УДК 519.6

І. А. Мич, В. В. Ніколенко (Ужгородський нац. ун-т)

ЕКСТРЕМАЛЬНА ЕКВІВАЛЕНТНІСТЬ ДИНАМІЧНИХ РЯДІВ

The work continues investigation of dynamic rows and development of effective exchange algorithm. The concept of extreme equivalence of rows is being introduced as well as a particular type of a cogged dynamic row is being studied. The developed algorithm of cogged filtration gives the possibility to press information in some dynamic rows and the error of cogged filtration is also being investigated.

У роботі продовжуються дослідження динамічних рядів та побудова ефективних біржевих алгоритмів. Вводиться поняття екстремальної еквівалентності рядів, вивчається окремий тип зубчатого динамічного ряду. Розроблений алгоритм зубчатої фільтрації дає можливість стиснути інформацію в деяких динамічних рядах, досліджується похибка зубчатої фільтрації.

Динамічний ряд $V=\{z_1,z_2,\ldots,z_n\}$ — це числова послідовність, яка задана на множині $T\subset N$, де T — множина часових відліків. Кількість елементів у ряді називається його довжиною $[1,2]$.

Послідовність $V_i=\{z_{i_1},z_{i_2},\ldots,z_{i_m}\}$ називається підрядом ряду V, якщо $\forall z_{i_k}\in V_i$, $\exists z_{j_k}\in V$ таке, що $z_{i_k}=z_{j_k}$ і $i_{k_1}<i_{k_2}$, звідси випливає, що $j_{k_1}<j_{k_2}$.

Наприклад, ряд $V=\{2,11,-6,3,5,10,12,2,3\}$ має підряди $V_1=\{2,-6,5,2\}$, $V_2=\{3,5,10,12,3\}$ і т.д.

Підряд $V_i=\{z_{i_1},z_{i_2},\ldots,z_{i_m}\}$ ряду $V=\{z_1,z_2,\ldots,z_k\}$ називається відрізком цього ряду, якщо $j_{k_m}=j_{k_1}+m$.

Відрізки — це підряди ряду без пропусків і дублювання елементів. Вони визначаються в ряді V заданням першого елемента z_{i_1} і довжиною відрізка k.

Наприклад, пара чисел $z_{i_1}=11$, $k=4$ задає в попередньому прикладі відрізок $V_1=\{11,-6,3,5\}$.

Відрізок часового ряду $V=\{z_{i_1},z_{i_2},\ldots,z_{i_k}\}$ називається монотонно зротаючим (спадаючим), якщо $z_{i_1}\le z_{i_2}\le\ldots\le z_{i_k}$ $(z_{i_1}\ge z_{i_2}\ge\ldots\ge z_{i_k})$.

Точка $z_j\in V$ називається точкою максимума (мінімума), якщо $z_{j-1}\le z_j>z_{j+1}$ $(z_{j-1}\ge z_j<z_{j+1})$. Крім того, першу точку z_1 і останню точку z_n ряду V будемо вважати точками мінімума, якщо $z_1\le z_2$, $z_n\le z_{n-1}$ і точками максимума, якщо $z_1\ge z_2$, $z_n\ge z_{n-1}$. Точки максимума і мінімума традиційно називаються точками екстремума.

Таким чином, кожний динамічний ряд починається і закінчується точкою екстремума, а решта точок екстремумів знаходиться на перетині кінців монотонно зростаючих і монотонно спадаючих відрізків. Точки локальних максимумів чергуються з точками локальних мінімумів.

Підряд називається екстремальним, якщо він складається тільки з екстремальних точок.

Твердження 1. *Для кожного динамічного ряду існує єдиний екстремальний підряд максимальної довжини.*

Існує чотири типи екстремальних підрядів:
тип W_1 починається і закінчується точками локальних мінімумів;
тип W_2 починається точкою мінімума і закінчується точкою максимума;
тип W_3 починається точкою максимума і закінчується точкою мінімума;

тип W_4 починається і закінчується точками максимума.

Нехай $z_{a_1}, z_{a_2}, \ldots, z_{a_k}$ — всі точки локальних мінімумів ряду V, а $z_{b_1}, z_{b_2}, \ldots, z_{b_r}$ — всі точки локальних максимумів. Якщо W_1, W_2, W_3, W_4 екстремальні підряди ряду V максимальної довжини, то потенціал буде визначатися по одній з формул [2]:

$$P(W_1) = \prod_{i=1}^{r} \frac{z_{b_i}}{z_{a_i}};$$

$$P(W_2) = \prod_{i=2}^{k} \frac{z_{b_i}}{z_{a_i}};$$

$$P(W_3) = \prod_{i=2}^{r} \frac{z_{b_i}}{z_{a_i}};$$

$$P(W_4) = \prod_{i=2}^{k} \frac{z_{b_i}}{z_{a_i}}.$$

Два динамічні ряди V_1 і V_2 називаються екстремально еквівалентними, якщо їх екстремальні підряди максимальної довжини співпадають.

Динамічний ряд називається зубчатим, якщо всі його точки є або точками локальних екстремумів або лежать на прямих, що з'єднують ці екстремуми.

Твердження 2. *Для довільного динамічного ряду V існує єдиний екстремально еквівалентний зубчатий ряд K і $P(V) = P(K)$.*

Справедливість твердження безпосередньо випливає з приведених вище означень.

Зубчатий ряд типу W_3 має вигляд, який показаний на рис.1, де $z_{b_1}, z_{b_2}, z_{b_3}, z_{b_4}, z_{b_5}$ — точки локальних максимумів, а $z_{a_1}, z_{a_2}, z_{a_3}, z_{a_4}, z_{a_5}$ — точки локальних мінімумів; l_1, l_2, l_3, l_4, l_5 — числа, що вказують довжини лівих (правих) плечей екстремумів $z_{a_i}(z_{b_i})$; u_1, u_2, u_3, u_4 — довжини правих (лівих) плечей екстремумів $z_{a_i}(z_{b_i})$.

Зубчата фільтрація. Зубчатим фільтром називається алгоритм L, який довільному динамічному ряду $V = \{z_1, z_2, \ldots, z_n\}$ ставить у відповідність екстремально еквівалентний зубчатий ряд $K = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$.

Побудуємо зубчатий фільтр L для ряду V. $L(z_i) = u_i$, якщо z_i— точка екстремуму, $u_i = z_i$.

Якщо z_i знаходиться між найближчими екстремальними точками z_{i-t} і z_{i+p}, то u_i буде знаходитися на прямій, що з'єднує ці екстремуми.

Проведемо пряму, що проходить через точки $(i-t, z_{i-t})$ і $(i+p, z_{i+p})$

$$\frac{x-(i-t)}{i+p-(i-t)} = \frac{y-z_{i-t}}{z_{i+p}-z_{i-t}};$$

$$\frac{x-i+t}{p+t} = \frac{y-z_{i-t}}{z_{i+p}-z_{i-t}}.$$

З останньої рівності отримаємо рівняння прямої:

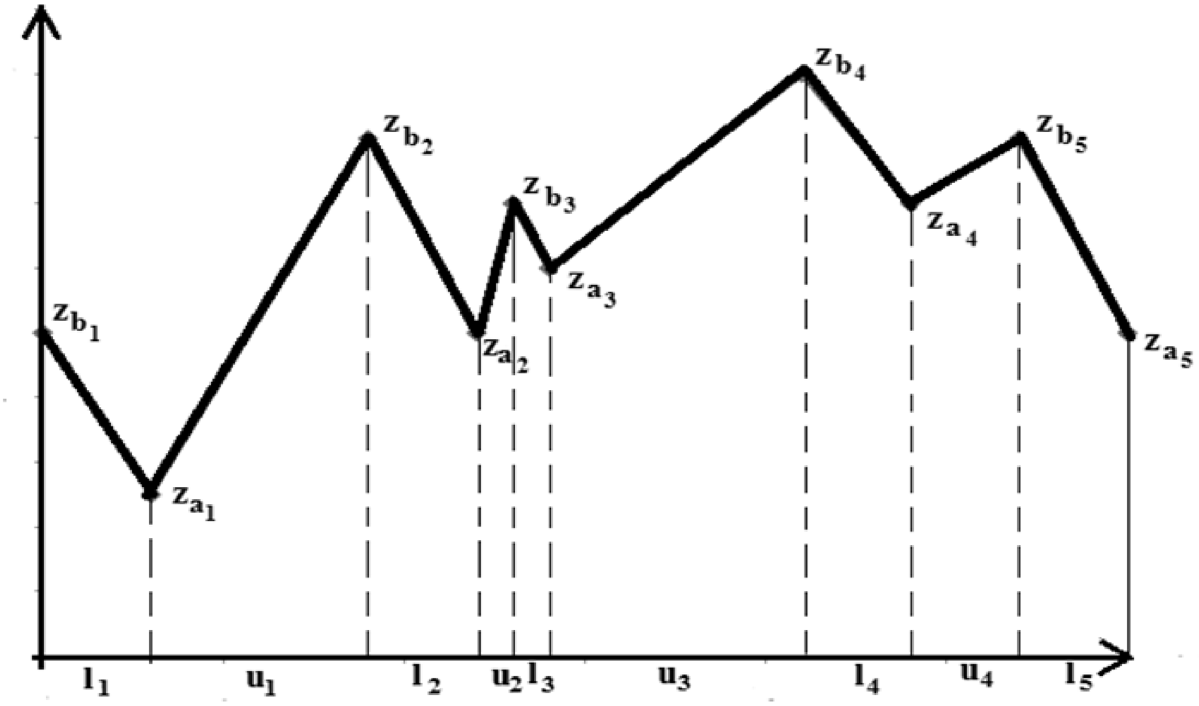

Рис. 1

$$y = z_{i-t} + \frac{(z_{i+p} - z_{i-t}) \cdot (x - i + t)}{p + t}.$$

$$u_i = y\,(i) = z_{i-t} + \frac{(z_{i+p} - z_{i-t}) \cdot (x - i + t)}{p + t} = z_{i-t} + \frac{(z_{i+p} - z_{i-t}) \cdot t}{p + t}.$$

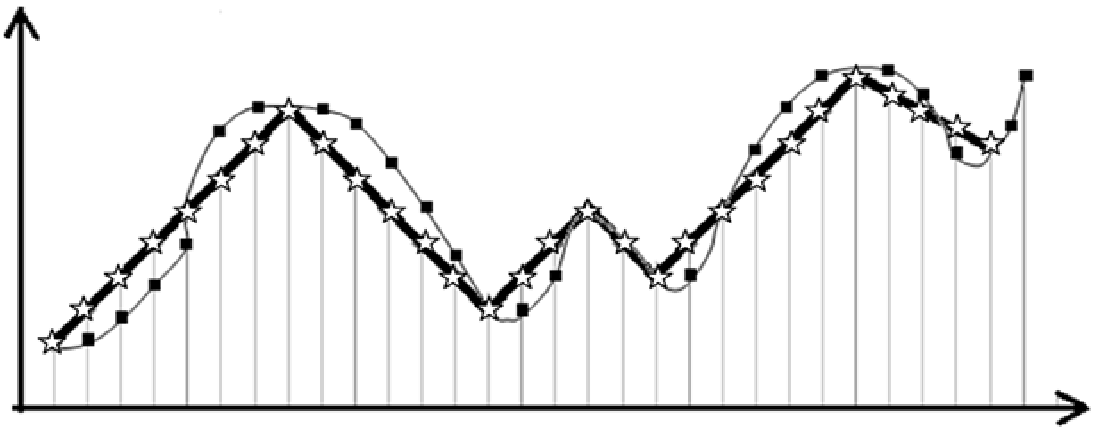

Рис. 2

Графічний приклад зубчатої фільтрації представлений на рис. 2.

Розглянемо питання стиску інформації зубчатим фільтром V. Для передачі динамічного ряду $V = \{z_1, z_2, \ldots, z_n\}$ при рівномірному кодуванні за теоремою Хартлі [5] необхідно $I_v = n \cdot \log_2 |A|$ біт інформації, де $|A|$ – потужність шкали вимірювання значень динамічного ряду.

Для передачі зубчатого ряду K досить передати екстремальні точки. Нехай в K $u_{j_1}, u_{j_2}, \ldots, u_{j_t}$– множина всіх екстремумів. Для передачі кожного екстремума необхідно закодувати його значення і координату в динамічному ряді.

$$I_K = t \cdot (\log_2 |A| + \log_2 n) = t \cdot \log_2 |A| \cdot n.$$

Коефіцієнт стиску

$$K = \frac{I_V}{I_K} = \frac{n \cdot \log_2 |A|}{t \cdot \log_2 |A| \cdot n}$$

для динамічного ряду представленому на рис. 2.

Нехай $|A| = 256$, тобто $z_i \in [1, 255]$, $n = 32$, $t = 8$, тоді:

$$K = \frac{32 \cdot \log_2 256}{8 \cdot \log_2 256 \cdot 32} = \frac{32 \cdot 8}{8 \cdot 13} \approx 2,5.$$

Величина коефіцієнта стиску залежить від співвідношення $q = \frac{n}{t}$. Звідси випливає твердження.

Твердження 3. *$K > 1$, якщо $q > \frac{\log_2 |A| \cdot n}{\log_2 |A|}$.*

Похибка зубчатої фільтрації. Нехай V — динамічний ряд, L — зубчастий фільтр і $L(V) = K$. Похибка фільтрації S буде визначатися як середнє квадратичне відхилення між відповідними елементами рядів V і K. Звичайно $S = 0$, якщо $V = K$.

Нехай K — зубчатий ряд $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ і $u_{i_1}, u_{i_2}, \ldots, u_{i_t}$ — всі екстремуми цього ряда. Знайдемо динамічний ряд V_k такий, що похибка зубчатої фільтрації буде максимальною.

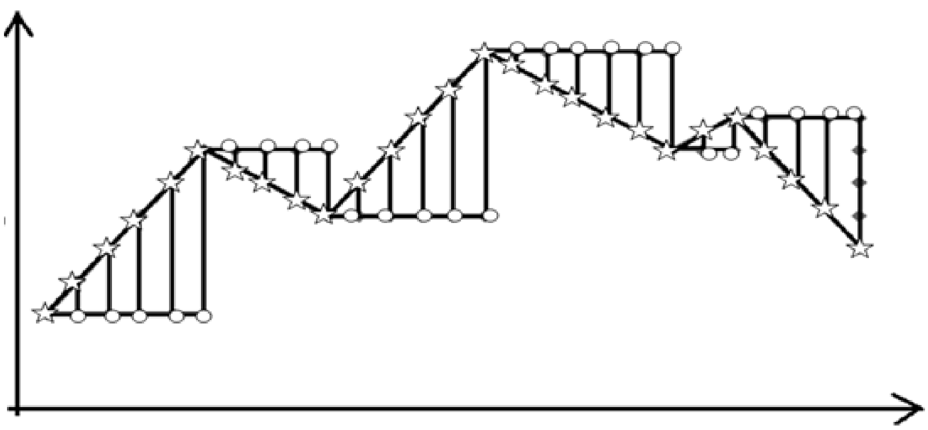

Рис. 3

З рис. 3 видно, що таким рядом V_k буде ряд елементи якого $z_i = u_{i_t}$, якщо $i_t \le i \le i_{t+1}$.

Пряма, що проходить через $\max(z_{i_k}, i_k)$ і точку $\left(z_{i_{k+1}}, i_{k+1}\right)$:

$$\frac{x - i_k}{i_{k+1} - i_k} = \frac{y - z_{i_k}}{z_{i_{k+1}} - z_{i_k}};$$

$$y = z_{i_k} + \frac{(x - i_k) \cdot \left(z_{i_{k+1}} - z_{i_k}\right)}{i_{k+1} - i_k}.$$

Похибка на цьому відрізку:

$$S = \frac{\sqrt{\sum\limits_{j=i_k}^{i_{k+1}} (j - i_k)^2 \cdot \left(z_{i_{k+1}} - z_{i_k}\right)^2}}{i_{k+1} - i_k}.$$

Якщо таких відрізків U, то похибка визначається з рівності:

$$S = \sqrt{\sum_{k=1}^{U} \sum_{j=i_k}^{i_{k+1}} \frac{(j - i_k)^2 \cdot \left(z_{i_{k+1}} - z_{i_k}\right)^2}{\left(i_{k+1} - i_k\right)^2}}.$$

На основі зубчатих динамічних рядів будуються послідовності динамічних многокутників, які використовуються для пошуку активних точок.

Список використаної літератури

1. *Мич І. А., Ніколенко В. В.* Потенціали деяких класів динамічних рядів//Наук. вісник Ужгород. ун-ту, сер. Математика і інформатика. – 2016. – Вип. 2(27). – С.94–97.
2. *Берзлев О. Ю., Кондрук Н. Е., Ніколенко В. В.* Багаторівневі алгоритми прогнозування динамічних рядів // Праці 4-ої міжнародної школи-семінару “Теорія прийняття рішень” (Ужгород, 29 вер–4 жовт. 2008 р.). – Ужгород: ПП “Інвазор” 2008. – С.15.
3. *Берзлев О. Ю., Маляр М. М., Ніколенко В. В.* Багаторівневі адаптивні моделі в задачах передбачування // Наук. Вісник Ужгород. ун-ту, сер. Математика і інформатика. – 2009. – Вип.19.–С.4–11
4. *Берзлев О. Ю., Ніколенко В. В.* Прогнозування часових рядів методом зіставлення зі зразком // Управління розвитком складних систем. Київський нац. ун-т будівництва і архітектури. – 2015. – Вип. 22. –
С. 101–107.
5. *Жураковський Ю. П., Полторак В. П.* Теорія інформації та кодування.– К.: Вища школа, 2001. – 255 с.

Одержано 01.12.2016