УДК 517.9

Ю. М. Перестюк (Київський нац. ун-т ім. Т. Шевченка)

ПРО КОЛИВАННЯ МАЯТНИКА В СЕРЕДОВИЩІ З ОПОРОМ

Вступ. В багатьох задачах теорії коливань приходиться досліджувати коливання маятника під дією імпульсних сил. Багато конкретних прикладів таких задач можна знайти в відомих монографіях [1–3]. Математичною моделлю таких задач є розривна динамічна система, рух фазової точки в якій відбувається по траєкторіях лінійного диференціального рівняння другого порядку

$$\ddot{x} + \delta\dot{x} + \omega^2 x = 0, \qquad \frac{\delta^2}{4} < \omega^2,$$

і піддається дії імпульсної сили при проходженні фазовою точкою $(x, \dot{x})$ певних множин на фазовій площині $(x0\dot{x})$ наприклад, при проходженні точкою $(x(t), \dot{x}(t))$ заданої прямої $x = x_0$, або ж прямої $\dot{x} = 0$. Ряд цікавих результатів дослідження такого осцилятора міститься в монографіях [1 – 3]. В цих роботах припускається, що в результаті дії імпульсної сили в системі збільшується кількість руху або ж кінетична енергія осцилятора на деяку сталу величину. Встановлені умови існування розривних циклів в таких системах, досліджується питання стійкості таких циклів.

Основний результат. Продовжуючи дослідження існування розривних циклів в розривних динамічних системах на площині, розглянемо таку систему

$$\ddot{x} + \delta\dot{x} + \omega^2 x = 0, \quad \dot{x} \neq 0, \tag{1}$$

$$\Delta\dot{x}|_{\dot{x}=0} = \begin{cases} -I_0, & x > 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases} \qquad \omega^2 > \frac{\delta^2}{4}.$$

Ця система рівнянь описує рух осцилятора в середовищі з опором, причому сила опору не вважається малою. Зрозуміло, що коли $I_0 = 0$, то осцилятор з часом затухає. Коливання в такій системі можливі, якщо $I_0 \neq 0$. З'ясуємо зв'язок між параметрами системи, який забезпечує коливання в цій системі.

Запровадимо на фазовій площині $(x0\dot{x})$ амплітудно-фазові координати (a, φ) за формулами

$$x = a\cos\varphi, \qquad \dot{x} = a\left(-\frac{\delta}{2}\cos\varphi + \Omega\sin\varphi\right), \qquad \Omega^2 = \omega^2 - \frac{\delta^2}{4}. \tag{2}$$

В цих координатах вихідна система набуває вигляду

$$\frac{da}{dt} = -\frac{\delta}{2}a, \qquad \frac{d\varphi}{dt} = -\Omega, \qquad tg\,\varphi \neq \frac{\delta}{2\Omega}, \tag{3}$$

$$\Delta a|_{\varphi=\varphi_0+k\pi} = \left(\frac{\cos\varphi_0}{\cos\varphi^*} - 1\right)a, \qquad \Delta\varphi|_{\varphi=\varphi_0+k\pi} = \varphi^* - \varphi_0.$$

Зауважимо, що змінні a і φ з x і $\dot{x}$ пов'язані співвідношеннями

$$x^2 + \frac{1}{\Omega^2}\left(\dot{x} + \frac{\delta}{2}x\right)^2 = a^2, \qquad \frac{\dot{x}}{x} = -\frac{\delta}{2} + \Omega tg\ \varphi.$$

Півпряма імпульсної дії $\dot{x} = 0,\ x > 0$ є промінь $\varphi = \varphi_0 = arctg\frac{\delta}{2\Omega}$.

Щоб з'ясувати, чи можливі в такій імпульсній системі незатухаючі коливання, досить дослідити відображення Пуанкаре півпрямої $\dot{x} = 0$ в себе, коли полярний кут φ по траєкторіям вихідної системи набуде приріст 2π від початку руху фазової точки. Нехай фазова точка починає рух при $t = -0$ з точки $(x_0, 0)$ прямої, $x_0 > 0$. В цей момент під дією імпульсної сили вона "перескакує" в точку з координатами $(x_0, -I_0)$. Далі вона рухається по логарифмічній спіралі

$$a(\varphi) = a_0 e^{\frac{\delta}{2\Omega}\varphi}$$

що проходить через цю точку, до моменту перетину цієї спіралі з півпрямою $\dot{x} = 0,\ \ x > 0$. Рух фазової точки буде періодичним, якщо вказана спіраль перетне цю півпряму в точці $(x_0, 0)$. Точка x_0 і є нерухомою точкою описаного відображення Пуанкаре $h : x \to h(x)$.

Запишемо явно вираз для функції $h(x)$. Точка $(x_0, 0)$ в змінних (φ, a) має координати $(\varphi_0, a_0),\ \ x_0 = a_0 \cos\varphi_0$, а точка $(x_0, -I_0)$ - координати

$$\left(\varphi^*,\ \sqrt{x_0^2 + \frac{1}{\Omega^2}\left(-I + \frac{\delta}{2}x_0\right)^2}\right), \qquad \varphi^* = arctg\frac{1}{\Omega}\left(\frac{\delta}{2} - \frac{I}{x_0}\right), \tag{4}$$

а тому фазова точка, вийшовши з цієї точки далі рухається по спіралі

$$a(\varphi) = \sqrt{x_0^2 + \frac{1}{\Omega^2}\left(-I + \frac{\delta}{2}x_0\right)^2}\, e^{\frac{\delta}{2\Omega}(\varphi - \varphi^*)}$$

доти, поки зміна φ набуде значення $-2\pi + \varphi_0$, тобто спіраль перетне промінь $\dot{x} = 0,\ \ x > 0$.

В момент цього перетину

$$a(-2\pi + \varphi_0) = \sqrt{x_0^2 + \frac{1}{\Omega^2}\left(-I + \frac{\delta}{2}x_0\right)^2}\, e^{\frac{\delta}{2\Omega}(-2\pi + \varphi_0 - \varphi^*)}.$$

Таким чином, відображення Пуанкаре $h(x)$ має вигляд

$$h : x \to h(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{\Omega^2}\left(-I + \frac{\delta}{2}x\right)^2}\, e^{-\frac{\delta}{2\Omega}(2\pi + \varphi^* - \varphi_0)} \cdot \cos\varphi_0. \tag{5}$$

Нерухомі точки цього відображення – це розв'язок рівняння

$$\cos^2\varphi_0 \cdot \left(x^2 + \frac{1}{\Omega^2}\left(-I + \frac{\delta}{2}x\right)^2\right) = e^{\frac{\delta}{\Omega}(2\pi + \varphi^* - \varphi_0)} \cdot x^2. \tag{6}$$

Проаналізуємо це рівняння детальніше, переписавши його в вигляді

$$\left[1 + \frac{1}{\Omega^2}\left(\frac{\delta}{2} - \frac{I}{x}\right)^2\right] e^{-\frac{\delta}{\Omega} arctg\frac{1}{\Omega}\left(\frac{\delta}{2} - \frac{I}{x}\right)} = e^{\frac{\delta}{\Omega}(2\pi - \varphi_0)} \cdot \left(1 + \left(\frac{\delta}{2\Omega}\right)^2\right). \tag{7}$$

Позначивши ліву частину цього рівняння через $g(x)$, бачимо, що $g(x)$ монотонно спадна при $x > 0$ функція, причому $g(x) \to +\infty$, коли $x \to 0+$ і

$$\lim_{x\to\infty} g(x) = \left(1 + \left(\frac{\delta}{2\Omega}\right)^2\right) e^{-\frac{\delta}{\Omega} arctg\ \varphi_0}.$$

Порівнюючи це граничне значення з правою частиною рівняння, бачимо, що воно менше від правої частини, а тому дане рівняння завжди має один додатний корінь. Отже, для будь-якого фіксованого додатного значення I відображення Пуанкаре $h(x)$ має єдину нерухому точку $x^* > 0, \quad h(x^*) = x^*$, а тому вихідна система має єдиний розривний цикл:

$$x^2 + \left(\dot{x} + \frac{\delta}{2}x\right)^2 \cdot \frac{1}{\Omega^2} = \left(x_*^2 + \frac{1}{\Omega^2}\left(-I + \frac{\delta}{2}x\right)^2\right) e^{\frac{\delta}{2\Omega}\left(\varphi - arctg\frac{1}{\Omega}\left(\frac{\delta}{2} - \frac{I}{x_*}\right)\right)}, \qquad (8)$$

$$\varphi_0 < \varphi < 2\pi + \varphi^*.$$

Розглянемо тепер той же лінійний маятник під дією імпульсної сили за умови, що вона діє в момент проходження ним положення з нульовою швидкістю, а її величина пропорційна положенню маятника в цей момент, тобто розглянемо розривну динамічну систему

$$\begin{aligned} &\ddot{x} + \delta\dot{x} + \omega x^2 = 0, \qquad \dot{x} \neq 0, \\ &\Delta\dot{x}|_{\dot{x}=0} = \begin{cases} \alpha x, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0, \quad \alpha < 0. \end{cases} \end{aligned} \qquad (9)$$

Покажемо, що в такій імпульсній системі при певних значеннях параметрів всі розв'язки можуть бути періодичними а їх траєкторії – це одноімпульсні розривні цикли. Зауважимо, що фазова точка $(x, \dot{x})$ де δ не починала свій рух по траєкторії диференціального рівняння системи, з часом перетинатиме пряму імпульсної дії $\dot{x} = 0$, а тому достатньо розглянути можливі рухи фазової точки, які починаються з точок цієї прямої.

Перейшовши в системі (9) до змінних (a, φ) за формулами (2) матимемо систему рівнянь

$$\begin{aligned} &\tfrac{da}{dt} = -\tfrac{\delta}{2}a, \qquad \tfrac{d\varphi}{dt} = -\Omega, \qquad tg\ \varphi \neq \tfrac{\delta}{2\Omega}, \\ &\Delta a|_{tg\ \varphi = \frac{\delta}{2\Omega}} = \left(\tfrac{\cos\varphi_0}{\cos\varphi^*} - 1\right) a, \qquad tg\ \varphi^+|_{tg\ \varphi=\frac{\delta}{2\Omega}} = \tfrac{1}{\Omega}\left(\alpha + \tfrac{\delta}{2}\right), \end{aligned} \qquad (10)$$

в якій

$$\varphi_0 = arctg\frac{\delta}{2\Omega}, \qquad \varphi^* = arctg\frac{1}{\Omega}\left(\alpha + \frac{\delta}{2}\right).$$

Щоб побудувати відповідне відображення Пуанкаре, розмірковуємо, як і в попередньому випадку, так: нехай фазова точка $(x(t), \dot{x}(t))$ починає свій рух $t = 0-$ з точки прямої $\dot{x} = 0,\ x_0 > 0$. $(x_0, 0)$ Зразу ж вона "перескакує"в точку з координатами $(x_0, \alpha x_0)$ і далі рухається по траєкторії диференціальної системи із (3) до моменту перетину цієї траєкторії з додатною піввіссю осі абсцис: $\dot{x} =$

$0, \quad x > 0$. Якщо такий перетин відбудеться в точці $(x_0, 0)$, то рух фазової точки стає періодичним, а її траєкторія – це шматок відповідної траєкторії диференціальної системи із (3).

Запишемо відповідне відображення Пуанкаре. В амплітудно-фазових координатах (φ, a) точці $(x_0, 0)$ відповідає запис (φ_0, a_0), $\quad x_0 = a_0 \cos\varphi_0$, а точка $(x_0, \alpha x_0)$ в цих змінних має координати $\left(\varphi^*,\ \frac{\cos\varphi_0}{\cos\varphi^*}a_0\right)$.

Вийшовши з цієї точки фазова точка рухається далі за законом:

$$a(\varphi) = \frac{\cos\varphi_0}{\cos\varphi^*}a_0 \cdot e^{\frac{\delta}{2\Omega}(\varphi-\varphi^*)} \tag{11}$$

до тих пір, поки φ набуде значення $\varphi = -2\pi + \varphi_0$, тобто вказана спіраль перетне півпряму $\dot{x} = 0, \quad x > 0$. В момент перетину

$$a(-2\pi + \varphi_0) = \frac{\cos\varphi_0}{\cos\varphi^*}a_0 \cdot e^{\frac{\delta}{2\Omega}(-2\pi+\varphi_0-\varphi^*)},$$

а тому вказана спіраль $a = a(\varphi)$ перетинає додатну вісь абсцис в точці $x_1 = a(-2\pi + \varphi_0) \cdot \cos\varphi_0$, або ж

$$x_1 = \frac{\cos\varphi_0}{\cos\varphi^*}x_0 \cdot e^{\frac{\delta}{2\Omega}(-2\pi+\varphi_0-\varphi^*)}. \tag{12}$$

Таким чином, відображення Пуанкаре має вигляд

$$h : x \to \frac{\cos\varphi_0}{\cos\varphi^*}e^{\frac{\delta}{2\Omega}(-2\pi+\varphi_0-\varphi^*)} \cdot x, \qquad x > 0. \tag{13}$$

Це лінійне однорідне відображення, кожна точка $x_0 > 0$ для якого є нерухомою точкою, якщо тільки параметри вихідної системи рівнянь (9) такі, що

$$\frac{\cos\varphi_0}{\cos\varphi^*}e^{\frac{\delta}{2\Omega}(-2\pi+\varphi_0-\varphi^*)} = 1. \tag{14}$$

Запишемо це рівняння у вигляді

$$\left(1 + \frac{1}{\Omega^2}\left(\alpha + \frac{\delta}{2}\right)^2\right) e^{-\frac{\delta}{\Omega}arctg\frac{1}{\Omega}\left(\alpha+\frac{\delta}{2}\right)} = \left(1 + \frac{\delta^2}{4\Omega^2}\right) e^{\frac{\delta}{\Omega}\left(2\pi - arctg\frac{\delta}{2\Omega}\right)}, \tag{15}$$

враховуючи, що

$$\cos^2\varphi_0 = \frac{1}{1 + \frac{\delta^2}{4\Omega^2}}, \qquad \frac{1}{\cos^2\varphi^*} = 1 + \frac{1}{\Omega^2}\left(\alpha + \frac{\delta}{2}\right)^2.$$

Позначивши ліву частину цього рівняння, як функцію змінної α, через $g(\alpha)$, дослідимо її для $\alpha < 0$. Безпосередньо переконуємося, що $g(\alpha) \to +\infty$, коли $\alpha \to -\infty$ і

$$g(\alpha) \to \left(1 + \left(\frac{\delta}{2\Omega}\right)^2\right) \cdot e^{-\frac{\delta}{\Omega}arctg\frac{\delta}{2\Omega}},$$

коли $\alpha \to -0$, і оскільки права частина рівняння стала і більша від $\lim\limits_{\alpha\to-0} g(\alpha)$, то робимо висновок, що рівняння має при $\alpha < 0$ єдиний розв'язок, який ми позначимо через $\alpha = \alpha^*$.

Таким чином, якщо в системі рівнянь (9) $\alpha = \alpha^*$, то всі її розв'язки є періодичними, а траєкторії кожного з них є розривними циклами.

Розглянемо тепер збурений осцилятор під дією тієї ж імпульсної сили

$$\ddot{x} + \delta\dot{x} + \omega^2 x = \varepsilon f(x,\ \dot{x}), \qquad \dot{x} \neq 0,$$
$$\Delta\dot{x}|_{\dot{x}=0} = \begin{cases} \alpha^* x, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases} \tag{16}$$

Тут $f(x, \dot{x})$ - задана функція змінних $x, \dot{x}$, вважатимемо її неперервно диференційовною, ε - малий додатний параметр α^* - корінь рівняння (14).

Тобто ми розглядаємо випадок, коли всі розв'язки системи рівнянь (16) при $\varepsilon = 0$ є періодичними. Встановимо достатні умови існування ізольованих розривних циклів в системі (16), коли $\varepsilon \neq 0$.

Запровадивши в рівняннях (16) заміну змінних (2), перейдемо від цих рівнянь до системи рівнянь

$$\begin{aligned} \tfrac{da}{dt} &= -\tfrac{\delta}{2}a + \tfrac{\varepsilon}{\Omega} f\left(acos\varphi, a\left(-\tfrac{\delta}{2}\cos\varphi + \Omega\sin\varphi\right)\right) sin\varphi, \\ \tfrac{d\varphi}{dt} &= -\Omega + \tfrac{\varepsilon}{a\Omega} f\left(acos\varphi, a\left(-\tfrac{\delta}{2}\cos\varphi + \Omega\sin\varphi\right)\right) cos\varphi, \end{aligned} \qquad \operatorname{tg}\varphi \neq \frac{\delta}{2\Omega}, \tag{17}$$

$$\Delta a|_{tg\varphi=\frac{\delta}{2\Omega}} = \left(\frac{cos\varphi_0}{cos\varphi^*} - 1\right)a, \qquad tg\varphi^+|_{tg\varphi=\frac{\delta}{2\Omega}} = \frac{1}{\Omega}\left(\alpha^* + \frac{\delta}{2}\right) \tag{18}$$

в яких, як і раніше,

$$\varphi_0 = arctg\frac{\delta}{2\Omega}, \qquad \varphi^* = arctg\frac{1}{\Omega}\left(\alpha^* + \frac{\delta}{2}\right). \tag{19}$$

Для спрощення запису надамо рівняння (17) у вигляді

$$\begin{aligned} \tfrac{da}{dt} &= -\tfrac{\delta}{2}a + \tfrac{\varepsilon}{\Omega} f_0(a,\varphi)\sin\varphi, \\ \tfrac{d\varphi}{dt} &= -\Omega + \tfrac{\varepsilon}{\Omega a} f_0(a,\varphi)\cos\varphi, \end{aligned} \qquad \operatorname{tg}\varphi \neq \frac{\delta}{2\Omega}, \tag{20}$$

позначивши

$$f_0(a,\varphi) = f\left(acos\varphi, a\left(-\frac{\delta}{2}cos\varphi + \Omega sin\varphi\right)\right),$$

а в моменти часу, коли $tg\ \varphi(t) = \frac{\delta}{2\Omega}$, $\cos\varphi(t) > 0$, маємо ті ж величини скачків, що описуються рівняннями (18).

Позначимо через $V(a,\varphi)$ функцію

$$V(a,\ \varphi) = ae^{-\frac{\delta}{2\Omega}\varphi},$$

повна похідна якої по t, складена в силу системи рівнянь (20) при $\varepsilon = 0$,

$$\frac{d}{dt}V(a,\varphi) = e^{-\frac{\delta}{2\Omega}\varphi}\frac{da}{dt} - \frac{\delta}{2\Omega}e^{-\frac{\delta}{2\Omega}\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt} \equiv 0$$

на проміжках неперервності функцій $a = a(t)$ і $\varphi = \varphi(t)$, тобто при $tg\varphi(t) \neq \frac{\delta}{2\Omega}$, $\cos\varphi(t) > 0$ ця функція стала.

Обчислимо повну похідну по t від функції $V(\varphi, a)$ в силу системи рівнянь (20), коли $\varphi \neq \varphi_0 + 2k\pi$ і $\varepsilon \neq 0$. Маємо:

$$\frac{d}{dt}V(\varphi,\ a) = \frac{\varepsilon}{\Omega}e^{-\frac{\delta}{2\Omega}\varphi}\left[f_0(a,\varphi)\sin\varphi - \frac{\delta}{2\Omega}f_0(a,\varphi)\cos\varphi\right],$$

або ж

$$\frac{d}{d\varphi}V(a,\varphi) = \frac{\varepsilon}{\Omega}e^{-\frac{\delta}{2\Omega}\varphi}\left[f_0(a,\varphi)\sin\varphi - \frac{\delta}{2\Omega}f_0(a,\varphi)\cos\varphi\right]\times$$

$$\times\frac{1}{-\Omega + \frac{\varepsilon}{a\Omega}f_0(a,\varphi)\cos\varphi}.$$

Звідси випливає, що з точністю до величини порядку малості ε^2

$$\frac{d}{d\varphi}V(a,\ \varphi) = -\frac{\varepsilon}{\Omega^2}e^{-\frac{\delta}{2\Omega}\varphi}\left[f_0(a,\ \varphi)\sin\varphi - \frac{\delta}{2\Omega}f_0(a,\ \varphi)\cos\varphi\right].$$

Зрозуміло, що на відміну від випадку $\varepsilon = 0$, при $\varepsilon \neq 0$ фазова крива може не породжувати розривний цикл вона може з ростом φ, наближатися до початку координат або ж від нього відхилятись. Щоб з'ясувати який з цих випадків насправді має місце розглянемо приріст функції $V(a,\varphi)$ за один оберт навколо початку координат. Нас цікавитиме знак цього приросту. На спіралі, що розкручується, приріст додатній, а на спіралі, що стискується з ростом φ, він від'ємний, а на циклі цей приріст дорівнює нулю.

Щоб обчислити приріст функції $V(a,\varphi)$ за один оберт, треба цю функцію проінтегрувати вздовж неперервної частини траєкторії, яка на жаль, невідома. Але в силу теореми про диференційовність розв'язку за параметром (див. наприклад [6], теорема 5.12) при достатньо малих значеннях параметра ε (розв'язок системи при $\varepsilon \neq 0$ (на скінченому проміжку часу) відрізняється поправкою порядку ε від відповідного розв'язку системи при $\varepsilon = 0$. Тому інтегрування можна провести з точністю до величини порядку ε^2 по куску спіралі

$$a(\varphi) = a_0 e^{\frac{\delta}{2\Omega}\varphi}, \qquad \varphi_0 \leq \varphi \leq 2\pi + \varphi^*.$$

Нагадаємо, що кожен такий кусок спіралі у випадку $\alpha = \alpha^*$ є траєкторією періодичного розв'язку системи рівнянь (20) при $\varepsilon = 0$.

Отже, приріст функції $V(a,\varphi)$ є величина

$$-\frac{\varepsilon}{\Omega^2}\int_{\varphi_0}^{2\pi+\varphi^*} e^{-\frac{\delta}{2\Omega}\varphi}\left[f_0\left(ae^{\frac{\delta}{2\Omega}\varphi},\ \ \varphi\right)\left(\sin\varphi - \frac{\delta}{2\Omega}\cos\varphi\right)\right]d\varphi + \varepsilon^2\ldots,$$

що з точністю до ε^2 визначається виразом

$$F(a) = \frac{\varepsilon}{\Omega}\cdot\sqrt{\Omega^2 + \frac{\delta^2}{4}}\int_{\varphi_0}^{2\pi+\varphi^*} e^{-\frac{\delta}{2\Omega}\varphi}f_0\left(ae^{\frac{\delta}{2\Omega}\varphi},\ \ \varphi\right)\cos(\varphi+\vartheta)d\varphi,$$

де $\vartheta = \arcsin\frac{1}{\sqrt{1+\frac{\delta^2}{4\Omega^2}}}$.

За властивостями функції $F(a)$ можемо судити про поведінку розв'язків системи (16) (при достатньо малих значеннях параметра $\varepsilon > 0$). Якщо функція додатна, то в вихідній системі коливання наростають, а якщо від'ємна, то відбуваються згасаючі коливання. Можливий випадок, коли ця функція змінює знак. Нехай $a = a^*$ - простий додатний корінь функції $F(a) : F(a^*) = 0$ і $F'(a^*) \neq 0$. Тоді при достатньо малих значеннях $\varepsilon > 0$ точка $a = a^*$ породжує у вихідній системі одноімпульсний розривний цикл.

Підводячи підсумок, можна сформулювати таке твердження.

Теорема 1. *Нехай в системі рівнянь (16) функція $f(x, \dot{x})$ є неперервно диференційовною в деякому крузі $x^2 + \dot{x}^2 \leq r^2$ і параметри системи такі, що $\alpha = \alpha^*$ є від'ємним коренем рівняння (15). Якщо рівняння $F(a) = 0$ має ізольований додатний корінь $a = a^*$ такий, що $F'(a^*) \neq 0$, то при достатньо малих значеннях параметра $\varepsilon > 0$ система рівнянь має розривний одноімпульсний цикл. Цей цикл є асимптотично стійким, якщо $F'(a^*) < 0$ і нестійким, якщо $F'(a^*) > 0$.*

Розглянемо тепер випадок, коли осцилятор піддається дії імпульсної сили кожний раз коли фазова точка проходить положення $\dot{x} = 0$ і величина імпульсу в цей момент пропорційна положенню, тобто $\alpha x, \;\; \alpha < 0$. Система рівнянь, що описує рух такого осцилятора має вигляд

$$\begin{gathered} \ddot{x} + \delta \dot{x} + \omega^2 x = \varepsilon f(x, \; \dot{x}), \qquad \dot{x} \neq 0, \\ \Delta \dot{x}|_{\dot{x}=0} = \alpha x|_{\dot{x}=0} . \end{gathered} \tag{21}$$

Як і раніше, запровадивши змінні (a, φ) за формулами

$$x = a \cos\varphi, \qquad \dot{x} = a\left(-\frac{\delta}{2}\cos\varphi + \Omega \sin\varphi\right), \qquad \Omega^2 = \omega^2 - \frac{\delta^2}{4},$$

перейдемо до системи рівнянь

$$\tfrac{da}{dt} = -\tfrac{\delta}{2}a + \tfrac{\varepsilon}{\Omega} f\left(a\cos\varphi, \;\; a\left(-\tfrac{\delta}{2}\cos\varphi + \Omega\sin\varphi\right)\right)\sin\varphi, \tag{22}$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = -\Omega + \frac{\varepsilon}{a\Omega} f\left(a\cos\varphi, \;\; a\left(-\frac{\delta}{2}\cos\varphi + \Omega\sin\varphi\right)\right)\cos\varphi, \qquad \mathrm{tg}\;\; \varphi \neq \frac{\delta}{2\Omega}$$

$$\Delta a|_{tg\;\;\varphi = \frac{\delta}{2\Omega}} = \left(\frac{\cos\varphi_0}{\cos\varphi^*} - 1\right) a, \qquad \Delta\varphi|_{tg\;\;\varphi = \frac{\delta}{2\Omega}} = \varphi^* - \varphi_0.$$

Спочатку встановимо умови, при виконанні яких в вихідній системі у випадку $\varepsilon = 0$ всі розв'язки є періодичними, тобто кожна траєкторія породжує двоімпульсний розривний цикл. Для цього, як і при дослідженні існування одноімпульсних циклів, побудуємо відповідне відображення Пуанкаре.

Фазова точка $(x, \dot{x})$, почавши рух при $t = -0$ з положення $(x_0, \; 0)$, під дією імпульсної сили миттєво перескакує в точку $(x_0, \; \alpha x_0)$. Далі під дією неперервного закону руху вона попадає в точку $(x_1, \; 0), \;\; x_1 < 0$, звідки миттєво попадає в точку $(x_1, \; \alpha x_1)$. З цієї точки під дією неперервного закону руху вона з часом попадає в точку прямої $\dot{x} = 0, \;\;\; x > 0$. Позначимо цю точку $(x^*, \; 0)$. Якщо $x^* = x_0$, то це й означає, що траєкторією руху фазової точки є двоімпульсний розривний цикл. Точка x_0, що породжує цей розривний цикл, є нерухомою точкою описаного відображення Пуанкаре: $h : x_0 \to x^*$.

Встановимо вигляд функції $h = h(x_0)$. Коли $\varepsilon = 0$, то змінні a і φ залежать від t таким чином

$$a = a(t) = a(t_0)e^{-\frac{\delta}{2}(t-t_0)}, \qquad \varphi = \varphi(t) = \varphi(t_0) - \Omega(t - t_0)$$

для всіх t, таких що $tg\ \varphi(t) \neq \frac{\delta}{2\Omega}$, тобто коли $\varphi(t) \neq \varphi_0 + k\pi$, а при $\varphi(t) = \varphi_0 + k\pi$ ці змінні зазнають розривів першого роду згідно системи (22).

Отже, на проміжках неперервності зміни φ : $-\pi < \varphi - \varphi_0 < \varphi^* - \varphi_0$ і $-2\pi < \varphi - \varphi_0 < -\pi + \varphi^* - \varphi_0$

$$\begin{aligned} a(\varphi) &= a_0\tfrac{\cos\varphi_0}{\cos\varphi^*}e^{\frac{\delta}{2\Omega}(\varphi-\varphi^*)}, \qquad -\pi + \varphi_0 < \varphi < \varphi^*; \\ a(\varphi) &= a_1\tfrac{\cos\varphi_0}{\cos\varphi^*}e^{\frac{\delta}{2\Omega}(\varphi+\pi-\varphi^*)}, \qquad -2\pi + \varphi_0 < \varphi < -\pi + \varphi^*, \end{aligned} \tag{23}$$

де

$$a_1 = a_0\frac{\cos\varphi_0}{\cos\varphi^*}e^{\frac{\delta}{2\Omega}(-\pi+\varphi_0-\varphi^*)}.$$

Таким чином

$$a(\varphi_0 - 2\pi) = a_0\frac{\cos^2\varphi_0}{\cos^2\varphi^*}e^{-\frac{\delta}{2\Omega}(\pi+\varphi^*-\varphi_0)},$$

а значить, функція $h = h(x)$ відображає початкову точку x_0 в точку

$$x = a(\varphi_0 - 2\pi)\cos\varphi_0 = x_0\frac{\cos^2\varphi_0}{\cos^2\varphi^*} \cdot e^{-\frac{\delta}{\Omega}(\pi+\varphi^*-\varphi_0)},$$

тобто

$$h = h(x) = x\frac{\cos^2\varphi_0}{\cos^2\varphi^*}e^{-\frac{\delta}{\Omega}(\pi+\varphi^*-\varphi_0)}. \tag{24}$$

Нерухомі точки відображення Пуанкаре $h : x \to h(x)$ - це розв'язки рівняння

$$x\frac{\cos^2\varphi_0}{\cos^2\varphi^*} = e^{\frac{\delta}{\Omega}(\pi+\varphi^*-\varphi_0)} \cdot x,$$

з якого робимо висновок, що кожна точка $x > 0$ є нерухомою точкою відображення h, якщо тільки виконується рівність

$$\frac{\cos^2\varphi_0}{\cos^2\varphi^*} = e^{\frac{\delta}{\Omega}(\pi+\varphi^*-\varphi_0)}, \tag{25}$$

яку ще можна подати в такому вигляді

$$\frac{1 + \frac{1}{\Omega^2}\left(\alpha + \frac{\delta}{2}\right)^2}{1 + \left(\frac{\delta}{2\Omega}\right)^2} = e^{\frac{\delta}{\Omega}\left(\pi + arctg\frac{1}{\Omega}\left(\alpha+\frac{\delta}{2}\right) - arctg\frac{\delta}{2\Omega}\right)}, \tag{26}$$

або

$$\begin{array}{l} \ln\left(1+\frac{1}{\Omega^2}\left(\alpha+\frac{\delta}{2}\right)^2\right)-\frac{\delta}{\Omega}arctg\frac{1}{\Omega}\left(\alpha+\frac{\delta}{2}\right)= \\ =\ln\left(1+\left(\frac{\delta}{2\Omega}\right)^2\right)+\frac{\delta}{\Omega}\left(\pi-arctg\frac{\delta}{2\Omega}\right). \end{array} \tag{27}$$

Дослідимо цю рівність, як рівняння щодо $\alpha < 0$. Позначивши ліву частину рівняння через

$$g(\alpha)=\ln\left(1+\frac{1}{\Omega^2}\left(\alpha+\frac{\delta}{2}\right)^2\right)-\frac{\delta}{2}arctg\frac{1}{\Omega}\left(\alpha+\frac{\delta}{2}\right), \tag{28}$$

бачимо, що

$$\lim_{\alpha\to-0}g(\alpha)=\ln\left(1+\left(\frac{\delta}{2\Omega}\right)^2\right)-\frac{\delta}{2}arctg\frac{\delta}{2\Omega},$$

тобто, ця величина завжди менша від правої частини рівняння. Оскільки права частина рівняння стала, а ліва $g(\alpha)\to+\infty$, коли $\alpha\to-\infty$, то рівняння (26) має від'ємний корінь, який ми позначимо $\alpha=\alpha^*<0$. Таким чином, справедливе таке твердження.

Теорема 2. *Якщо в системі рівнянь (21) $\alpha=\alpha^*<0$ - є корінь рівняння (26), то при $\varepsilon=0$ всі розв'язки цих рівнянь є періодичними, а траєкторія кожного з них є двоімпульсний розривний цикл. Цей цикл задається в параметричному вигляді рівняннями:*

$$x=\frac{x_0}{\cos\varphi_0}e^{\frac{\delta}{2\Omega}(\varphi-\varphi_0)}\cdot\cos\varphi, \tag{29}$$

$$\dot{x}=\frac{x_0}{\cos\varphi_0}e^{\frac{\delta}{2\Omega}(\varphi-\varphi_0)}\left(-\frac{\delta}{2}\cos\varphi+\Omega\sin\varphi\right),\qquad \varphi_0<\varphi<\pi+\varphi^*,$$

і рівняннями

$$\begin{array}{c} x=\frac{x_0}{\cos\varphi^*}e^{\frac{\delta}{2\Omega}(\varphi-\pi-\varphi_0)}\cdot\cos\varphi, \\ \dot{x}=\frac{x_0}{\cos\varphi^*}e^{\frac{\delta}{2\Omega}(\varphi-\pi-\varphi_0)}\left(-\frac{\delta}{2}\cos\varphi+\Omega\sin\varphi\right), \end{array} \tag{30}$$

якщо $\pi+\varphi_0<\varphi<2\pi+\varphi^*$.

Тут, як і раніше, $\varphi_0=arctg\frac{\delta}{2\Omega}$, а $\varphi^*=arctg\frac{1}{\Omega}\left(\alpha^*+\frac{\delta}{2}\right)$.

З'ясуємо тепер можливість існування розривних циклів в системі (22) при $\varepsilon\neq0$ у випадку $\alpha=\alpha^*$.

Ввівши позначення

$$f_0(a,\ \varphi)=f\left(a\cos\varphi,\ a\left(-\frac{\delta}{2}\cos\varphi+\Omega\sin\varphi\right)\right),$$

подамо її в вигляді

$$\begin{array}{l} \frac{da}{dt}=-\frac{\delta}{2}a+\frac{\varepsilon}{\Omega}f_0(a,\ \varphi)\sin\varphi, \\ \frac{d\varphi}{dt}=-\Omega+\frac{\varepsilon}{a\Omega}f_0(a,\ \varphi)\cos\varphi, \end{array}\quad \mathrm{tg}\,\varphi\neq\frac{\delta}{2\Omega}, \tag{31}$$

$$\Delta a|_{tg\ \varphi=\frac{\delta}{2\Omega}} = \left(\frac{\cos\varphi_0}{\cos\varphi^*} - 1\right)a, \qquad \Delta\varphi|_{tg\ \varphi=\frac{\delta}{2\Omega}} = \varphi^* - \varphi_0,$$

$$\varphi_0 = arctg\frac{\delta}{2\Omega}, \qquad \varphi^* = arctg\frac{1}{\Omega}\left(\alpha^* + \frac{\delta}{2}\right),$$

де α^* - від'ємний корінь рівняння (26).

Як і при дослідженні питання існування одноімпульсних циклів, розглянемо функцію

$$V(a,\ \varphi) = a\cdot e^{-\frac{\delta}{2\Omega}\varphi}.$$

Ця функція є сталою вздовж розв'язків системи (31) при $\varepsilon = 0$, а при $\varepsilon \neq 0$ похідна цієї функції по t, складена в силу рівнянь (31), є

$$\frac{dV}{dt} = e^{-\frac{\delta}{2\Omega}\varphi}\frac{da}{dt} - \frac{\delta}{2\Omega}e^{-\frac{\delta}{2\Omega}\varphi}\frac{d\varphi}{dt} =$$

$$= e^{-\frac{\delta}{2\Omega}\varphi}\left[-\frac{\delta}{2}a + \varepsilon\varphi_0(a,\ \varphi)\sin\varphi - \frac{\delta a}{2\Omega}\left(-\Omega + \frac{\varepsilon}{\Omega a}f_0(a,\ \varphi)\cos\varphi\right)\right] =$$

$$= e^{-\frac{\delta}{2\Omega}\varphi}\cdot\frac{\varepsilon}{\Omega}\left[f_0(a,\ \varphi)\sin\varphi - \frac{\delta}{2\Omega}f_0(a,\ \varphi)\cos\varphi\right],$$

а

$$\frac{dV}{d\varphi} = -\frac{\varepsilon}{\Omega^2}e^{-\frac{\delta}{2\Omega}\varphi}\left[f_0(a,\ \varphi)\sin\varphi - \frac{\delta}{2\Omega}f_0(a,\ \varphi)\cos\varphi\right] + \varepsilon^2\ldots$$

Щоб з'ясувати, який приріст одержує функція $V(a,\ \varphi)$, коли φ одержує приріст 2π, треба її про інтегрувати в межах від 0 до 2π вздовж траєкторії системи рівнянь (31). На жаль, цієї траєкторії нам невідомо. Але ми вже знаємо, що кожна така траєкторія лежить в деякому околі U_ε розривного циклу системи (31) при $\varepsilon = 0$, рівняння (29),(30) якого нам вже відомі.

Інтегруючи останню рівність по циклу, маємо приріст функції $V(a,\ \varphi)$ за один оборот φ з урахуванням скачків для змінних a і φ:

$$-\frac{\varepsilon}{\Omega^2}\sqrt{1+\frac{\delta^2}{4}}\left[\int_{\varphi_0}^{\pi+\varphi^*} e^{-\frac{\delta}{2\Omega}\varphi}f_0\left(ae^{\frac{\delta}{2\Omega}(\varphi-\varphi_0)},\ \varphi\right)\cos(\varphi+\vartheta)d\varphi + \right.$$

$$\left. + \int_{\pi+\varphi_0}^{2\pi+\varphi^*} e^{-\frac{\delta}{2\Omega}\varphi}f_0\left(\frac{\cos\varphi_0}{\cos\varphi^*}ae^{\frac{\delta}{2\Omega}(\varphi-\pi-\varphi_0)}\cos(\varphi+\vartheta)\right)d\varphi\right] + \varepsilon^2\ldots$$

$$= \frac{\varepsilon}{\Omega^2}\sqrt{1+\frac{\delta^2}{4}}F(a) + \varepsilon^2\ldots,$$

де

$$F(a) = -\int_{\varphi_0}^{\pi+\varphi^*} e^{-\frac{\delta}{2\Omega}\varphi}\cdot f_0\left(ae^{\frac{\delta}{2\Omega}(\varphi-\varphi_0)}\cdot\cos(\varphi+\vartheta)\right)d\varphi +$$

$$+\int_{\pi+\varphi_0}^{\pi+\varphi^*} e^{-\frac{\delta}{2\Omega}\varphi}\cdot f_0\left(\frac{\cos\varphi_0}{\cos\varphi^*} a e^{\frac{\delta}{2\Omega}(\varphi-\pi-\varphi_0)}\cdot\cos(\varphi+\vartheta)\right)d\varphi. \qquad (32)$$

Підсумовуючи наведені вище викладки, можемо сформулювати таке твердження.

Теорема 3. *Нехай в рівняннях (21) функція $f(x,\ \dot{x})$ є неперервно диференційовною в деякому крузі*

$$x^2+\dot{x}^2\le r^2,$$

а $\alpha=\alpha^*<0$ є від'ємним коренем рівняння (26).

Якщо рівняння $F(a)=0$ має ізольований додатний корінь $a=a^*$, такий, що $F'(a^*)\neq 0$, то існує таке $\varepsilon_0>0$, що для кожного ε, $0<\varepsilon<\varepsilon_0$ система рівнянь (21) має двоімпульсний розривний цикл. Цей цикл є стійким, якщо $F'(a^*)<0$ і нестійким, якщо $F'(a^*)>0$.

Зауважимо, що цей розривний цикл знаходиться в деякому $U(\varepsilon)$-околі кусків кривої, якщо на фазовій площині в параметричному вигляді задається рівняннями

$$x=a^*e^{\frac{\delta}{2\Omega}(\varphi-\varphi_0)}\cdot\cos\varphi,\qquad \dot{x}=a^*e^{\frac{\delta}{2\Omega}(\varphi-\varphi_0)}\left(-\frac{\delta}{2}\cos\varphi+\Omega\sin\varphi\right),$$

якщо $\varphi_0<\varphi<\pi+\varphi^*$ і рівняннями

$$x=a^*\frac{\cos\varphi_0}{\cos\varphi^*}e^{\frac{\delta}{2\Omega}(\varphi-\pi-\varphi_0)}\cdot\cos\varphi,$$

$$\dot{x}=a^*\frac{\cos\varphi_0}{\cos\varphi^*}e^{\frac{\delta}{2\Omega}(\varphi-\pi-\varphi_0)}\left(-\frac{\delta}{2}\cos\varphi+\Omega\sin\varphi\right),$$

якщо $\pi+\varphi_0<\varphi<2\pi+\varphi^*$.

Рух фазової точки по цьому циклу є періодичним з періодом щодо

Ωt рівним $2(\pi+\varphi^*-\varphi_0)$.

Список використаної літератури

1. *Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э.* Теория колебаний. – М.: Наука. 1981. – 568с.
2. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. – М.: Наука. 1974. – 502с.
3. *Samoilenko A. M., Perestyuk N. A.* Impulsive differential equations. – Singapore: World Sci., 1995. – 462 p.
4. *Perestyuk N. A., Plotnikov V. A., Samoilenko A. M., Skripnik N. V.* Differential equations with impulse effects, multivalued right-hand sides with discontinuities. De Gruyter, 2011. – 307 p.
5. *Perestyuk Yu. M.* Discontinuous oscillations in one impulsive system // Journal of Mathematical Sciences. Springer Science+Business Media New York October 2013, Volume 194, Issue 4, pp 404—413.
6. *Самойленко А. М., Перестюк М. О., Парасюк І. О.* Диференціальні рівняння. Підручник. 3-тє видання, – Київ: ВПЦ Київ. ун-т. – 527 с.

Одержано 25.09.2016