УДК 519.21, 519.71

Т. О. Лукашів (Чернівецький нац. ун-т ім. Ю. Федьковича)

СТАБІЛІЗАЦІЯ ОДНОГО ВИДУ СИСТЕМИ ВИПАДКОВОЇ СТРУКТУРИ

The stabilization problem for dynamic random structure system with Markov switchings and linear fractional uncertainty is solved.

Розв'язано задачу стабілізації для стохастичної динамічної системи випадкової структури з марковськими перемиканнями і дробово-лінійною невизначеністю.

1. Вступ. Математичні моделі, які описуються системами з марковськими параметрами використовуються для вивчення процесів різної природи, наприклад, процесів виробництва, систем масового обслуговування [8] тощо.

Цікавість викликає той факт, що багато реальних систем з випадковими змінами, наприклад, екологічні зміни і т.д., можуть бути описані лінійними стохастичними динамічними системами з марковськими перемиканнями й певного роду невизначеністю. Деякі результати для таких систем отримані в роботі [10] і в процитованих там джерелах.

У монографії І.Я. Каца [3] розглянута модель стохастичних рівнянь з марковськими параметрами, так званих рівнянь з випадковою структурою, які дозволяють розглядати стійкість систем із розривними фазовими траєкторіями. В праці Є.Ф. Царькова, М.Л. Свердана [6] розглянута стійкість різницевих і динамічних систем із урахуванням марковських параметрів і зовнішніх марковських перемикань. Монографія [7] містить узагальнення праць [3] і [6], а саме: розглянуто стохастичні дифузійні рівняння з урахуванням марковських параметрів, що зумовлюють внутрішню зміну структури системи із збереженням властивості стохастичної неперервності реалізації за І.Я. Кацом, а також враховуються імпульсні марковські перемикання за Є.Ф. Царьковим. Малик І.В. у праці [5] розглянув стохастичні імпульсні системи з напівмарковськими параметрами.

В [4] вивчено проблему стабілізації зі сталим оберненим зв'язком для лінійних стохастичних динамічних систем випадкової структури за І.Я. Кацом [3] з марковськими перемиканнями за Є.Ф. Царьковим [6] та із дробово-лінійною невизначеністю за Ф. Лонгом [10], а у даній праці розв'язано задачу стабілізації для таких систем з динамічним оберненим зв'язком.

2. Постановка задачі. Розглянемо стохастичну динамічну систему Іто випадкової структури з дробово-лінійною невизначеністю

$$dx(t) = [A(t, \xi(t))x(t) + B(t, \xi(t))u(t)]dt + \sigma(\xi(t))x(t)dw(t),$$

$$z(t) = C(t, \xi(t))x(t), t \in \mathbb{R}_+ \backslash \mathbb{T}, \tag{1}$$

з марковськими перемиканнями

$$\Delta x(t)|_{t=t_k} = x(t_k) - x(t_k-) = g(t_k-, \xi(t_k-), \eta_k, x(t_k-)),$$

$$t_k \in \mathbb{T} := \{t_k \uparrow, k = 0, 1, 2, \ldots\}, \lim_{k\to\infty} t_k = +\infty, \tag{2}$$

і початковими умовами

$$x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^m, \quad \xi(0) = y \in \mathbb{Y}, \quad \eta_0 = h \in \mathbb{H}. \tag{3}$$

Тут $x(t) \in \mathbb{R}^m$ — вектор стану, $\{\xi(t), t \geq 0\}$ — марковський процес із значеннями в скінченному просторі $\mathbb{Y} = \{y_1, y_2, \ldots, y_N\}$; $\{\eta_k, k \geq 0\}$ — ланцюг Маркова із значеннями у вимірному просторі $\mathbb{H}$, $w(t) \in \mathbb{R}^1$ — стандартний вінерів процес [1], [2]; процеси ξ, η та w незалежні.

Функція $g : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{Y} \times \mathbb{H} \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ є вимірною за всіма аргументами і Ліпшицевою за останнім аргументом $A : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{Y} \to \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m, B : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{Y} \to \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$, $\sigma : \mathbb{Y} \to \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m, C : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{Y} \to \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ — матриці залежні від t та ξ, причому

$$A(t, y_i) = A(y_i) + M_A(y_i) H_A(t, y_i) N_A(y_i),$$
$$H_A(t, y_i) = \Phi_A(t, y_i)[I - G_A(y_i)\Phi_A(t, y_i)]^{-1},$$
$$B(t, y_i) = B(y_i) + M_B(y_i) H_B(t, y_i) N_B(y_i),$$
$$H_B(t, y_i) = \Phi_B(t, y_i)[I - G_B(y_i)\Phi_B(t, y_i)]^{-1},$$
$$C(t, y_i) = C(y_i) + M_C(y_i) H_C(t, y_i) N_C(y_i),$$
$$H_C(t, y_i) = \Phi_C(t, y_i)[I - G_C(y_i)\Phi_C(t, y_i)]^{-1},$$

де $A(y_i)$, $M_A(y_i)$, $N_A(y_i)$, $G_A(y_i)$, $B(y_i)$, $M_B(y_i)$, $N_B(y_i)$, $G_B(y_i)$, $C(y_i)$, $M_C(y_i)$, $N_C(y_i), G_C(y_i)$ — відомі матриці відповідних розмірностей; $\Phi_A(t, y_i)$, $\Phi_B(t, y_i)$, $\Phi_C(t, y_i)$ — вимірні невідомі матричні функції, для яких виконуються нерівності

$$\Phi_A^T(t, y_i)\Phi_A(t, y_i) \leq I, \ \Phi_B^T(t, y_i)\Phi_B(t, y_i) \leq I, \ \Phi_C^T(t, y_i)\Phi_C(t, y_i) \leq I,$$

I — одинична матриця.

Еволюція марковського процесу $\{\xi(t), t \geq 0\}$ [1], [2] задається розподілом ймовірностей

$$\mathbb{P}\{\xi(t + \Delta t) = y_j / \xi(t) = y_i\} =$$
$$= \begin{cases} \lambda_{ij}\Delta t + o(\Delta t), & y_i \to y_j, \\ 1 + \lambda_{ii}\Delta t + o(\Delta t), \ \xi(\tau) = y_i, & t \leq \tau \leq t + \Delta t, \end{cases}$$

де $\lambda_{ij} \geq 0$ — інтенсивність ймовірності переходу $y_i \to y_j, i \neq j$, у момент часу t: $\lambda_{ii} = -\sum\limits_{j \neq i} \lambda_{ij}; o(\Delta t)$ — нескінченно мала, визначена як $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{o(\Delta t)}{\Delta t} = 0$.

Означення 1. Систему (1)-(3) назвемо стохастично стійкою, якщо для всіх реалізацій $x(t) \in \mathbb{R}^m$ і $t \geq 0$ існує додатна стала $T(x_0, y, h)$, що при будь-яких початкових даних (x_0, y, h) виконується нерівність

$$\mathbb{E} \int\limits_0^\infty |x(t)|^2 dt \leq T(x_0, y, h),$$

де $\mathbb{E}\{\cdot\}$ — знак УМС.

Введемо позначення.

$$A(t, y_i) = A_i(t), \quad A(y_i) = A_i, \quad \sigma(y_i) = \sigma_i,$$

$$G_A(y_i,\eta_k)=G_{Aik},\quad H_A(t,y_i,\eta_k)=H_{Aik}(t),$$
$$M_A(y_i,\eta_k)=M_{Aik},\quad N_A(y_i,\eta_k)=N_{Aik},$$
$$P(y_i,\eta_k)=P_{ik},\quad Q_A(y_i,\eta_k)=Q_{Aik},$$
$$R_A(y_i,\eta_k)=R_{Aik},\quad \varepsilon_A(y_i,\eta_k)=\varepsilon_{Aik},$$
$$\Pi_(y_i,\eta_k)=\Pi_{ik},$$
$$B(t,y_i)=B_i(t),\quad B(y_i)=B_i,$$
$$G_B(y_i,\eta_k)=G_{Bik},\quad H_B(t,y_i,\eta_k)=H_{Bik}(t),$$
$$M_B(y_i,\eta_k)=M_{Bik},\quad N_B(y_i,\eta_k)=N_{Bik},$$
$$Q_B(y_i,\eta_k)=Q_{Bik},$$
$$R_B(y_i,\eta_k)=R_{Bik},\quad \varepsilon_B(y_i,\eta_k)=\varepsilon_{Bik},$$
$$C(t,y_i)=C_i(t),\quad C(y_i)=C_i,$$
$$G_C(y_i,\eta_k)=G_{Cik},\quad H_C(t,y_i,\eta_k)=H_{Cik}(t),$$
$$M_C(y_i,\eta_k)=M_{Cik},\quad N_C(y_i,\eta_k)=N_{Cik},$$
$$Q_C(y_i,\eta_k)=Q_{Cik},\quad \varepsilon_C(y_i,\eta_k)=\varepsilon_{Cik},$$
$$X(y_i,\eta_k)=X_{ik},\quad Y(y_i,\eta_k)=Y_{ik},$$
$$\mathbf{k}_B(y_i,\eta_k)=\mathbf{k}_{Bik},\quad \mathbf{k}_C(y_i,\eta_k)=\mathbf{k}_{Cik}.$$

Мають місце твердження.

Лема 1. [11] Нехай задані H, E — сталі матриці й обмежена за нормою матриця $\Phi(t)$, для якої виконується умова $\Phi^T(t)\Phi(t)\le I$. Тоді для довільного $\varepsilon>0$ має місце нерівність

$$H\Phi(t)E+E^T\Phi(t)H^T\le\varepsilon HH^T+\varepsilon^{-1}E^TE.$$

Лема 2. [9] Нехай задано матрицю G для якої виконується умова $G^TG<I$ і визначено множину

$$\zeta=\{H(t)=\Phi(t)[I-G\Phi(t)]^{-1},\ \Phi^T(t)\Phi(t)\le I\}.$$

Тоді множину можна задати у вигляді

$$\zeta=\{H(t)=(I-G^TG)G^T+(I-G^TG)^{-\frac{1}{2}}\Pi(t),$$
$$\Pi^T(t)\Pi(t)\le I+(I-G^TG)^{-1}G^T\}.$$

Теорема 1. [4] Якщо існує множина додатно визначених матриць, що для всіх $i=\overline{1,N}, k\ge0$ та для всіх допустимих дробово-лінійних невизначеностей виконується нерівність

$$\begin{pmatrix} J_{Aik} & * & * & * \\ R^T_{Aik} & -Q_{Ai} & 0 & 0 \\ \epsilon_{Aik}N_{Ai} & 0 & I & 0 \\ P_{ik}\sigma_i & 0 & 0 & -P_{Aik} \end{pmatrix}<0,$$

де $*$ позначено симетричні блоки, і

$$J_{Aik} = A_{ik}^T P_{ik} + P_{ik} A_{ik} + \sum_{j=1}^{N} \lambda_{ij} P_{jk},$$

$$Q_{Ai} = I - G_{Ai}^T G_{Ai},$$

$$R_{Aik} = \epsilon_{Aik} N_{Ai}^T G_{Ai} + \epsilon_{Aik}^{-1} P_{ik} M_{Ai},$$

тоді система (1)-(3) є стохастично стійкою.

2. Основний результат. Закон керування з динамічним оберненим зв'язком задається наступною конструкцією [10]:

$$\dot{x}_c(t) = K_A(\xi(t), \eta_k) x_c(t) + K_B(\xi(t), \eta_k) z(t),$$

$$u(t) = K_C(\xi(t), \eta_k) x_c(t), \tag{4}$$

$$x_c(0) = 0, \quad \xi(0) = y \in \mathbb{Y}, \quad \eta = h \in \mathbb{H},$$

де $x_c \in \mathbb{R}^m$ — стан керованої системи, $K_A(\xi(t), \eta_k), K_B(\xi(t), \eta_k), K_C(\xi(t), \eta_k)$ — матриці, які необхідно визначити для кожного стану $\xi(t) \in \mathbb{Y}$ та $\eta_k, k \geq 0$, причому значення ξ та η залежать від конкретної моделі.

Теорема 2. Якщо існують множини матриць

$$\{X_{ik}^T = X_{ik} > 0 | i = \overline{1, N}, k \geq 0\}, \quad \{Y_{ik} > 0 | i = \overline{1, N}, k \geq 0\},$$

$$\{\mathbf{k}_{Bik} | i = \overline{1, N}, k \geq 0\}, \quad \{\mathbf{k}_{Cik} | i = \overline{1, N}, k \geq 0\}$$

і множини додатних сталих

$$\{\varepsilon_{Aik} | i = \overline{1, N}, k \geq 0\}, \quad \{\varepsilon_{Bik} | i = \overline{1, N}, k \geq 0\}, \quad \{\varepsilon_{Cik} | i = \overline{1, N}, k \geq 0\}$$

для яких при всіх $i = \overline{1, N}, k \geq 0$ та всіх допустимих дробово-лінійних невизначеностей виконуються нерівності

$$\begin{pmatrix} J_{d1ik} & * & * & * & * & * & * & * \\ R_{A2ik}^T & -Q_{Aik} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ R_{B2ik}^T & 0 & -Q_{Bik} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \varepsilon_{Cik}^{-1} G_{Cik}^T N_{Cik} Y_{ik} & 0 & 0 & -Q_{Cik} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \varepsilon_{Aik}^{-1} N_{Aik} Y_{ik} & 0 & 0 & 0 & -I & 0 & 0 & 0 \\ \varepsilon_{Bik}^{-1} N_{Bik} \mathbf{k}_{Cik} & 0 & 0 & 0 & 0 & -I & 0 & 0 \\ \varepsilon_{Cik}^{-1} N_{Cik} Y_{ik} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -I & 0 \\ \mathbf{S}^T(Y_{ik}) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\mathcal{Y}_k(i) \end{pmatrix} < 0, \tag{5}$$

$$\begin{pmatrix} J_{d2ik} & * & * & * & * \\ \varepsilon_{Aik} M_{Aik}^T X_{ik} + \varepsilon_{Aik}^{-1} G_{Aik}^T N_{Aik} & -Q_{Aik} & 0 & 0 & 0 \\ \varepsilon_{Bik} M_{Bik}^T X_{ik} & 0 & -Q_{Bik} & 0 & 0 \\ \varepsilon_{Cik} M_{Cik}^T \mathbf{k}_{Bik}^T + \varepsilon_{Cik}^{-1} G_{Cik}^T N_{Cik} & 0 & 0 & -Q_{Cik} & 0 \\ \sigma_i X_{ik} & 0 & 0 & 0 & -X_{ik} \end{pmatrix} < 0, \tag{6}$$

де $*$ позначено симетричні блоки і

$$\begin{gathered}
J_{d1ik} = A_i Y_{ik} + Y_{ik}^T A_i + B_i \mathbf{k}_{Cik} + \mathbf{k}_{Cik}^T B_i^T + \lambda_{ii} Y_{ik}, \\
J_{d2ik} = X_{ik} A_i + \mathbf{k}_{Bik} C_i + A_i^T X_{ik} + C_i^T \mathbf{k}_{Bik}^T + \\
+ \sum_{j=1}^{N} \lambda_{ij} X_{ij} + \varepsilon_{Aik}^{-2} N_{Aik}^T N_{Aik} + \varepsilon_{Cik}^{-2} N_{Cik}^T N_{Cik}, \\
\mathbf{S}(Y_{ik}) = Y_{ik}[\sqrt{\lambda_{i1}} I, \ldots, \sqrt{\lambda_{i,i-1}} I, \sqrt{\lambda_{i,i+1}} I, \ldots, \sqrt{\lambda_{iN}} I,], \\
\mathcal{Y}_k(i) = diag\{Y_{ik}, \ldots, Y_{i-1,k}, Y_{i+1,k}, \ldots, Y_{Nk}\}, \\
R_{A2ik} = \varepsilon_{Aik} M_{Aik} + \varepsilon_{Aik}^{-1} Y_{Aik}^T N_{Aik}^T G_{Aik}, \\
R_{B2ik} = \varepsilon_{Bik} M_{Bik} + \varepsilon_{Bik}^{-1} \mathbf{k}_{Cik}^T N_{Bik}^T G_{Bik}, \\
Q_{Aik} = I - G_{Aik}^T G_{Aik}, \\
Q_{Bik} = I - G_{Bik}^T G_{Bik}, \\
Q_{Cik} = I - G_{Cik}^T G_{Cik}.
\end{gathered} \tag{7}$$

Тоді існує оптимальне керування (4), яке стабілізує систему (1)-(3) у розумінні стохастичної стійкості, причому воно визначається формулою

$$K_{Aik} = [X_{ik} - Y_{ik}^{-1}]^{-1} \left[\begin{gathered}
A_i^T Y_{ik}^{-1} + X_{ik} A_i + \mathbf{k}_{Bik} C_i + \\
+ X_{ik} B_{ik} \mathbf{k}_{Cik} Y_{ik}^{-1} + \\
+ \sum_{j=1}^{N} \lambda_{ij} Y_{jk}^{-1} + N_{Aik}^T G_{Aik} Q_{Aik}^{-1} M_{Aik}^T Y_{ik}^{-1} + \\
+ X_{ik} M_{Aik} Q_{Aik}^{-1} G_{Aik}^T N_{Aik} + \\
+ X_{ik} M_{Bik} Q_{Bik}^{-1} G_{Bik}^T N_{Bik} \mathbf{k}_{Cik} Y_{ik}^{-1} + \\
+ \mathbf{k}_{Bik} M_{Cik} Q_{Cik}^{-1} G_{Cik}^T N_{Cik} + \\
+ \varepsilon_{Aik}^2 X_{ik} M_{Aik} Q_{Aik}^{-1} M_{Aik}^T Y_{ik}^{-1} + \\
+ \varepsilon_{Aik}^{-2} N_{Aik}^T G_{Aik} Q_{Aik}^{-1} G_{Aik}^T N_{Aik} + \\
+ \varepsilon_{Aik}^{-2} N_{Aik}^T N_{Aik} + \\
+ \varepsilon_{Bik}^2 X_{ik} M_{Bik} Q_{Bik}^{-1} M_{Bik}^T Y_{ik}^{-1} + \\
+ \varepsilon_{Cik}^{-2} N_{Cik}^T G_{Cik} Q_{Cik}^{-1} G_{Cik}^T N_{Cik} + \\
+ \varepsilon_{Cik}^{-2} N_{Cik}^T N_{Cik} + \sigma_i^T X_{ik} \sigma_i
\end{gathered} \right],$$

$$K_{Bik} = [Y_{ik}^{-1} - X_{ik}]^{-1} \mathbf{k}_{Bik}, \; K_{Cik} = \mathbf{k}_{Cik} Y_{ik}^{-1}. \tag{8}$$

Доведення. Підставивши у систему (1) керування (4), отримаємо

$$d\tilde{x} = \tilde{A}(t, \xi(t)) \tilde{x}(t) dt + \tilde{\sigma}(\xi(t)) \tilde{x}(t) dw(t), \tag{9}$$

де $\tilde{A}(t, \xi(t))$ та $\tilde{\sigma}(\xi(t))$, $\xi(t) \in \mathbb{Y}$ — матриці системи відповідних розмірностей, які залежать від ξ і t, а також

$$\tilde{x}(t) = [x^T(t), x_c^T(t)]^T \in \mathbb{R}^{2n},$$

$$\tilde{A}(t, y_i, \eta_k) = \tilde{A}_{ik}(t) = \tilde{A}_{ik} + \Delta \tilde{A}_{Aik}(t) + \Delta \tilde{A}_{Bik}(t) + \Delta \tilde{A}_{Cik}(t),$$

$$\tilde{A}_{ik} = \begin{bmatrix} A_i & B_i K_{Cik} \\ K_{Bik} C_i & K_{Aik} \end{bmatrix}, \qquad \tilde{\sigma}_i = \begin{bmatrix} \sigma_i & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\Delta \tilde{A}_{Aik}(t) = \begin{bmatrix} M_{Aik} H_{Aik}(t) N_{Aik} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\Delta\tilde{A}_{Bik}(t)=\begin{bmatrix} 0 & M_{Bik}H_{Bik}(t)N_{Bik}K_{Cik} \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\Delta\tilde{A}_{Cik}(t)=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ K_{Bik}M_{Cik}H_{Cik}(t)N_{Cik} & 0 \end{bmatrix}.$$

На основі теореми 1, система (9) є стохастично стійкою, якщо існує множина симетричних додатно визначених матриць $\{P_{ik}|i=\overline{1,N},k\geq 0\}$ таких, що для всіх $y_i\in\mathbb{Y},i=\overline{1,N}$, та $\eta_k,k\geq 0$ виконується нерівність

$$\tilde{A}_{ik}^T(t)P_{ik}+P_{ik}\tilde{A}_{ik}(t)+\tilde{\sigma}_{ik}^TP_{ik}\tilde{\sigma}_{ik}+\sum_{j=1}^{N}\lambda_{ij}P_{jk}<0. \tag{10}$$

Нехай $Q_{Aik}=I-G_{Aik}^TG_{Aik},Q_{Bik}=I-G_{Bik}^TG_{Bik}$ і $Q_{Cik}=I-G_{Cik}^TG_{Cik}$. Використавши лему 2, отримаємо:

$$\Delta\tilde{A}_{Aik}(t)=\begin{bmatrix} M_{Aik} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Q_{Aik}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} G_{Aik}^T & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} N_{Aik} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}+$$

$$+\begin{bmatrix} M_{Aik} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Q_{Aik}^{-1/2} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \Pi_{Aik}(t) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} N_{Aik} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}=$$

$$=\tilde{M}_{Aik}\tilde{Q}_{Aik}^{-1}\tilde{G}_{Aik}^T\tilde{N}_{Aik}+\tilde{M}_{Aik}\tilde{Q}_{Aik}^{-1/2}\tilde{\Pi}_{Aik}(t)\tilde{N}_{Aik},$$

$$\Delta\tilde{A}_{Bik}(t)=\begin{bmatrix} 0 & M_{Bik} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & Q_{Bik}^{-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & G_{Bik}^T \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & N_{Bik}K_{Cik} \end{bmatrix}+$$

$$+\begin{bmatrix} 0 & M_{Bik} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & Q_{Bik}^{-1/2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \Pi_{Bik}(t) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & N_{Bik}K_{Cik} \end{bmatrix}=$$

$$=\tilde{M}_{Bik}\tilde{Q}_{Bik}^{-1}\tilde{G}_{Bik}^T\tilde{N}_{Bik}+\tilde{M}_{Bik}\tilde{Q}_{Bik}^{-1/2}\tilde{\Pi}_{Bik}(t)\tilde{N}_{Bik},$$

$$\Delta\tilde{A}_{Cik}(t)=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ K_{Bik}M_{Cik} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Q_{Cik}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} G_{Cik}^T & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} N_{Cik} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}+$$

$$+\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ K_{Bik}M_{Cik} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Q_{Cik}^{-1/2} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \Pi_{Cik}(t) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} N_{Cik} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}=$$

$$=\tilde{M}_{Cik}\tilde{Q}_{Cik}^{-1}\tilde{G}_{Cik}^T\tilde{N}_{Cik}+\tilde{M}_{Cik}\tilde{Q}_{Cik}^{-1/2}\tilde{\Pi}_{Cik}(t)\tilde{N}_{Cik}. \tag{11}$$

Використавши (11) і лему 1, отримаємо

$$P_{ik}\Delta\tilde{A}_{Aik}(t)+\Delta\tilde{A}_{Aik}^T(t)P_{ik}\leq P_{ik}\tilde{M}_{Aik}\tilde{Q}_{Aik}^{-1}\tilde{G}_{Aik}^T\tilde{N}_{Aik}+$$

$$+\tilde{N}_{Aik}^T\tilde{G}_{Aik}\tilde{Q}_{Aik}^{-1}\tilde{M}_{Aik}^TP_{ik}+\varepsilon_{Aik}^{-2}\tilde{N}_{Aik}^T\tilde{N}_{Aik}+$$

$$+\varepsilon_{Aik}^2P_{ik}\tilde{M}_{Aik}\tilde{Q}_{Aik}^{-1}\tilde{M}_{Aik}^TP_{ik}+$$

$$+\varepsilon_{Aik}^{-2}\tilde{N}_{Aik}^T\tilde{G}_{Aik}\tilde{Q}_{Aik}^{-1}\tilde{G}_{Aik}^T\tilde{N}_{Aik},$$

$$P_{ik}\Delta\tilde{A}_{Bik}(t)+\Delta\tilde{A}_{Bik}^T(t)P_{ik}\leq P_{ik}\tilde{M}_{Bik}\tilde{Q}_{Bik}^{-1}\tilde{G}_{Bik}^T\tilde{N}_{Bik}+$$

$$+\tilde{N}_{Bik}^T\tilde{G}_{Bik}\tilde{Q}_{Bik}^{-1}\tilde{M}_{Bik}^TP_{ik}+\varepsilon_{Bik}^{-2}\tilde{N}_{Bik}^T\tilde{N}_{Bik}+$$

$$+\varepsilon_{Bik}^{2} P_{ik} \tilde{M}_{Bik} \tilde{Q}_{Bik}^{-1} \tilde{M}_{Bik}^{T} P_{ik}+$$
$$+\varepsilon_{Bik}^{-2} \tilde{N}_{Bik}^{T} \tilde{G}_{Bik} \tilde{Q}_{Bik}^{-1} \tilde{G}_{Bik}^{T} \tilde{N}_{Bik},$$
$$P_{ik} \Delta \tilde{A}_{Cik}(t)+\Delta \tilde{A}_{Cik}^{T}(t) P_{ik} \leq P_{ik} \tilde{M}_{Cik} \tilde{Q}_{Cik}^{-1} \tilde{G}_{Cik}^{T} \tilde{N}_{Cik}+$$
$$+\tilde{N}_{Cik}^{T} \tilde{G}_{Cik} \tilde{Q}_{Cik}^{-1} \tilde{M}_{Cik}^{T} P_{ik}+\varepsilon_{Cik}^{-2} \tilde{N}_{Cik}^{T} \tilde{N}_{Cik}+$$
$$+\varepsilon_{Cik}^{2} P_{ik} \tilde{M}_{Cik} \tilde{Q}_{Cik}^{-1} \tilde{M}_{Cik}^{T} P_{ik}+$$
$$+\varepsilon_{Cik}^{-2} \tilde{N}_{Cik}^{T} \tilde{G}_{Cik} \tilde{Q}_{Cik}^{-1} \tilde{G}_{Cik}^{T} \tilde{N}_{Cik}, \tag{12}$$

На основі матричної нерівності (12), умова (10) буде виконуватись, якщо виконуватиметься нерівність

$$\tilde{A}_{ik}^{T} P_{ik}+P_{ik} \tilde{A}_{ik}+\sum_{j=1}^{N} \lambda_{ij} P_{jk}+\tilde{\sigma}_{i}^{T} P_{ik} \tilde{\sigma}_{i}+$$
$$+P_{ik} \tilde{M}_{Aik} \tilde{Q}_{Aik}^{-1} \tilde{G}_{Aik}^{T} \tilde{N}_{Aik}+$$
$$+\tilde{N}_{Aik}^{T} \tilde{G}_{Aik} \tilde{Q}_{Aik}^{-1} \tilde{M}_{Aik}^{T} P_{ik}+$$
$$+\varepsilon_{Aik}^{-2} \tilde{N}_{Aik}^{T} \tilde{N}_{Aik}+\varepsilon_{Bik}^{-2} \tilde{N}_{Bik}^{T} \tilde{N}_{Bik}+$$
$$+\varepsilon_{Aik}^{2} P_{ik} \tilde{M}_{Aik} \tilde{Q}_{Aik}^{-1} \tilde{M}_{Aik}^{T} P_{ik}+$$
$$+\varepsilon_{Aik}^{-2} \tilde{N}_{Aik}^{T} \tilde{G}_{Aik} \tilde{Q}_{Aik}^{-1} \tilde{G}_{Aik}^{T} \tilde{N}_{Aik}+$$
$$+P_{ik} \tilde{M}_{Bik} \tilde{Q}_{Bik}^{-1} \tilde{G}_{Bik}^{T} \tilde{N}_{Bik}+$$
$$+\tilde{N}_{Bik}^{T} \tilde{G}_{Bik} \tilde{Q}_{Bik}^{-1} \tilde{M}_{Bik}^{T} P_{ik}+$$
$$+\varepsilon_{Bik}^{2} P_{ik} \tilde{M}_{Bik} \tilde{Q}_{Bik}^{-1} \tilde{M}_{Bik}^{T} P_{ik}+$$
$$+\varepsilon_{Bik}^{-2} \tilde{N}_{Bik}^{T} \tilde{G}_{Bik} \tilde{Q}_{Bik}^{-1} \tilde{G}_{Bik}^{T} \tilde{N}_{Bik}+$$
$$+P_{ik} \tilde{M}_{Cik} \tilde{Q}_{Cik}^{-1} \tilde{G}_{Cik}^{T} \tilde{N}_{Cik}+$$
$$+\tilde{N}_{Cik}^{T} \tilde{G}_{Cik} \tilde{Q}_{Cik}^{-1} \tilde{M}_{Cik}^{T} P_{ik}+$$
$$+\varepsilon_{Cik}^{-2} \tilde{N}_{Cik}^{T} \tilde{N}_{Cik}+$$
$$+\varepsilon_{Cik}^{2} P_{ik} \tilde{M}_{Cik} \tilde{Q}_{Cik}^{-1} \tilde{M}_{Cik}^{T} P_{ik}+$$
$$+\varepsilon_{Cik}^{-2} \tilde{N}_{Cik}^{T} \tilde{G}_{Cik} \tilde{Q}_{Cik}^{-1} \tilde{G}_{Cik}^{T} \tilde{N}_{Cik}<0. \tag{13}$$

Очевидно, що нерівність (13) є нелінійною у просторі параметрів K_{Aik}, K_{Bik}, K_{Cik} і $P_{ik}, i=\overline{1, N}, k \geq 0$. Для того, щоб лінеаризувати нерівність (13) визначимо P_{ik}, L_{ik}, U_{ik} і V_{ik} наступним чином:

$$P_{ik}=\left[\begin{array}{cc} P_{1ik} & P_{2ik} \\ P_{2ik}^{T} & P_{3ik} \end{array}\right],$$

$$L_{ik}=\left(P_{1ik}-P_{2ik} P_{3ik}^{-1} P_{2ik}^{T}\right)^{-1},$$

$$U_{ik}=\left[\begin{array}{cc} L_{ik} & I \\ L_{ik} & 0 \end{array}\right],$$

$$V_{ik}=\left[\begin{array}{cc} I & 0 \\ 0 & -P_{3ik}^{-1} P_{2ik}^{T} \end{array}\right].$$

де P_{1ik}, P_{3ik} симетричні додатно визначені матриці. Домноживши зліва і справа нерівність (13) на $U_{ik}^T V_{ik}^T$ і $U_{ik} V_{ik}$ відповідно, отримаємо:

$$U_{ik}^T V_{ik}^T P_{ik} \tilde{A}_{ik} V_{ik} U_{ik} =$$

$$= \begin{bmatrix} A_i L_{ik} - B_i K_{Cik} P_{3ik}^{-1} P_{2ik}^T L_{ik} & A_i \\ \begin{pmatrix} P_{1ik} A_i L_{ik} - P_{1ik} B_i K_{Cik} P_{3ik}^{-1} P_{2ik}^T L_{ik} - \\ -P_{2ik} K_{Aik} P_{3ik}^{-1} P_{2ik}^T L_{ik} + P_{2ik} K_{Bik} C_i L_{ik} \end{pmatrix} & P_{1ik} A_i + P_{2ik} K_{Bik} C_i \end{bmatrix},$$

$$U_{ik}^T V_{ik}^T P_{jk} V_{ik} U_{ik} =$$

$$= \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} L_{ik}^T L_{jk}^{-1} L_{ik} + L_{ik}^T (P_{2ik} P_{3ik}^{-1} P_{3jk} - P_{2jk}) \times \\ \times P_{3jk}^{-1} (P_{2ik} P_{3ik}^{-1} P_{3jk} - P_{2jk})^T L_{ik} \end{pmatrix} & L_{ik}^T (P_{1jk} - P_{2jk} P_{3ik}^{-1} P_{2ik}^T)^T \\ (P_{1jk} - P_{2jk} P_{3ik}^{-1} P_{2ik}^T) L_{ik} & P_{1jk} \end{bmatrix},$$

$$U_{ik}^T V_{ik}^T P_{ik} \tilde{M}_{Aik} \tilde{Q}_{Aik}^{-1} \tilde{G}_{Aik}^T \tilde{N}_{Aik} V_{ik} U_{ik} =$$

$$= \begin{bmatrix} M_{Aik} Q_{Aik}^{-1} G_{Aik}^T N_{Aik} L_{ik} & M_{Aik} Q_{Aik}^{-1} G_{Aik}^T N_{Aik} \\ P_{1ik} M_{Aik} Q_{Aik}^{-1} G_{Aik}^T N_{Aik} L_{ik} & P_{1ik} M_{Aik} Q_{Aik}^{-1} G_{Aik}^T N_{Aik} \end{bmatrix},$$

$$U_{ik}^T V_{ik}^T P_{ik} \tilde{M}_{Aik} \tilde{Q}_{Aik}^{-1} \tilde{M}_{Aik}^T P_{ik} V_{ik} U_{ik} =$$

$$= \begin{bmatrix} M_{Aik} Q_{Aik}^{-1} M_{Aik}^T & M_{Aik} Q_{Aik}^{-1} M_{Aik}^T P_{1ik} \\ P_{1ik} M_{Aik} Q_{Aik}^{-1} M_{Aik}^T & P_{1ik} M_{Aik} Q_{Aik}^{-1} M_{Aik}^T P_{1ik} \end{bmatrix},$$

$$U_{ik}^T V_{ik}^T \tilde{N}_{Aik}^T \tilde{G}_{Aik} \tilde{Q}_{Aik}^{-1} \tilde{G}_{Aik}^T \tilde{N}_{Aik} V_{ik} U_{ik} =$$

$$= \begin{bmatrix} L_{ik}^T N_{Aik}^T G_{Aik} Q_{Aik}^{-1} G_{Aik}^T N_{Aik} L_{ik} & L_{ik}^T N_{Aik}^T G_{Aik} Q_{Aik}^{-1} G_{Aik}^T N_{Aik} \\ N_{Aik}^T G_{Aik} Q_{Aik}^{-1} G_{Aik}^T N_{Aik} L_{ik} & N_{Aik}^T G_{Aik} Q_{Aik}^{-1} G_{Aik}^T N_{Aik} \end{bmatrix},$$

$$U_{ik}^T V_{ik}^T \tilde{N}_{Aik}^T \tilde{N}_{Aik} V_{ik} U_{ik} = \begin{bmatrix} L_{ik}^T N_{Aik}^T N_{Aik} L_{ik} & L_{ik}^T N_{Aik}^T N_{Aik} \\ N_{Aik}^T N_{Aik} L_{ik} & N_{Aik}^T N_{Aik} \end{bmatrix},$$

$$U_{ik}^T V_{ik}^T P_{ik} \tilde{M}_{Bik} \tilde{Q}_{Bik}^{-1} \tilde{G}_{Bik}^T \tilde{N}_{Bik}^T V_{ik} U_{ik} =$$

$$= \begin{bmatrix} -M_{Bik} Q_{Bik}^{-1} G_{Bik}^T N_{Bik} K_{Cik} P_{3ik}^{-1} P_{2ik}^T L_{ik} & 0 \\ -P_{1ik} M_{Bik} Q_{Bik}^{-1} G_{Bik}^T N_{Bik} K_{Cik} P_{3ik}^{-1} P_{2ik}^T L_{ik} & 0 \end{bmatrix},$$

$$U_{ik}^T V_{ik}^T P_{ik} \tilde{M}_{Bik} \tilde{Q}_{Bik}^{-1} \tilde{M}_{Bik}^T P_{ik} V_{ik} U_{ik} =$$

$$= \begin{bmatrix} M_{Bik} Q_{Bik}^{-1} M_{Bik}^T & M_{Bik} Q_{Bik}^{-1} M_{Bik}^T P_{1ik} \\ P_{1ik} M_{Bik} Q_{Bik}^{-1} M_{Bik}^T & P_{1ik} M_{Bik} Q_{Bik}^{-1} M_{Bik}^T P_{1ik} \end{bmatrix},$$

$$U_{ik}^T V_{ik}^T \tilde{N}_{Bik}^T \tilde{G}_{Bik} \tilde{Q}_{Bik}^{-1} \tilde{G}_{Bik}^T \tilde{N}_{Bik} V_{ik} U_{ik} =$$

$$= \begin{bmatrix} L_{ik}^T P_{2ik} P_{3ik}^{-1} K_{Cik}^T N_{Bik}^T G_{Bik} Q_{Bik}^{-1} G_{Bik}^T N_{Bik} K_{Cik} P_{3ik}^{-1} P_{2ik}^T L_{ik} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$U_{ik}^T V_{ik}^T \tilde{N}_{Bik}^T \tilde{N}_{Bik} V_{ik} U_{ik} =$$

$$= \begin{bmatrix} L_{ik}^T P_{2ik} P_{3ik}^{-1} K_{Cik}^T N_{Bik}^T N_{Bik} K_{Cik} P_{3ik}^{-1} P_{2ik}^T L_{ik} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$U_{ik}^T V_{ik}^T P_{ik} \tilde{M}_{Cik} \tilde{Q}_{Cik}^{-1} \tilde{G}_{Cik}^T \tilde{N}_{Cik}^T V_{ik} U_{ik} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ P_{2ik} K_{Bik} M_{Cik} Q_{Cik}^{-1} G_{Cik}^T N_{Cik}^T L_{ik} & P_{2ik} K_{Bik} M_{Cik} Q_{Cik}^{-1} G_{Cik}^T N_{Cik}^T \end{bmatrix},$$

$$U_{ik}^T V_{ik}^T P_{ik} \tilde{M}_{Cik} \tilde{Q}_{Cik}^{-1} \tilde{M}_{Cik}^T P_{ik} V_{ik} U_{ik} =$$
$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & P_{2ik} K_{Bik} M_{Cik} Q_{Cik}^{-1} M_{Cik}^T K_{Bik}^T P_{2ik}^T \end{bmatrix},$$
$$U_{ik}^T V_{ik}^T \tilde{N}_{Cik}^T \tilde{G}_{Cik} \tilde{Q}_{Cik}^{-1} \tilde{G}_{Cik}^T \tilde{N}_{Cik} V_{ik} U_{ik} =$$
$$= \begin{bmatrix} L_{ik}^T N_{Cik}^T G_{Cik} Q_{Cik}^{-1} G_{Cik}^T N_{Cik} L_{ik} & L_{ik}^T N_{Cik}^T G_{Cik} Q_{Cik}^{-1} G_{Cik}^T N_{Cik} \\ N_{Cik}^T G_{Cik} Q_{Cik}^{-1} G_{Cik}^T N_{Cik} L_{ik} & N_{Cik}^T G_{Cik} Q_{Cik}^{-1} G_{Cik}^T N_{Cik} \end{bmatrix},$$
$$U_{ik}^T V_{ik}^T \tilde{N}_{Cik}^T \tilde{N}_{Cik} V_{ik} U_{ik} = \begin{bmatrix} L_{ik}^T N_{Cik}^T N_{Cik} L_{ik} & L_{ik}^T N_{Cik}^T N_{Cik} \\ N_{Cik}^T N_{Cik} L_{ik} & N_{Cik}^T N_{Cik} \end{bmatrix},$$
$$U_{ik}^T V_{ik}^T \tilde{\sigma}_i^T P_{ik} \tilde{\sigma}_i V_{ik} U_{ik} =$$
$$= \begin{bmatrix} L_{ik}^T \sigma_i^T P_{1ik} \sigma_i L_{ik} & L_{ik}^T \sigma_i^T P_{1ik} \sigma_i \\ \sigma_i^T P_{1ik} \sigma_i L_{ik} & \sigma_i^T P_{1ik} \sigma_i \end{bmatrix},$$

Враховуючи всі вищенаведені перетворення, умова (13) набуде вигляду

$$\begin{bmatrix} \hat{\Xi}_{1ik} & \Xi_{2ik} \\ \Xi_{2ik}^T & \Xi_{3ik} \end{bmatrix} < 0. \tag{14}$$

де

$$\hat{\Xi}_{1ik} = \Xi_{1ik} + \sum_{j=1}^{N} \lambda_{ij} L_{ik}^T [P_{2ik} P_{3ik}^{-1} P_{3jk} - P_{2jk}] P_{3jk}^{-1} \times$$
$$\times [P_{2ik} P_{3ik}^{-1} P_{3jk} - P_{2jk}]^T L_{ik} + L_{ik}^T \sigma_i^T P_{1ik} \sigma_i L_{ik},$$
$$\Xi_{1ik} = A_i L_{ik} + L_{ik}^T A_i^T - B_i K_{Cik} P_{3ik}^{-1} P_{2ik}^T L_{ik} -$$
$$- L_{ik}^T P_{2ik} P_{3ik}^{-1} K_{Cik}^T B_i^T + \sum_{j=1}^{N} \lambda_{ij} L_{ik}^T L_{jk}^{-1} L_{ik} +$$
$$+ M_{Aik} Q_{Aik}^{-1} G_{Aik}^T N_{Aik} L_{ik} + L_{ik}^T N_{Aik}^T G_{Aik} Q_{Aik}^{-1} M_{Aik}^T -$$
$$- M_{Bik} Q_{Bik}^{-1} G_{Bik}^T N_{Bik} K_{Cik} P_{3ik}^{-1} P_{2ik}^T L_{ik} -$$
$$- L_{ik}^T P_{2ik} P_{3ik}^{-1} K_{Cik}^T N_{Bik}^T G_{Bik} Q_{Bik}^{-1} M_{Bik}^T +$$
$$+ \varepsilon_{Aik}^2 M_{Aik} Q_{Aik}^{-1} M_{Aik}^T + \varepsilon_{Aik}^{-2} L_{ik}^T N_{Aik}^T N_{Aik} L_{ik} +$$
$$+ \varepsilon_{Aik}^{-2} L_{ik}^T N_{Aik}^T G_{Aik} Q_{Aik}^{-1} G_{Aik}^T N_{Aik} L_{ik} +$$
$$+ \varepsilon_{Bik}^{-2} L_{ik}^T P_{2ik} P_{3ik}^{-1} K_{Cik}^T N_{Bik}^T G_{Bik} Q_{Bik}^{-1} \times$$
$$\times G_{Bik}^T N_{Bik} K_{Cik} P_{3ik}^{-1} P_{2ik}^T L_{ik} +$$
$$+ \varepsilon_{Bik}^2 M_{Bik} Q_{Bik}^{-1} M_{Bik}^T + \varepsilon_{Bik}^{-2} L_{ik}^T P_{2ik} P_{3ik}^{-1} K_{Cik}^T \times$$
$$\times N_{Bik}^T N_{Bik} K_{Cik} P_{3ik}^{-1} P_{2ik}^T L_{ik} +$$
$$+ \varepsilon_{Cik}^{-2} L_{ik}^T N_{Cik}^T G_{Cik} Q_{Cik}^{-1} G_{Cik}^T N_{Cik} L_{ik} +$$
$$+ \varepsilon_{Cik}^{-2} L_{ik}^T N_{Cik}^T N_{Cik} L_{ik},$$
$$\Xi_{2ik} = A_i + L_{ik}^T A_i^T P_{1ik}^T - L_{ik}^T P_{2ik} P_{3ik}^{-1} K_{Cik}^T B_{ik}^T P_{1ik} -$$
$$- L_{ik}^T P_{2ik} P_{3ik}^{-1} K_{Aik}^T P_{2ik}^T + L_{ik}^T C_{ik}^T K_{Bik}^T P_{2ik}^T +$$

$$+\sum_{j=1}^{N}\lambda_{ij}L_{ik}^{T}(P_{1jk}-P_{2jk}P_{3ik}^{-1}P_{2ik}^{T})^{T}+M_{Aik}Q_{Aik}^{-1}G_{Aik}^{T}N_{Aik}+$$
$$+L_{ik}^{T}N_{Aik}^{T}G_{Aik}Q_{Aik}^{-1}M_{Aik}^{T}P_{1ik}+\varepsilon_{Aik}^{2}M_{Aik}Q_{Aik}^{-1}M_{Aik}^{T}P_{1ik}+$$
$$+L_{ik}^{T}\sigma_{i}^{T}P_{1ik}\sigma_{i}-L_{ik}^{T}P_{2ik}P_{3ik}^{-1}K_{Cik}^{T}N_{Bik}^{T}G_{Bik}Q_{Bik}^{-1}M_{Bik}^{T}P_{1ik}+$$
$$+L_{ik}^{T}N_{Cik}^{T}G_{Cik}Q_{Cik}^{-1}M_{Cik}^{T}K_{Bik}^{T}P_{2ik}^{T}+$$
$$+\varepsilon_{Aik}^{-2}L_{ik}^{T}N_{Aik}^{T}G_{Aik}Q_{Aik}^{-1}G_{Aik}^{T}N_{Aik}+\varepsilon_{Aik}^{-2}L_{ik}^{T}N_{Aik}^{T}N_{Aik}+$$
$$+\varepsilon_{Bik}^{2}M_{Bik}Q_{Bik}^{-1}M_{Bik}^{T}P_{1ik}+\varepsilon_{Cik}^{-2}L_{ik}^{T}N_{Cik}^{T}G_{Cik}Q_{Cik}^{-1}G_{Cik}^{T}N_{Cik}+$$
$$+\varepsilon_{Cik}^{-2}L_{ik}^{T}N_{Cik}^{T}N_{Cik},$$
$$\Xi_{3ik}=P_{1ik}A_{i}+A_{i}^{T}P_{1ik}+$$
$$+P_{2ik}K_{Bik}C_{i}+C_{i}^{T}K_{Bik}^{T}P_{2ik}^{T}+$$
$$+\sum_{j=1}^{N}\lambda_{ij}P_{1jk}+P_{1ik}M_{Aik}Q_{Aik}^{-1}G_{Aik}^{T}N_{Aik}+$$
$$+N_{Aik}^{T}G_{Aik}Q_{Aik}^{-1}M_{Aik}^{T}P_{1ik}^{T}+$$
$$+P_{2ik}K_{Bik}M_{Cik}Q_{Cik}^{-1}G_{Cik}^{T}N_{Cik}+$$
$$+N_{Cik}^{T}G_{Cik}Q_{Cik}^{-1}M_{Cik}^{T}K_{Bik}^{T}P_{2ik}^{T}+$$
$$+\varepsilon_{Aik}^{2}P_{1ik}M_{Aik}Q_{Aik}^{-1}M_{Aik}^{T}P_{1ik}+$$
$$+\varepsilon_{Aik}^{-2}N_{Aik}^{T}G_{Aik}Q_{Aik}^{-1}G_{Aik}^{T}N_{Aik}+$$
$$+\varepsilon_{Aik}^{-2}N_{Aik}^{T}N_{Aik}+\varepsilon_{Bik}^{2}P_{1ik}M_{Bik}Q_{Bik}^{-1}M_{Bik}^{T}P_{1ik}+$$
$$+\varepsilon_{Cik}^{2}P_{2ik}K_{Bik}M_{Cik}Q_{Cik}^{-1}M_{Cik}^{T}K_{Bik}^{T}P_{2ik}^{T}+$$
$$+\sigma_{i}^{T}P_{1ik}\sigma_{i}+\varepsilon_{Cik}^{-2}N_{Cik}^{T}G_{Cik}Q_{Cik}^{-1}G_{Cik}^{T}N_{Cik}+$$
$$+\varepsilon_{Cik}^{-2}N_{Cik}^{T}N_{Cik}.$$

З нерівності

$$\sum_{j=1}^{N}\lambda_{ij}L_{ik}^{T}[P_{2ik}P_{3ik}^{-1}P_{3jk}-P_{2jk}]P_{3jk}^{-1}[P_{2ik}P_{3ik}^{-1}P_{3jk}-P_{2jk}]^{T}L_{ik}\geq 0$$

і $L_{ik}^{T}\sigma_{i}^{T}P_{1ik}\sigma_{i}L_{ik}\geq 0$, можемо отримати умову еквівалентну до (14):

$$\begin{bmatrix}\Xi_{1ik} & \Xi_{2ik}\\ \Xi_{2ik}^{T} & \Xi_{3ik}\end{bmatrix}<0. \tag{15}$$

Нехай $P_{1ik}=X_{ik}, P_{2ik}=Y_{ik}^{-1}-X_{ik}$ і $P_{3ik}=X_{ik}-Y_{ik}^{-1}$. Таким чином,

$$L_{ik}=(P_{1ik}-P_{2ik}P_{3ik}^{-1}P_{2ik}^{T})=Y_{ik},\ P_{3ik}^{-1}P_{2ik}^{T}=-I.$$

Визначимо $\mathbf{k}_{Bik}$ і $\mathbf{k}_{Cik}$:

$$\mathbf{k}_{Bik}=P_{2ik}K_{Bik}=(Y_{ik}^{-1}-X_{ik})K_{Bik},$$

$$\mathbf{k}_{Cik} = -K_{Cik}P_{3ik}^{-1}P_{2ik}^{T}L_{ik} = K_{Cik}Y_{ik}.$$

Застосовуючи всі попередньо наведені алгебраїчні перетворення, отримамо

$$\Xi_{1ik} = A_iY_{ik} + Y_{ik}^TA_i^T + B_i\mathbf{k}_{Cik} + \mathbf{k}_{Cik}^TB_i^T +$$
$$+\sum_{j=1}^{N}\lambda_{ij}Y_{ik}^TY_{jk}^{-1}Y_{ik} + M_{Aik}Q_{Aik}^{-1}G_{Aik}^TN_{Aik}Y_{ik} +$$
$$+Y_{ik}^TN_{Aik}^TG_{Aik}Q_{Aik}^{-1}M_{Aik}^T + M_{Bik}Q_{Bik}^{-1}G_{Bik}^TN_{Bik}\mathbf{k}_{Cik} +$$
$$+\mathbf{k}_{Cik}^TN_{Bik}^TG_{Bik}Q_{Bik}^{-1}M_{Bik}^T + \varepsilon_{Aik}^2M_{Aik}Q_{Aik}^{-1}M_{Aik}^T +$$
$$+\varepsilon_{Aik}^{-2}Y_{ik}^TN_{Aik}^TG_{Aik}Q_{Aik}^{-1}G_{Aik}^TN_{Aik}Y_{ik} + \varepsilon_{Aik}^{-2}Y_{ik}^TN_{Aik}^TN_{Aik}Y_{ik} +$$
$$+\varepsilon_{Bik}^{-2}\mathbf{k}_{Cik}^TN_{Bik}^TG_{Bik}Q_{Bik}^{-1}G_{Bik}^TN_{Bik}\mathbf{k}_{Cik} +$$
$$+\varepsilon_{Bik}^2M_{Bik}Q_{Bik}^{-1}M_{Bik}^T + \varepsilon_{Bik}^{-2}\mathbf{k}_{Cik}^TN_{Bik}^TN_{Bik}\mathbf{k}_{Cik} +$$
$$+\varepsilon_{Cik}^{-2}Y_{ik}^TN_{Cik}^TG_{Cik}Q_{Cik}^{-1}G_{Cik}^TN_{Cik}Y_{ik} + \varepsilon_{Cik}^{-2}Y_{ik}^TN_{Cik}^TN_{Cik}Y_{ik},$$
$$\Xi_{2ik} = A_i + Y_{ik}^TA_i^TX_{ik} +$$
$$+Y_{ik}^TC_i^T\mathbf{k}_{Bik}^T + \mathbf{k}_{Cik}^TB_i^TX_{ik} + Y_{ik}^TK_{Aik}^T(Y_{ik}^{-1} - X_{ik})^T +$$
$$+\sum_{j=1}^{N}\lambda_{ij}Y_{ik}^TY_{jk}^{-1} + Y_{ik}^T\sigma_i^TX_{ik}\sigma_i + M_{Aik}Q_{Aik}^{-1}G_{Aik}^TN_{Aik} +$$
$$+Y_{ik}^TN_{Aik}^TG_{Aik}Q_{Aik}^{-1}M_{Aik}^TX_{ik} + \mathbf{k}_{Cik}^TN_{Bik}^TG_{Bik}Q_{Bik}^{-1}M_{Bik}^TX_{ik} +$$
$$+Y_{ik}^TN_{Cik}^TG_{Cik}Q_{Cik}^{-1}M_{Cik}^T\mathbf{k}_{Bik}^T + \varepsilon_{Aik}^2M_{Aik}Q_{Aik}^{-1}M_{Aik}^TX_{ik} +$$
$$+\varepsilon_{Aik}^{-2}Y_{ik}^TN_{Aik}^TG_{Aik}Q_{Aik}^{-1}G_{Aik}^TN_{Aik} + \varepsilon_{Aik}^{-2}Y_{ik}^TN_{Aik}^TN_{Aik} +$$
$$+\varepsilon_{Bik}^2M_{Bik}Q_{Bik}^{-1}M_{Bik}^TX_{ik} + \varepsilon_{Cik}^{-2}Y_{ik}^TN_{Cik}^TG_{Cik}Q_{Cik}^{-1}G_{Cik}^TN_{Cik} + \varepsilon_{Cik}^{-2}Y_{ik}^TN_{Cik}^TN_{Cik},$$
$$\Xi_{3ik} = X_{ik}A_i + A_{ik}^TX_{ik} + \mathbf{k}_{Bik}C_i + C_i^T\mathbf{k}_{Bik}^T +$$
$$+\sigma_i^TX_{ik}\sigma_i + \sum_{j=1}^{N}\lambda_{ij}X_{jk} + X_{ik}M_{Aik}Q_{Aik}^{-1}G_{Aik}^TN_{Aik} +$$
$$+\mathbf{k}_{Bik}M_{Cik}Q_{Cik}^{-1}G_{Cik}^TN_{Cik} + N_{Cik}^TG_{Cik}Q_{Cik}^{-1}M_{Cik}^T\mathbf{k}_{Bik}^T +$$
$$+\varepsilon_{Aik}^2X_{ik}M_{Aik}Q_{Aik}^{-1}M_{Aik}^TX_{ik} + \varepsilon_{Aik}^{-2}N_{Aik}^TG_{Aik}Q_{Aik}^{-1}G_{Aik}^TN_{Aik} +$$
$$+\varepsilon_{Aik}^{-2}N_{Aik}^TN_{Aik} + \varepsilon_{Bik}^2X_{ik}M_{Bik}Q_{Bik}^{-1}M_{Bik}^TX_{ik} +$$
$$+\varepsilon_{Cik}^2\mathbf{k}_{Bik}M_{Cik}Q_{Cik}^{-1}M_{Cik}^T\mathbf{k}_{Bik}^T + N_{Aik}^TG_{Aik}Q_{Aik}^{-1}M_{Aik}^TX_{ik} +$$
$$+\varepsilon_{Cik}^{-2}N_{Cik}^TG_{Cik}Q_{Cik}^{-1}G_{Cik}^TN_{Cik} + \varepsilon_{Cik}^{-2}N_{Cik}^TN_{Cik},$$

Використовуючи вираз для оптимального керування (8), отримуємо $\Xi_{2ik} = 0$. Це означає, що умова стійкості (15) еквівалентна наступним умовам:

$$\Xi_{1ik} < 0,\ \Xi_{3ik} < 0. \tag{16}$$

Нехай $\mathbf{S}(Y_{ik}) = Y_{ik}[\sqrt{\lambda_{i1}}I, \ldots, \sqrt{\lambda_{i,i-1}}I, \sqrt{\lambda_{i,i+1}}I, \ldots, \sqrt{\lambda_{iN}}I,]$,

$$\mathcal{Y}_k(i) = diag\{Y_{ik}, \ldots, Y_{i-1,k}, Y_{i+1,k}, \ldots, Y_{Nk}\}.$$

Тоді $\sum\limits_{j=1}^{N}\lambda_{ij}Y_{ik}^{T}X_{jk}^{-1}Y_{ik}=\lambda_{ii}Y_{ik}+\mathbf{S}(Y_{ik})\mathcal{Y}_{k}^{-1}(i)\mathbf{S}^{T}(Y_{ik})$.

Відповідно до доповнення Шура і

$$R_{A2ik}=\varepsilon_{Aik}M_{Aik}+\varepsilon_{Aik}^{-1}Y_{Aik}^{T}N_{Aik}^{T}G_{Aik},\ R_{B2ik}=\varepsilon_{Bik}M_{Bik}+\varepsilon_{Bik}^{-1}\mathbf{k}_{Cik}^{T}N_{Bik}^{T}G_{Bik}.$$

умови стійкості (16) набувають вигляду (5) і (6). Теорему доведено.

3. Модельний приклад. Розглянемо випадок двох станів для ланцюгів Маркова ξ та η: $\xi=[1,\ 2]$, $\eta=[\eta_1,\ \eta_2]$.

Нехай коефіцієнти системи (1)–(3) мають вигляд:

$$A_1=\begin{pmatrix}0.2 & -0.6\\ 0.3 & 1.2\end{pmatrix},\quad B_1=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\quad C_1=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\quad \sigma_1=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},$$

$$M_{A11}=M_{A12}=M_{B11}=M_{B12}=M_{C11}=M_{C12}=\begin{pmatrix}0.12\\ 0.23\end{pmatrix},$$

$$N_{A11}=N_{A12}=N_{B11}=N_{B12}=N_{C11}=N_{C12}=\begin{pmatrix}0.2 & 0.1\end{pmatrix},$$

$$G_{A11}=G_{A12}=G_{B11}=G_{B12}=G_{C11}=G_{C12}=0.5,$$

$$A_2=\begin{pmatrix}-0.3 & 0.4\\ 0.2 & -0.15\end{pmatrix},\quad B_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\quad C_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\quad \sigma_2=\begin{pmatrix}0.2 & 0\\ 0 & 0.2\end{pmatrix},$$

$$M_{A21}=M_{A22}=M_{B21}=M_{B22}=M_{C21}=M_{C22}=\begin{pmatrix}0.12\\ 0.15\end{pmatrix},$$

$$N_{A21}=N_{A22}=N_{B21}=N_{B22}=N_{C21}=N_{C22}=\begin{pmatrix}0.13 & 0.23\end{pmatrix},$$

$$G_{A21}=G_{A22}=G_{B21}=G_{B22}=G_{C21}=G_{C22}=0.5,$$

$$\varepsilon_{A11}=\varepsilon_{A21}=0.5,\quad \varepsilon_{B11}=\varepsilon_{B21}=0.1,\quad \varepsilon_{C11}=\varepsilon_{C21}=0.1,$$

$$\varepsilon_{A12}=\varepsilon_{A22}=0.4,\quad \varepsilon_{B12}=\varepsilon_{B22}=0.2,\quad \varepsilon_{C12}=\varepsilon_{C22}=0.2.$$

Розв'язавши нерівності (5) і (6), отримаємо

$$X_{11}=\begin{pmatrix}5.04 & -0.24\\ -0.24 & 2.92\end{pmatrix},\qquad X_{21}=\begin{pmatrix}4.85 & 0.16\\ 0.16 & 4.41\end{pmatrix}$$

$$Y_{11}=\begin{pmatrix}0.55 & -0.72\\ -0.72 & 1.4\end{pmatrix},\qquad Y_{21}=\begin{pmatrix}1.09 & -0.71\\ -0.71 & 0.68\end{pmatrix},$$

$$\mathbf{k}_{B11}=\begin{pmatrix}-6.8 & -0.45\\ -0.45 & -8.7\end{pmatrix},\qquad \mathbf{k}_{B21}=\begin{pmatrix}-4.15 & -2.06\\ -2.06 & -4.1\end{pmatrix},$$

$$\mathbf{k}_{C11}=\begin{pmatrix}-1.73 & 3.2\\ 3.2 & -6.73\end{pmatrix},\qquad \mathbf{k}_{C21}=\begin{pmatrix}-5.18 & 2.7\\ 2.7 & -1.6\end{pmatrix},$$

$$X_{12}=\begin{pmatrix}5 & -0.24\\ -0.24 & 2.8\end{pmatrix},\qquad X_{22}=\begin{pmatrix}5 & 0.1\\ 0.1 & 5\end{pmatrix},$$

$$Y_{12}=\begin{pmatrix}0.5 & -0.7\\ -0.7 & 1.4\end{pmatrix},\qquad Y_{22}=\begin{pmatrix}1.1 & -0.7\\ -0.7 & 0.7\end{pmatrix},$$

$$\mathbf{k}_{B12} = \begin{pmatrix} -6.5 & -0.4 \\ -0.4 & -8.5 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{k}_{B22} = \begin{pmatrix} -4.1 & -2 \\ -2 & -4.1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{k}_{C12} = \begin{pmatrix} -1.7 & 3.2 \\ 3.2 & -6.7 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{k}_{C22} = \begin{pmatrix} -5.1 & 2.5 \\ 2.5 & -1.6 \end{pmatrix}.$$

Коефіцієнти для побудови оптимального керування мають вигляд

$$K_{A11} = \begin{pmatrix} 0.869 & 6.87 \\ 0.93 & -2.411 \end{pmatrix}, \qquad K_{A21} = \begin{pmatrix} -3.377 & -0.126 \\ 15.851 & 6.391 \end{pmatrix},$$

$$K_{A12} = \begin{pmatrix} 0.381 & 5.493 \\ 1.881 & -3.224 \end{pmatrix}, \qquad K_{A22} = \begin{pmatrix} 19.286 & 16.166 \\ 43.809 & 26.399 \end{pmatrix},$$

$$K_{B11} = \begin{pmatrix} -0.638 & -2.73 \\ -2.084 & 0.316 \end{pmatrix}, \qquad K_{B21} = \begin{pmatrix} -0.602 & -1.337 \\ -1.885 & -1.661 \end{pmatrix},$$

$$K_{B12} = \begin{pmatrix} -0.308 & -2.268 \\ -1.675 & 0.946 \end{pmatrix}, \qquad K_{B22} = \begin{pmatrix} -2.983 & -3.889 \\ -4.816 & -4.884 \end{pmatrix},$$

$$K_{C11} = \begin{pmatrix} -0.469 & 2.045 \\ -1.453 & -5.554 \end{pmatrix}, \qquad K_{C21} = \begin{pmatrix} -6.771 & -3.099 \\ 2.952 & 0.73 \end{pmatrix},$$

$$K_{C12} = \begin{pmatrix} -0.667 & 1.952 \\ -1 & -5.286 \end{pmatrix}, \qquad K_{C22} = \begin{pmatrix} -6.5 & -2.929 \\ 2.25 & -0.036 \end{pmatrix}.$$

Таким чином, керування (4) побудовано і воно забезпечує стохастичну стійкість системи (1)–(3).

Список використаної літератури

1. *Дуб Дж.* Вероятностные процессы. – М.: Физматгиз, 1963. – 605 с.
2. *Дынкин Е.Б.* Марковские процессы. – М.: Физматгиз, 1969. – 859 с.
3. *Кац И.Я.* Метод функций Ляпунова в задачах устойчивости и стабилизации систем случайной структуры. – Екатеринбург: УГАПС, 1998. – 222 с.
4. *Лукашів Т.О.* Стабілізація стохастичних динамічних систем випадкової структури з марковськими перемиканнями і дробово-лінійною невизначеністю // Науковий вісник Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича. Серія: Комп'ютерні системи та компоненти. – Т. 7, Вип. 1. - Чернівці: ЧНУ, 2016. – С. 26–32.
5. *Малик І.В.* Слабка збіжність сім'ї напівмарковських процесів до дифузійного процесу // Доповіді НАН України. – 2012. – №6. – С. 34–38.
6. *Свердан М.Л., Царьков Е.Ф.* Устойчивость стохастических импульсных систем. – Рига: РТУ, 1994. – 300 с.
7. *Ясинський В.К., Лукашів Т.О.* Стабілізація стохастичних дифузійних динамічних систем випадкової структури. – Чернівці: Чернівецький нац. ун-т, 2013. – 136 с.
8. *Korolyuk V.S., Korolyuk V.V.* Stochastic models of systems. – Boston: Kluwer, 1999. – 328 p.
9. *Long F., Fei S., Fu Z., Zheng S., Wei W.* H∞ control and quadratic stabilization of switched linear systems with linear fractional uncertainties via output feedback // Nonlinear Analysis: Hybrid Systems. – 2008. – Vol. 2, no. 1. – pp. 18–27.
10. *Long F., Huang H., Ding A.* Stochastic stabilization of Ito stochastic systems with Markov jumping and linear fractional uncertainty // Journal of Control Science and Engineering. — 2013. – Vol. 2013. – 14 p.
11. *Xie L.* Output feedback H∞ control of systems with parameter uncertainty // International Journal of Control. – 1996. – Vol. 63, no. 4. – pp. 741–750.

Одержано 01.12.2016