УДК 517.946

В. В. Маринець(ДВНЗ "Ужгородський національний університет)

ПРО ОДИН КОНСТРУКТИВНИЙ МЕТОД ДОСЛІДЖЕННЯ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ДАРБУ–ГУРСА

We give one constructive method of boundary–value problem investigation in the case of non–linear partial differential equation of the hyperbolic type with complex structure of the bound.

У випадку нелінійного ДРЧП гіперболічного типу пропонується один конструктивний метод дослідження крайової задачі в області із складною структурою краю.

В теорії хвильових рівнянь на площині окрім класичних задач (задачі Коші, Гурса, Дарбу, мішані задачі тощо) досліджуються і крайові задачі в областях із складною структурою краю, оскільки вони мають широке практичне застосування [1].

У даній роботі приводиться один конструктивний аналітичний метод дослідження та побудови наближеного розв'язку крайової задачі Дарбу–Гурса у випадку нелінійного диференціального рівняння гіперболічного типу, коли область зміни незалежних змінних обмежена парою характеристик розглядуваного рівняння та двома "вільними"кривими.

Пропонована робота є продовженням досліджень, приведених в статтях [1, 2].

В $\mathbb{R}^2$ розглянемо область $D = \{(x,y)|x \in [x_0,x_1), y \in (g_1(x), g_2(x))\}$, де $x_0 < x_1$, $y = g_i(x) \Leftrightarrow x = k_i(y)$, $i = 1,2$ — "вільні"криві, причому $g_1(x_{i-1}) = y_{i+1}$, $g_2(x_{i-1}) = y_{i-1}$, $g_i'(x) > 0$, $y_0 < y_1 < y_2 < y_3$.

Постановка задачі [3]: в просторі функцій $C^*(\bar{D}) := C^{(1.1)}(D) \cap C(\bar{D})$ знайти розв'язок диференціального рівняння

$$L_2U(x,y) = f(x,y,U(x,y)) := f[U(x,y)], \tag{1}$$

який задовольняє крайові умови

$$U(x, g_1(x)) = \varphi_1(x), \varphi_1(x) \in C^1([x_0,x_1]), \tag{2}$$

$$U(x_1, y) = \psi(y), \psi(y) \in C^1([y_1,y_3]), \tag{3}$$

$$U(x, g_2(x)) = \varphi_2(x), \varphi_2(x) \in C^1([x_0,x_1]), \tag{4}$$

причому виконуються умови узгодженості

$$\varphi_1(x_1) = \psi(y_3), \varphi_2(x_1) = \psi(y_1), \tag{5}$$

а

$$L_2U(x,y) := U_{xy}(x,y) + a_1(x,y)U_x(x,y) + a_2(x,y)U_y(x,y),$$

де $a_i(x,y) \in C(D)$, $i = 1,2$ — задані функції.

Розіб'ємо область D характеристиками рівняння (1) $y = y_i$, $i = 1,2$ на три підобласті:

$$D_1 = \{(x,y)|x \in [x_0,x_1], y \in [y_2, g_1(x)]\},$$

$$D_2 = \{(x,y)|x \in [x_0,x_1), y \in [y_1,y_2]\},$$
$$D_3 = \{(x,y)|x \in [x_0,x_1], y \in [g_2(x),y_1]\},$$
$$D = D_1 \cup D_2 \cup D_3.$$

Тоді, очевидно, розв'язок задачі (1)–(4) $U(x,y) = U_s(x,y)$, $(x,y) \in \bar{D}_s$, $s = 1,2,3$, де $U_1(x,y)$ — розв'язок задачі Дарбу (1)–(3), (5) при $(x,y) \in \bar{D}_1$, $U_2(x,y)$ — розв'язок задачі Гурса (1), (3), $U_2(x,y_2) = U_1(x,y_2)$, $(x,y) \in \bar{D}_2$, а $U_3(x,y)$ — розв'язок задачі Дарбу (1), (4), (5) і $U_3(x,y_1) = U_2(x,y_1)$.

Надалі будемо вважати, що

$$f[U(x,y)] \in C(\bar{B}), f : \bar{B} \to \mathbb{R}, \bar{B} \in \mathbb{R}^3,$$

$$a_1(x,y) \in C^{(1.0)}(D), a_2(x,y) \in C^{(0.1)}(D),$$

і

$$a_{1_x}(x,y) = a_{2_y}(x,y). \tag{6}$$

Справедлива наступна

Лема 1. *При виконанні умови* (6) *крайова задача* (1)–(5) *еквівалентна системі інтегральних рівнянь*

$$U_s(x,y) = \omega_s(x,y) + \varepsilon_s T_{1,s} F[U_{s-1}(\xi,\eta)] + T_s F[U_s(\xi,\eta)], (x,y) \in \bar{D}_s, \tag{7}$$

де

$$\varepsilon_s = \begin{cases} 0, s = 1, \\ 1, s = 2,3, \end{cases}$$

$$F[U(x,y)] := f[U(x,y)] + [a_{1_x}(x,y) + a_1(x,y)a_2(x,y)]U(x,y),$$

$$T_1 F[U(\xi,\eta)] := \int\limits_x^{x_1} \int\limits_y^{g_1(x)} K(x,y;\xi,\eta) F[U_1(\xi,\eta)] d\eta d\xi, (x,y) \in \bar{D}_1,$$

$$K(x,y;\xi,\eta) := exp\left(\int\limits_x^{\xi} a_2(\tau,y)d\tau + \int\limits_y^{\eta} a_1(\xi,\tau)d\tau \right),$$

$$\omega_1(x,y) := \psi(y) \exp\left(\int\limits_x^{x_1} a_2(\xi,y)d\xi \right) - K(x,y;x_1,g_1(x))\psi(g_1(x)) +$$

$$+\varphi_1(x) \exp\left(\int\limits_y^{g_1(x)} a_1(x,\tau)d\tau \right),$$

$$T_2 F[U_2(\xi,\eta)] := \int\limits_x^{x_1} \int\limits_y^{y_2} K(x,y;\xi,\eta) F[U_2(\xi,\eta)] d\eta d\xi, (x,y) \in \bar{D}_2,$$

$$T_{1,2} F[U_1(\xi,\eta)] := \int\limits_x^{x_1} \int\limits_{y_2}^{g_1(x)} K(x,y;\xi,\eta) F[U_1(\xi,\eta)] d\eta d\xi,$$

$$\omega_2(x,y) = \omega_1(x,y),$$

$$T_3F[U_3(\xi,\eta)] := \int\limits_y^{y_1}\int\limits_x^{k_2(y)} K(x,y;\xi,\eta)F[U_3(\xi,\eta)]d\xi d\eta, (x,y) \in \bar{D}_3,$$

$$T_{1,3}F[U_2(\xi,\eta)] := \int\limits_{k_2(y)}^{x} \frac{\partial}{\partial\xi}\Bigg\{\int\limits_{x_1}^{\xi}\int\limits_{g_1(\xi)}^{y_2} K(x,y;\tau,\eta)F[U_1(\tau,\eta)]d\eta d\tau +$$

$$+ \int\limits_{k_2(y)}^{\xi}\int\limits_{y_2}^{y_1} K(x,y;\tau,\eta)F[U_2(\tau,\eta)]d\eta d\tau\Bigg\}d\xi,$$

$$\omega_3(x,y) := \varphi_2(x) + \int_{k_2(y)}^{x} \frac{\partial}{\partial\xi}\Bigg\{\Big[\varphi_1(\xi) - \psi(g_1(\xi))e^{\int_\xi^{x_1} a_2(\tau,g_1(\xi))d\tau}\Big] \times$$

$$\times K(x,y;\xi,g_1(\xi)) - \varphi_2(\xi)e^{\int_x^\xi a_2(\tau,y)d\tau}\Bigg\}d\xi.$$

Згідно постановки задачі

$$U_{1_x}(x,y_2) = U_{2_x}(x,y_2), U_{3_x}(x,y_1) = U_{2_x}(x,y_1),$$

при $x \in [x_0, x_1]$, а

$$\big[U_{1_y}(x,y_2) - U_{2_y}(x,y_2)\big] = 0,$$

$$\big[U_{2_y}(x,y_1) - U_{3_y}(x,y_1)\big] = \rho exp\left(\int_x^{x_1} a_2(\xi,y_1)d\xi\right), \tag{8}$$

де

$$\rho = \psi'(y_1)+K_2'(y_1)\Bigg\{[\varphi_1'(x_1) - g_1'(x_1)\psi'(y_3) + a_2(x_1,y_3)\psi(y_3)]\, exp\left(\int_{y_1}^{y_3} a_1(x_1,\eta)d\eta\right) -$$

$$- \varphi_2'(x_1) - a_2(x_1,y_1)\varphi_2(x_1) + \int_{y_3}^{y_1} F(x,\eta,\psi(\eta))exp\left(\int_{y_1}^{\eta} a_1(x_1,\tau)d\tau\right)d\eta\Bigg\}.$$

Таким чином, має місце наступна

Лема 2. *Нехай $f[U(x,y)] \in C(\bar{B})$, виконується умова* (6)*, а задача* (1)–(5) *має розв'язок.*

Тоді умова $\rho = 0$ є необхідною і достатньою, щоб розв'язок задачі (1)–(5) *був регулярним. В супротивному випадку виконується рівність* (8) *і він буде іррегулярним.*

Означення 1. *Будемо вважати, що $F[U(x,y)] \in C_1(\bar{B})$ якщо функція $F[U(x,y)]$ задовольняє наступні умови [4] :*

1. $f[U(x,y)] \in C(\bar{B})$;

2. в просторі функцій $C(\bar{B}_1), \bar{B}_1 \subset \mathbb{R}^4$, $Пр_{xOy}\bar{B}_1 = \bar{D}$, існує така функція $H(x,y;U(x,y),V(x,y)) := H[U(x,y);V(x,y)]$ що

а) $H[U(x,y);V(x,y)] \equiv F[U(x,y)]$;

б) для довільної з простору $C(\bar{D})$ пари функцій $U(x,y), V(x,y) \in \bar{B}_1$ які задовольняють умову $U(x,y) \geqslant V(x,y),\ (x,y) \in \bar{D}$ в області $\bar{B}_1$ виконується нерівність

$$H[U(x,y);V(x,y)] \geqslant H[V(x,y);U(x,y)],\ (x,y) \in \bar{D}; \tag{9}$$

3. функція $H[U(x,y);V(x,y)]$ в області $\bar{B}_1$ задовольняє умову Ліпшіца, тобто, для всяких з простору $C(\bar{D})$ функцій $U_i(x,y),\ V_i(x,y) \in \bar{B}_1, i = 1,2,$ виконується умова

$$|H[U_1(x,y);U_2(x,y)] - H[V_1(x,y);V_2(x,y)]| \leqslant$$

$$\leqslant L\left(|W_1(x,y)| + |W_2(x,y)|\right),\ (x,y) \in \bar{D},$$

де L — стала Ліпшіца, а $W_i(x,y) = U_i(x,y) - V_i(x,y),\ i = 1,2.$

Зауважимо, якщо функція $f[U(x,y)] \in C(\bar{B})$ і має в області $\bar{B}$ обмежену частинну похідну першого порядку по $U(x,y)$, то $F[U(x,y)]$ завжди належить просторові $C_1(\bar{B})$. Зворотнє твердження не справедливе.

Встановимо достатні умови існування та єдиності регулярного або іррегулярного розв'язку задачі (1)-(6) в області $\bar{D}$ та побудуємо ітеаційний метод його знаходження.

Нехай $Z_{s,p}(x,y),\ V_{s,p}(x,y) \in C(\bar{D}_s), s = 1,2,3,\ p \in \mathbb{N}_0, \mathbb{N}_0 = \{0,1,2,\ldots\}$ належать області $\bar{B}_1$.

Введемо позначення:

$$W_{s,p} := Z_{s,p}(x,y) - V_{s,p}(x,y),\ (x,y) \in \bar{D}_s, s = 1,2,3,\ p \in \mathbb{N}_0,$$

$$f_s^p(x,y) := H[Z_{s,p}(x,y);V_{s,p}(x,y)],\ f_{s,p}(x,y) := H[V_{s,p}(x,y);Z_{s,p}(x,y)]$$

$$T_{1,3}^{(1)} f_1^p(\xi,\eta) := \int_x^{x_1} \int_{y_2}^{g_1(x)} K(x,y,\xi,\eta) f_1^p(\xi,\eta) d\eta d\xi,$$

$$T_{1,3}^{(2)} f_{1,p}(\xi,\eta) := \int_{k_2(y)}^{x_1} \int_{y_2}^{g_1(k_2(y))} K(x,y,\xi,\eta) f_{1,p}(\xi,\eta) d\eta d\xi,$$

$$T_{1,3}^{(3)} f_2^p(\xi,\eta) := \int_x^{k_2(y)} \int_{y_1}^{y_2} K(x,y,\xi,\eta) f_2^p(\xi,\eta) d\eta d\xi,$$

$$T_{1,3} f_2^p(\xi,\eta) := T_{1,3}^{(1)} f_1^p(\xi,\eta) - T_{1,3}^{(2)} f_{1,p}(\xi,\eta) + T_{1,3}^{(3)} f_2^p(\xi,\eta),$$

$$T_{1,3} f_{2,p}(\xi,\eta) := T_{1,3}^{(1)} f_{1,p}(\xi,\eta) - T_{1,3}^{(2)} f_1^p(\xi,\eta) + T_{1,3}^{(3)} f_{2,p}(\xi,\eta),$$

$$\begin{aligned} \alpha_{s,p}^*(x,y) &:= Z_{s,p}(x,y) - \omega_s(x,y) - \epsilon_s T_{1,s} f_{s-1}^p(\xi,\eta) - T_s f_s^p(\xi,\eta), \\ \beta_{s,p}^*(x,y) &:= V_{s,p}(x,y) - \omega_s(x,y) - \epsilon_s T_{1,s} f_{s-1,p}(\xi,\eta) - T_s f_{s,p}(\xi,\eta), \end{aligned} \tag{10}$$

$$\overline{Z}_{s,p}(x,y) := Z_{s,p}(x,y) - d_{s,p}(x,y) W_{s,p}(x,y),\ (x,y) \in \bar{D}_s;$$

$$\overline{V}_{s,p}(x,y) := V_{s,p}(x,y) + q_{s,p}(x,y) W_{s,p}(x,y),\ (x,y) \in \bar{D}_s,$$

$$F_s^p(x,y) := H[\overline{Z}_{s,p}(x,y);\overline{V}_{s,p}(x,y)],$$

$$F_{s,p}(x,y) := H[\overline{V}_{s,p}(x,y);\overline{Z}_{s,p}(x,y)],$$

де $d_{s,p}(x,y)$, $q_{s,p}(x,y) \in C(\overline{D}_s)$ — довільні функції, які задовольняють умови

$$0 \leqslant d_{s,p}(x,y) \leqslant 0,5;\; 0 \leqslant q_{s,p}(x,y) \leqslant 0,5 \tag{11}$$

для всіх $p \in \mathbb{N}_0, s = 1,2,3$.

Побудуємо послідовності функцій $\{Z_{s,p}(x,y)\}$ та $\{V_{s,p}(x,y)\}$ згідно закону [5]-[6]

$$\begin{gathered} Z_{s,p+1}(x,y) = \omega_s(x,y) + \epsilon_s T_{1,s} F^p_{s-1}(\xi,\eta) + T_s F^p_s(\xi,\eta) \\ V_{s,p+1}(x,y) = \omega_s(x,y) + \epsilon_s T_{1,s} F_{s-1,p}(\xi,\eta) + T_s F_{s,p}(\xi,\eta), \\ (x,y) \in \bar{D}_s, s = 1,2,3,\; p \in \mathbb{N}_0, \end{gathered} \tag{12}$$

де за нульове наближення $Z_{s,0}(x,y), V_{s,0}(x,y) \in \bar{B}_1$ вибираємо довільні з простору $C(\bar{D}_s)$ функції, які задовольняють відповідно умови (2)-(4) та нерівності

$$W_{s,0}(x,y) \geqslant 0, \alpha^*_{s,0}(x,y) \geqslant 0, \beta^*_{s,0}(x,y) \leqslant 0, (x,y) \in \bar{D}_s, s = 1,2,3. \tag{13}$$

Означення 2. *Функції $Z_{s,0}(x,y), V_{s,0}(x,y) \in C(\bar{D}_s), s = 1,2,3$ які належать області $\bar{B}_1$ і задовольняють відповідно умови (2)-(4) та нерівності (13) називаються функціями порівняння задачі (1)-(5).*

Зауважимо, що внаслідок (11),(13) маємо

$$V_{s,0}(x,y) \leqslant \bar{V}_{s,0}(x,y) \leqslant \bar{Z}_{s,0}(x,y) \leqslant Z_{s,0}(x,y),\; (x,y) \in \bar{D}_s, s = 1,2,3,$$

тобто, якщо $V_{s,0}(x,y), Z_{s,0}(x,y) \in \bar{B}_1$ то і $\bar{V}_{s,0}(x,y), \bar{Z}_{s,0}(x,y)$ також належить області $\bar{B}_1$.

Із (12) при $(x,y) \in \bar{D}_s, s = 1,2,3$, випливає слушність формул

$$\begin{gathered} Z_{s,p} - Z_{s,p+1} = \alpha_{s,p}(x,y) := Z_{s,p} - \omega_s(x,y) - \epsilon_s T_{1,s} F^p_{s-1}(\xi,\eta) - T_s F^p_s(\xi,\eta), \\ V_{s,p} - V_{s,p+1} = \beta_{s,p}(x,y) := V_{s,p} - \omega_s(x,y) - \epsilon_s T_{1,s} F_{s-1,p}(\xi,\eta) - T_s F_{s,p}(\xi,\eta), \end{gathered} \tag{14}$$

$$W_{s,p+1}(x,y) = \epsilon_s T_{1,s}(F^p_{s-1} - F_{s-1,p}) + T_s(F^p_s(\xi,\eta) - F_{s,p}(\xi,\eta)), \tag{15}$$

$$\begin{gathered} \alpha_{s,p+1}(x,y) := \epsilon_s T_{1,s}(F^p_{s-1} - F^{p+1}_{s-1}) + T_s(F^p_s(\xi,\eta) - F^{p+1}_s(\xi,\eta)), \\ \beta_{s,p}(x,y) := \epsilon_s T_{1,s}(F_{s-1,p} - F_{s-1,p+1}) + T_s(F_{s,p}(\xi,\eta) - F_{s,p+1}(\xi,\eta)). \end{gathered} \tag{16}$$

Зазначимо, що якщо $\alpha^*_{s,p+1}(x,y) \geqslant 0$, $\beta^*_{s,p}(x,y) \leqslant 0$, то і $\alpha_{s,p+1}(x,y) \geqslant 0$, $\beta_{s,p}(x,y) \leqslant 0$, $(x,y) \in \bar{D}_s, s = 1,2,3$.

Але тоді із (14), (15) при $p = 0$ одержуємо $Z_{s,0}(x,y) \geqslant Z_{s,1}(x,y)$, $V_{s,0}(x,y) \leqslant V_{s,1}(x,y), W_{s,1}(x,y) \geqslant 0$, тобто

$$V_{s,0}(x,y) \leqslant V_{s,1}(x,y) \leqslant Z_{s,1}(x,y) \leqslant Z_{s,0}(x,y), (x,y) \in \bar{D}_s, s = 1,2,3,$$

а отже $V_{s,1}(x,y), Z_{s,1}(x,y) \in \bar{B}_1$.

Вибираємо функції $d_{s,0}(x,y)$ та $q_{s,0}(x,y)$, які задовольняють умови (11) таким чином щоб при $(x,y) \in \bar{D}_s$ виконувалась умови [7]

$$Z_{s,0}(x,y) - Z_{s,1}(x,y) - d_{s,0}(x,y) W_{s,0}(x,y) \geqslant 0,$$

$$V_{s,0}(x,y) - V_{s,1}(x,y) - q_{s,0}(x,y) W_{s,0}(x,y) \leqslant 0.$$

Тоді в наслідок (9)

$$F_s^0(x,y) - F_s^1(x,y) \geqslant 0,\ F_{s,0}(x,y) - F_{s,1}(x,y) \leqslant 0, (x,y) \in \bar{D}_s.$$

Але в такому випадку із (16) при $p = 0, \alpha_{s,1}(x,y) \geqslant 0, \beta_{s,1} \leqslant 0,\ (x,y) \in \bar{D}_s$, $s = 1,2,3$.

Приймаючи функції $Z_{s,1}(x,y)$ та $V_{s,1}(x,y)$ за вихідні і повторюючи наведені вище міркування методом математичної індукції переконуємось, що якщо функції $d_{s,p}(x,y), q_{s,p}(x,y), (x,y) \in \bar{D}_s, s = 1,2,3,\ p \in \mathbb{N}$ на кожному кроці ітерації (12) вибирати таким чином щоб виконувалися умови

$$\begin{gathered} Z_{s,p}(x,y) - Z_{s,p+1}(x,y) - d_{s,p}(x,y)W_{s,p}(x,y) \geqslant 0, \\ V_{s,p}(x,y) - V_{s,p+1}(x,y) - q_{s,p}(x,y)W_{s,p}(x,y) \leqslant 0, (x,y) \in \bar{D}_s, s = 1,2,3, p \in \mathbb{N}, \end{gathered} \tag{17}$$

то в області матимуть місце нерівності

$$\begin{gathered} V_{s,p}(x,y) \leqslant V_{s,p+1}(x,y) \leqslant Z_{s,p+1}(x,y) \leqslant Z_{s,p}(x,y), \\ \alpha_{s,p}(x,y) \geqslant 0, \beta_{s,p}(x,y) \leqslant 0\ (x,y) \in \bar{D}_s, s = 1,2,3,\ p \in \mathbb{N} \end{gathered} \tag{18}$$

Зазначимо, що для всіх $p \in \mathbb{N}$ $\alpha_{s,p}(x,y) \geqslant \alpha^*_{s,p}(x,y)$, $\beta_{s,p}(x,y) \leqslant \beta^*_{s,p}(x,y)$, $(x,y) \in \bar{D}_s$, $s = 1,2,3$.

Лема 3. *Якщо $F[U(x,y)] \in C_1(\bar{B})$ і в області $\bar{B}_1$ існують функції порівняння $Z_{s,0}(x,y)$ та $V_{s,0}(x,y), (x,y) \in \bar{D}_s, s = 1,2,3$ задачі (1)-(5), тоді множина функцій $d_{s,p}(x,y), q_{s,p}(x,y) \in C(\bar{D}_s)$, які задовольняють нерівності (11),(17), не порожня.*

Дійсно, на кожному кроці ітерації (12) покладемо

$$d_{s,p}(x,y) = \begin{cases} \alpha^*_{s,p}(x,y)\rho^{-1}_{s,p}(x,y), \text{при } W_{s,p}(x,y) \neq 0, \\ 0, W_{s,p}(x,y) = 0, (x,y) \in \bar{D}_s, s = 1,2,3, \end{cases}$$

$$q_{s,p}(x,y) = \begin{cases} -\beta^*_{s,p}(x,y)\rho^{-1}_{s,p}(x,y), \text{при } W_{s,p}(x,y) \neq 0, \\ 0, W_{s,p}(x,y) = 0, (x,y) \in \bar{D}_s, s = 1,2,3, \end{cases}$$

$$\rho^{-1}_{s,p}(x,y) := \alpha^*_{s,p}(x,y) - \beta^*_{s,p}(x,y) + W_{s,p}(x,y),\ (x,y) \in \bar{D}_s, s = 1,2,3, p \in \mathbb{N}_0.$$

Очевидно, вибрані таким чином функції $d_{s,p}(x,y), q_{s,p}(x,y)$ задовольняють умови (11) а в наслідок (14) маємо

$$Z_{s,p}(x,y) - Z_{s,p+1}(x,y) - d_{s,p}(x,y)W_{s,p}(x,y) = \alpha_{s,p}(x,y) - \frac{\alpha^*_{s,p}(x,y)}{\rho_{s,p}(x,y)}W_{s,p}(x,y) \geqslant$$

$$\geqslant \alpha_{s,p}(x,y)\left(1 - \frac{W_{s,p}(x,y)}{\rho_{s,p}(x,y)}\right) \geqslant 0,$$

$$V_{s,p}(x,y) - V_{s,p+1}(x,y) + q_{s,p}(x,y)W_{s,p}(x,y) \leqslant$$

$$\leqslant \beta_{s,p}(x,y)\left(1 - \frac{W_{s,p}(x,y)}{\rho_{s,p}(x,y)}\right) \leqslant 0,\ (x,y) \in \bar{D}_s, s = 1,2,3, p \in \mathbb{N},$$

тобто нерівності (17) виконуються

Таким чином, має місце наступна

Теорема 1. *Нехай* $F[U(x,y)] \in C_1(\bar{B}), a_1(x,y) \in C^{(1.0)}(D), a_2(x,y) \in C^{(0.1)}(D)$ *і виконується умова (6) а в області* $\bar{B}_1$ *існують функції порівняння* $Z_{s,0}(x,y)$, $V_{s,0}(x,y) \in C(\bar{D}_s)$, $s = 1,2,3$ *задачі (1)-(5).*

Тоді для функцій $Z_{s,p}(x,y), V_{s,p}(x,y)$, *які побудовані згідно із законом (12), де* $d_{s,p}(x,y), q_{s,p}(x,y) \in C(\bar{D}_s)$ *задовольняють умови (11),(17) в області* $\bar{B}_1$ *виконуються нерівності (18)*

Покажемо, що побудовані таким чином послідовності функцій $\{Z_{s,p}(x,y)\}$, $\{V_{s,p}(x,y)\}$ збігаються рівномірно в області $\bar{D}_s, s = 1,2,3$ до єдиного розв'язку відповідного інтегрального рівняння в (7). В силу виконання нерівностей (18) для цього достатньо показати, що

$$\lim_{p\to\infty} W_{s,p}(x,y) = 0, (x,y) \in \bar{D}_s, s = 1,2,3.$$

Дійсно, із (15) методом математичної індукції неважко переконатись в слушності оцінок

$$\max_s \sup_{\bar{D}_s} W_{s,p}(x,y) \leqslant \frac{2q(kl(x_1 - x + y_3 - y))^p}{p!} \cdot d \tag{19}$$

де використано позначення:

$$\max_s \sup_{\bar{D}_s} W_{s,0}(x,y) \leqslant d, \ \max_{s,p} \sup_{\bar{D}_s} (1 - d_{s,p}(x,y) - q_{s,p}(x,y)) \leqslant q$$

$$\sup_{\bar{D}\times\bar{D}} K(x,y,\xi,\eta) \leqslant 0,5K, \ l = \sup_{\bar{D}} (x_1 - x + y_3 - y).$$

Із оцінок (19) випливає, що

$$\lim_{p\to\infty} Z_{s,p}(x,y) = \lim_{p\to\infty} V_{s,p}(x,y) = U_s(x,y), \ (x,y) \in \bar{D}_s, s = 1,2,3.$$

Переходячи у формулах (12) до границі при $p \to \infty$ при переконуємося, що граничні функції $U_s(x,y)$ є розв'язками відповідних інтегральних рівнянь (7) при $(x,y) \in \bar{D}_s, s = 1,2,3$.

Теорема 2. *Нехай виконуються умови теореми 1.*

Тоді послідовності функцій $Z_{s,p}(x,y)$ *та* $V_{s,p}(x,y)$, *побудовані згідно закону (12),(13),(17):*

а) збігаються рівномірно до єдиного розв'язку відповідного інтегрального рівняння в (7) при $(x,y) \in \bar{D}_s, s = 1,2,3$;

б) справедливі оцінки (19);

в) в області $\bar{B}_1$ *виконуються нерівності*

$$\begin{aligned} V_{s,p}(x,y) \leqslant V_{s,p+1}(x,y) \leqslant U_s(x,y) \leqslant Z_{s,p+1}(x,y) \leqslant \\ \leqslant Z_{s,p}(x,y), \ (x,y) \in \bar{D}_s, s = 1,2,3, \end{aligned} \tag{20}$$

для всіх $p \in \mathbb{N}_0$, *де* $U_s(x,y)$– *єдиний розв'язок відповідного інтегрального рівняння в (7) при* $(x,y) \in \bar{D}_s, s = 1,2,3$;

г) збіжність ітераційного процесу (12),(13),(17) не повільніша збіжності двостороннього методу, коли $d_{s,p}(x,y) = q_{s,p}(x,y) = 0$ *для всіх* $s = 1,2,3$, $p \in \mathbb{N}_0$.

Доведення. Єдиність розв'язку системи інтегральних рівнянь (7) при $(x,y) \in \bar{D}_s$, $s = 1,2,3$, доводиться методом від супротивного. Доведемо справедливість нерівностей (20) [7]. Для цього припустимо, що в деякій точці $(x,y) \in \bar{D}_s$ для деякого номера p наприклад, $U_s(x,y) > Z_{s,p}(x,y)$. Тоді в наслідок нерівностей (18) для довільного $n \in (N)$ у розглядуваній точці $(x,y) \in \bar{D}_s, U_s(x,y) > Z_{s,p}(x,y) \geqslant Z_{s,p+n}(x,y)$, а отже в цій точці послідовність функцій $Z_{s,p+n}(x,y)$ при $n \to \infty$ не збігається до розв'язку $U_s(x,y)$, що протирічить доведеному. Аналогічно доводиться справедливість всіх інших нерівностей в (20).

Нехай $Z_{s,p}(x,y), V_{s,p}(x,y)-$ двосторонні наближення до розв'язків відповідних інтегральних рівнянь (7) при $(x,y) \in \bar{D}_s, s = 1,2,3$, побудовані за деяким методом і вони задовольняють умови

$$W_{s,p}(x,y) \geqslant 0,\ \alpha^*_{s,p}(x,y) \geqslant 0,\ \beta^*_{s,p}(x,y) \leqslant 0.$$

Позначимо через $Z^*_{s,p+1}(x,y), V^*_{s,p+1}(x,y)$ наступні наближення, побудовані при умові $q_{s,p}(x,y) = d_{s,p}(x,y) = 0, (x,y) \in \bar{D}_s, s = 1,2,3$.

Тоді в наслідок (9),(11) маємо

$$Z^*_{s,p+1}(x,y) - Z_{s,p+1}(x,y) =$$

$$= \epsilon_s T_{1,s}\left(f^p_{s-1}(\xi,\eta) - F^p_{s-1}(\xi,\eta)\right) + T_s\left(f_{s,p}(\xi,\eta) - F_{s,p}(\xi,\eta)\right) \geqslant 0,$$

$$V^*_{s,p+1}(x,y) - V_{s,p+1}(x,y) =$$

$$= \epsilon_s T_{1,s}\left(f_{s-1,p}(\xi,\eta) - F_{s-1,p}(\xi,\eta)\right) + T_s\left(f_{s,p}(\xi,\eta) - F_{s,p}(\xi,\eta)\right) \leqslant 0,$$

отже,

$$V_{s,p}(x,y) \leqslant V^*_{s,p+1}(x,y) \leqslant V_{s,p+1}(x,y) \leqslant Z_{s,p+1}(x,y) \leqslant Z^*_{s,p+1}(x,y) \leqslant Z_{s,p}(x,y)$$

для всіх $(x,y) \in \bar{D}_s, s = 1,2,3$, тобто збіжність методу (11), (12),(13),(17) не повільніша збіжності двостороннього методу, коли $d_{s,p}(x,y) = q_{s,p}(x,y) = 0$.

Зазначимо, залежно від вибору функцій $d_{s,p}(x,y), q_{s,p}(x,y)$ в алгоритмі (11)-(13),(17) отримаємо різні модифікації двостороннього методу.

Наслідок 1. *Нехай виконуються умови теореми 1.*

Тоді розв'язок крайової задачі (1)-(5) в області $\bar{D}$ існує і він единий, причому, якщо виконується умова $\rho = 0$, то розв'язок буде регулярним, у супротивному випадку - іррегулярним.

Наслідок 2. *Нехай $\varphi_1(x) = \varphi_2(x) = \psi(x) = 0$, $x \in [x_0, x_1]$, $y \in [y_1, y_3]$, $F[U(x,y)] \in C_1(\bar{B})$ причому $F[U(x,y)] \equiv H[U(x,y), 0]$.*

Тоді, якщо $F[0] \leqslant (\geqslant) 0$ в області B, то розв'язок крайової задачі (1)-(5) при $(x,y) \in \overline{D}$ задовольняє нерівність $U(x,y) \leqslant (\geqslant) 0$.

Розглянемо поряд з рівнянням (1) рівняння вигляду

$$L_2 Z(x,y) = f_1(x,y,Z(x,y)) := f[Z(x,y)],\ f_1 : \bar{B} \to \mathbb{R}, \bar{B} \subset \mathbb{R}^3. \qquad (21)$$

Вважатимемо, що праві частини рівнянь (1), (21) задовольняють наступні умови

1. $f[U(x,y)] \in C_1(\bar{B})$;

2. функція $f_1[Z(x,y)] \in C(\bar{B})$ і в області $\bar{B}$ має обмежену похідну першого порядку по $Z(x,y)$ яка задовольняє умову

$$\frac{\partial f_1[Z(x,y)]}{\partial Z(x,y)} + a_{1_x}(x,y) + a_1(x,y)a_2(x,y) \geqslant 0, (x,y) \in D. \tag{22}$$

3. для всякої з простору $C^*(\bar{D})$ функції $V(x,y) \in \bar{B}$

$$f_1[V(x,y)] \geqslant (\leqslant) f[V(x,y)]. \tag{23}$$

Теорема 3. *Нехай $a_1(x,y) \in C^{(1.0)}(D), a_2(x,y) \in C^{(0.1)}(D)$ задовольняють умову (6), а праві частини рівнянь (1), (21) $f[U(x,y)]$ та $f_1[Z(x,y)]$ задовольняють вище наведені умови 1-3 і в області $\bar{B}_1$ існують функції порівняння задач (1)-(5), (21), (2)-(5)*

Тоді для розв'язків цих задач при $(x,y) \in \bar{D}$ виконуються нерівності

$$U(x,y) \leqslant (\geqslant) Z(x,y) \tag{24}$$

Доведення. Згідно теореми 2 і наслідку 1 розв'язки задач (1)-(5) та (21), (2)-(5) існують і вони єдині (регулярні або іррегулярні), а отже, позначивши $W(x,y) = Z(x,y) - V(x,y)$ і використавши теорему про скінчені прирости, матимемо

$$L_2W(x,y) = b(x,y)W(x,y) + f_1[U(x,y)] - f[U(x,y)],$$

де $b(x,y) := \dfrac{\partial \widetilde{f_1}[Z(x,y)]}{\partial Z(x,y)}$– похідна при деякому фіксованому значені $Z(x,y) \in \bar{B}, (x, y \in \bar{D})$.

Очевидно функція $W(x,y)$ задовольняє однорідні умови (2)-(6), а

$$F[W(x,y)] := [b(x,y) + a_{1_x}(x,y) + a_2(x,y)a_1(x,y)]\, W(x,y) + f_1[U(x,y)] - f[U(x,y)],$$

тобто внаслідок (22),(23) $F[W(x,y)] \in C_1(\bar{B})$ і $F[W(x,y)] \equiv H[W(x,y),0]$, а $F[0] \geqslant (\leqslant) 0$. На підставі наслідку 2 $W(x,y) \geqslant (\leqslant) 0$ при $(x,y) \in \bar{D}$, тобто мають місце нерівності (24)

Список використаної літератури

1. V. V. Marynets and K. V. Marynets. On Goursat–Darboux boundary–value problem for systems of non–linear differential equations of hyperbolic type// Miskolc Mathematical Notes. — 2013. — V.14, No.3. — P. 1009–1020.
2. В. В. Маринець, К. В. Маринець. Крайова задача Гурса–Дарбу для нелінійного рівняння гіперболічного типу// Доповіді НАНУ. — 2013. — №10. — С. 23–28.
3. L. Collatz. Funktionalanalysis und numerische mathematic. Berlin–Göttingen–Heidelberg: Springlerverlag, —1964. —448p.
4. В.В.Маринець Про один підхід дослідження та наближеного інтегрування крайової задачі для систем диференціально-функціональних рівнянь гіперболічного типу // Матеріали міжнародної наук.конф. SPIC. —2012. —вип.№8. —С.115-119.
5. Краснопольский М.А., Вайникко Г.М., Забрейко П.П., Рутицкий Я.Б., Стеценко В.Я. Приближенное решение операторный уравнений. —М:Наука. —1969. —456с.
6. В.В.Маринець Аналітичні методи в теорії диференціальних рівнянь в частиних похідних гіперболічного типу:Навч.посібник. —Ужгород:Вид-во УжНУ. —2006. —130с.
7. В.В.Маринець, К.В.Маринець Дослідження крайової задачі Гурса-Дарбу для нелінійного рівняння гіперболічного типу //Механіка і фізика руйнування буд.матеріалів та конструкцій. Збірник наук.праць. —Львів.Каменяр. —2014. —вип.10. —С.56-68.

Одержано 13.11.2016