати, що на множині критеріїв задано субординацію строгого ранжування $Rg (1, 2, ..., q)$.

Така задача надалі розглядається як лексикографічна задача про покриття [2]:

$$\max_{u\in U}{}^{L} c(u), \tag{4}$$

де

$$c(u) = (-c_1(u), c_2(u), ..., c_q(u)).$$

2. Знаходження досяжних оптимальних розв'язків лексикографічної задачі про оптимальне покриття. Задача лексикографічної оптимізації (4) може бути зведена до однокритеріальної задачі, в якій цільова функція є додатною лінійною згорткою критеріїв [2].

Нехай додатні коефіцієнти α_1, α_2, ..., α_q знайдені за правилом:

$$\alpha_q > 0, \tag{5}$$

$$\alpha_r > \frac{1}{\mu_r}\sum_{l=r+1}^{q} \alpha_l M_l,\ r = q-1, q-2, ..., 1, \tag{6}$$

де

$$0 < \mu_r \le \inf_{\substack{x, y \in U \\ c_r(x) \ne c_r(y)}} |c_r(x) - c_r(y)|, \tag{7}$$

$$M_l \ge \max_{x\in X} c_l(x) - \min_{x\in X} c_l(x). \tag{8}$$

Зауважимо, якщо $c_{lj} \ge 0$, то

$$0 < \mu_r \le \min_{c_{rj}>0} c_{rj},$$

$$M_l \ge \sum_{j=1}^{n} c_{lj}.$$

Тоді лексикографічна задача (4), згідно [2], може бути зведена до задачі

$$\max_{u\in U} L(u), \tag{9}$$

де

$$L(u) = -\alpha_1 c_1(u) + \alpha_2 c_2(u) + ... + \alpha_q c_q(u).$$

Тобто, багатокритеріальна задача зводиться до однокритеріальної, що значно спрощує її розв'язання.

3. Задача лексикографічної оптимізації про покриття з альтернативними критеріями. Будемо вважати, що в задачі (4)

$$c_l(u) \ge 0,\ \ u \in U,\ \ l = 2, 3, ..., q.$$

Накладемо на критерій $c_l(u)$, $l \in \{2, 3, ..., q\}$ додаткову умову допустимості, а саме досягнення наперед визначеного мінімального значення m_l:

$$c_l(u) \geq m_l. \tag{10}$$

Критерій, який на множині оптимальних розв'язків не досягає мінімального значення, виключається з розгляду як недопустимий.

На основі задачі (4) побудуємо задачу лексикографічної оптимізації, у якій оптимальний розв'язок знаходиться тільки з врахуванням допустимих критеріїв:

$$\max_{u\in U}{}^{L}\,\tilde{c}(u), \tag{11}$$

де

$$\tilde{c}(x) = (-c_1(u), c_{j_1}(u), c_{j_2}(u), ..., c_{j_k}(u)), \quad k \leq q-1, \quad \{j_1, j_2, ..., j_k\} \subset \{2, 3, ..., q\},$$

$$c_{j_i}(u^*) \geq m_{j_i}, \ i = 1, 2, ..., k.$$

Задача (15) є задачею лексикографічної оптимізації про покриття з альтернативними критеріями.

4. Знаходження досяжних розв'язків задачі лексикографічної оптимізації про покриття з альтернативними критеріями. Нехай

$$y_i = \begin{cases} 1, & \text{якщо критерій } c_i \text{ є допустимим,} \\ 0, & \text{інакше,} \end{cases} \quad i = 2, 3, ..., q.$$

Розглянемо задачу:

$$\max_{u\in\bar{U}} \ G(u) \tag{12}$$

де

$$G(u) = -\alpha_1 c_1(u) + \bar{\alpha}_2 c_2(u) + ... + \bar{\alpha}_q c_q(u),$$

коефіцієнти α_1, α_2, ..., α_q обчислюються за правилами (5)-(8), а множина допустимих розв'язків $\bar{U}$ задається системою обмежень

$$\begin{array}{l} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}u_j \geq 1, \ \ i = 1, 2, ..., m, \\ c_i(u) \geq m_i y_i, \ \ i = 2, 3, .., q, \\ \bar{\alpha}_i = \alpha_i y_i, \ \ i = 2, 3, .., q, \\ u_j \in \{0, 1\}, \ \ j = 1, 2, .., n, \\ y_i \in \{0, 1\}, \ \ i = 2, 3, .., q. \end{array}$$

Теорема. *Розв'язок задачі* (12) *є розв'язком задачі лексикографічної оптимізації з альтернативними критеріями* (11).

Доведення теореми легко отримати, враховуючи вибір коефіцієнтів α_1, α_2, ..., α_q.

5. Ілюстративні приклади.

Приклад 1. Розглянемо задачу про покриття, у якій граф (на Рис. 1 курсивом позначено номери ребер)

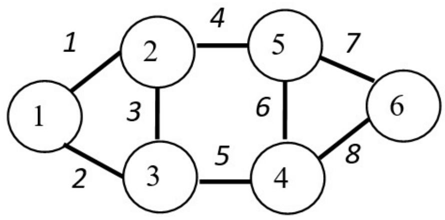

Рис.1

задається матрицею інцидентності

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Для кожного ребра задані оцінки (на Рис. 2 вони вказані у дужках після номера ребра), які визначають додаткові критерії c_2, c_3, значення яких бажано максимізувати. Для цих критеріїв встановлені мінімальні допустимі значення

$m_2 = 11,\ m_3 = 6.$

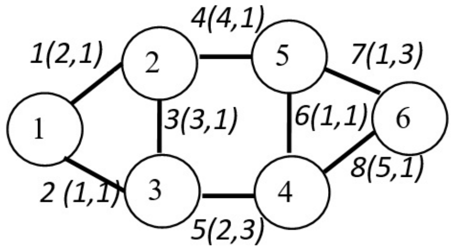

Рис.2

Будемо вважати, що критерій c_2 має вищий ранг порівняно з критерієм c_3. Розглянемо спочатку задачу лексикографічної оптимізації

$$\max_{u \in U}{}^{L}\ c(u), \tag{13}$$

де

$$c(u) = (-c_1(u), c_2(u), c_3(u)),$$

$$c_1(u) = \sum_{j=1}^{8} u_j,$$

$$c_2(u) = 2u_1 + u_2 + 3u_3 + 4u_4 + 2u_5 + u_6 + u_7 + 5u_8,$$

$$c_3(u) = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + 3u_5 + u_6 + 3u_7 + u_8,$$

а множина допустимих розв'язків U задається системою обмежень

$$\begin{aligned}
&u_1 + u_2 \geq 1,\\
&u_1 + u_3 + u_4 \geq 1,\\
&u_2 + u_3 + u_5 \geq 1,\\
&u_5 + u_6 + u_8 \geq 1,\\
&u_4 + u_6 + u_7 \geq 1,\\
&u_7 + u_8 \geq 1,\\
&u_j \in \{0, 1\}\,, j = 1, 2, ..., 8.
\end{aligned}$$

Знайдемо коефіцієнти $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ згідно з формулами (5)-(8):

$$\alpha_3 = 1,$$

$$M_3 = 12, \mu_2 = 1,$$

$$\alpha_2 = 13 > \alpha_3 M_3 = 12,$$

$$M_2 = 19,\ \mu_1 = 1,$$

$$\alpha_1 = 260 > \alpha_2 M_2 + \alpha_3 M_3 = 259.$$

Для знаходження досяжних оптимальних розв'язків лексикографічної задачі про покриття з оптимальними критеріями необхідно розв'язати наступну задачу оптимізації:

$$\max_{u \in \bar{U}} \left(-\alpha_1 c_1 (u) + \bar{\alpha}_2 c_2 + \bar{\alpha}_3 c_3\right),$$

де множина допустимих розв'язків $\bar{U}$ задається системою обмежень

$$\begin{aligned}
&u_1 + u_2 \geq 1,\\
&u_1 + u_3 + u_4 \geq 1,\\
&u_2 + u_3 + u_5 \geq 1,\\
&u_5 + u_6 + u_8 \geq 1,\\
&u_4 + u_6 + u_7 \geq 1,\\
&u_7 + u_8 \geq 1,\\
&c_2 (u) = 2u_1 + u_2 + 3u_3 + 4u_4 + 2u_5 + u_6 + u_7 + 5u_8 \geq 11y_2,\\
&\bar{\alpha}_2 = \alpha_2 y_2,\\
&c_3 (u) = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + 3u_5 + u_6 + 3u_7 + u_8 \geq 6y_3,\\
&\bar{\alpha}_3 = \alpha_3 y_3,\\
&u_j \in \{0, 1\}\,, j = 1, 2, ..., 8.\\
&y_2, y_3 \in \{0, 1\}\,.
\end{aligned}$$

Дана задачає є скалярною задачею дискретного програмування. Її оптимальний розв'язок має вигляд: $u^* = (1, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0)$, $y_2^* = 0$, $y_3^* = 1$, $c_1 (u^*) = 3$, $c_2 (u^*) = 5$, $c_3 (u^*) = 7$. Тут $y_2^* = 0$, так як критерій c_2 не може досягти заданого мінімального значення $m_2 = 11$. Тому $\alpha_2 = 0$ і критерій c_2 було виключено з розгляду.

Приклад 2. Розглянемо попередній приклад, в якому встановлені інші найменші допустимі значення для критеріїв: $m_2 = 8,\ m_3 = 6$.

При заданих обмеженнях оптимальний розв'язок має вигляд:

$$u^* = (0,1,0,1,0,0,0,1)\,, \quad y_2^* = 1,\ y_3^* = 0, \quad c_1(u^*) = 3,\ c_2(u^*) = 10,\ c_3(u^*) = 3.$$

У даному випадку $y_3^* = 0$, так як критерій $_3$ не може досягти заданого мінімального допустимого значення і він виключається з розгляду.

Приклад 3. Розглянемо приклад 1, в якому встановлені такі найменші допустимі значення для критеріїв:

$$m_2 = 11,\ m_3 = 10.$$

При заданих обмеженнях оптимальний розв'язок має вигляд: $u^* = (1,0,0,0,1,0,1,0)$, $y_2^* = 0,\ y_3^* = 0$, $c_1(u^*) = 3,\ c_2(u^*) = 5,\ c_3(u^*) = 7$. Як бачимо $y_2^* = 0$ і $y_3^* = 0$ бо критерії c_2 і c_3 не можуть досягти заданих мінімальних значень $m_2 = 11$ і $m_3 = 10$. Тому $\bar{\alpha}_2 = 0$ і $\bar{\alpha}_3 = 0$, а отже критерії c_2, c_3 було виключено з розгляду.

Висновки. У роботі розглянуто задачу лексикографічної оптимізації про покриття з альтернативними критеріями. Для знаходження досяжних оптимальних розв'язків даної задачі запропоновано підхід, який грунтується на використанні коефіцієнтів додатної лінійної згортки критеріїв. Вони дозволяють побудувати функціонал, що представляє лексикографічний порядок віддачі переваги на множині допустимих розв'язків. Даний підхід вигідно відрізняється від можливого застосування схеми скаляризації [1-5], так як дозволяє побудувати достатньо просту однокритеріальну математичну модель. Одержана скалярна задача може бути розв'язана класичними методами розв'язання дискретних задач оптимізації [4,6]. Зауважимо також, що у порівнянні зі схемою скаляризації обчислювальна складність розв'язання задачі значно менша, оскільки розв'язується тільки одна однокритеріальна задача.

Список використаної літератури

1. *Червак Ю.Ю.* Оптимізація. Непокращуваний вибір / Ю.Ю. Червак. – Ужгород: Ужгород. нац. ун-т, 2002. – 312 с.
2. *Подиновский В.В., Гаврилов В.М.* Оптимизация по последовательно применяемым критериям. – М.:Наука, 1975. – 192 с.
3. *Подиновський В.В.* Введение в теорию важности критериев в многокритериальных задачах принятия решений. М.: Физматлит, 2007.
4. Сергиенко И.В. Задачи дискретной оптимизации. Проблемы, методы решения исследования / И.В Сергиенко, В.П. Шило. – К.: Наукова думка, 2003. – 261с.
5. *Ногин В.Д.* Принятие решений при многих критериях: учебно-методическое пособие / В.Д. Ногин. – СПб: Издательство "ЮТАС", 2007. – 104 с.
6. *Корбут А.А.* Дискретное программирование / А.А. Корбут, Ю.Ю. Финкельштейн, Д.Б.Юдин. – М.:Наука, 1969 – 368с.
7. *Брила А.Ю.* Достижимость оптимальных решений линейной задачи многокритериальной оптимизации с альтернативными критериями в транзитивной субординации / А.Ю. Брила // Международный научно-технический журнал "Проблемы управления и информатики". – 2011. – №4. – С. 68-72.

Одержано 30.04.2016