УДК 517.9:519.46

М. І. Сєров, М. М. Сєрова, Л. М. Блажко (Полтавський нац. тех. ун-т ім. Ю. Кондратюка)

КОНФОРМНА ІНВАРІАНТНІСТЬ НЕЛІНІЙНОГО ДВОВИМІРНОГО РІВНЯННЯ Д'АЛАМБЕРА

All possible representations of the Poincare algebras, the extended Poincare algebra and a conformal algebra, with respect to which second order quasilinear partial differential equations are invariant, have been described. The obtained results of the classification are applied for studying the invariance of the equation with respect to these algebras.

Описано всі можливі зображення алгебр Пуанкаре, розширеної алгебри Пуанкаре та конформної алгебри, відносно яких інваріантні квазілінійні диференціальні рівняння з частиними похідними другого порядку. Одержані результати класифікації застосовано для дослідження інваріантності даного рівняння відносно цих алгебр.

1. Вступ. Оскільки основні фізичні закони, рівняння руху, різні математичні моделі володіють явною або неявною, геометричною або негеометричною, локальною або нелокальною симетріями, то у сучасних дослідженнях у математичній фізиці важливу роль відіграє принцип симетрії [7], [10], [11], [13]. Широкими симетрійними властивостями володіють основні рівняння математичної фізики — Ньютона, Лапласа, Д'Аламбера, Шредінгера, Максвела і т. д. Саме цей факт виділяє їх серед класів інших рівнянь.

Цікавим об'єктом дослідження внаслідок свого широкого застосування є квазілінійні хвильові рівняння.

Розглянемо квазілінійне диференціальне рівняння другого порядку

$$F^{\mu\nu}\left(u, \underset{1}{u}\right) u_{\mu\nu} + G\left(u, \underset{1}{u}\right) = 0, \tag{1}$$

де $F^{\mu\nu}\left(u, \underset{1}{u}\right)$, $G\left(u, \underset{1}{u}\right)$ — довільні гладкі функції, $u = u(x) \in R^1$, $x = (x_0, \vec{x}) \in \in R^{1+n}$, $\underset{1}{u}$ — сукупність всеможливих похідних першого порядку функції u, $u_{\mu\nu} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_\mu \partial x_\nu}$, $\mu, \nu = \overline{0, n}$.

Найбільш відомими рівняннями класу (1) є рівняння ейконалу

$$u_\mu u^\mu = F(u), \tag{2}$$

нелінійне хвильове рівняння

$$\Box u + G\left(u, \underset{1}{u}\right) = 0, \tag{3}$$

рівняння Борна–Інфельда

$$(1 - u_\nu u^\nu)\Box u + u^\mu u^\nu u_{\mu\nu} = 0, \tag{4}$$

рівняння Ліувілля

$$\Box u + \lambda e^u = 0. \tag{5}$$

Рівняння (2)–(5) володіють широкими симетріями Лі. Вони інваріантні відносно алгебр Пуанкаре, розширеної алгебри Пуанкаре, конформної алгебри [1], [2], [13], [9], [16].

Ще в 1980 році Ібрагімов у роботі [5] встановив, що нелінійне хвильове рівняння

$$\Box u = F(u), \tag{6}$$

де $u = u(x)$, $x = (x_0, \vec{x}) \in R^{1+n}$, інваріантне відносно конформної алгебри

$$AC(1,n) = \langle \partial_\mu, J_{\mu\nu} = x^\nu \partial_\mu - x^\mu \partial_\nu, D = x_\mu \partial_\mu + \frac{1}{1-n} u \partial_u, K_\mu = 2x_\mu D - x^2 \partial^\mu \rangle \tag{7}$$

тоді і тільки тоді, коли воно має вигляд

$$\Box u = \lambda u^{\frac{n+3}{n-1}}, \tag{8}$$

де λ — довільна стала. В роботі [13] показано, що рівняння вигляду

$$\Box u = F\left(u, \underset{1}{u}\right), \tag{9}$$

інваріантне відносно конформної алгебри (7) тоді і тільки тоді, коли воно локально еквівалентне рівнянню (8).

Зазначимо, що у роботі [18] розглянута задача інваріантності загального рівняння другого порядку відносно алгебри Пуанкаре та деяких її розширень. У роботах [3] [4], [8] для випадку $n = 1$ ми описали всеможливі з точністю до перетворень еквівалентності рівняння класу (1), інваріантні відносно алгебри Пуанкаре $AP(1,1)$, розширеної алгебри Пуанкаре $AP_1(1,1)$ та конформної алгебри $AC(1,1)$.

У даній роботі ми ставимо аналогічну задачу для випадку $n = 2$.

Алгеброю Пуанкаре називається (див., наприклад, [13]) алгебра, яку ми позначимо

$$AP(1,n) = \langle P_\mu, J_{\mu\nu} \rangle, \tag{10}$$

де $\mu, \nu = \overline{0,n}$, оператори якої задовольняють наступним комутаційним співвідношенням

$$[P_\alpha, J_{\mu\nu}] = g^{\alpha\mu} P_\nu - g^{\alpha\nu} P_\mu, \tag{11}$$

$$[J_{\alpha\beta}, J_{\mu\nu}] = g^{\alpha\mu} J_{\nu\beta} + g^{\alpha\nu} J_{\beta\mu} + g^{\beta\mu} J_{\alpha\nu} + g^{\beta\nu} J_{\mu\alpha}, \tag{12}$$

де $\alpha, \beta, \mu, \nu = \overline{0,n}$, $g^{\mu\nu}$ — метричний тензор простору R^{1+n} з сигнатурою $(+, -, -, ..., -)$, тобто

$$g^{\mu\nu} = \begin{cases} 0, \mu \neq \nu, \\ 1, \mu = \nu = 0, \\ -1, \mu = \nu \neq 0. \end{cases} \tag{13}$$

Розширеною алгеброю Пуанкаре називається алгебра, яку позначимо

$$AP_1(1,n) = \langle P_\mu, J_{\mu\nu}, D \rangle, \tag{14}$$

оператори якої задовольняють комутаційним співвідношенням (11), (12) та

$$[P_\alpha, D] = P_\alpha, \tag{15}$$

$$[J_{\alpha\beta}, D] = 0. \tag{16}$$

Конформною алгеброю називається алгебра

$$AC(1, n) = \langle P_\mu, J_{\mu\nu}, D, K_\mu \rangle, \tag{17}$$

оператори якої задовольняють комутаційним співвідношенням (11), (12), (15), (16) та

$$[P_\alpha, K_\mu] = 2g^{\alpha\mu}D + 2J_{\mu\alpha}, \tag{18}$$

$$[J_{\alpha\beta}, K_\mu] = g^{\beta\mu}K_\alpha - g^{\alpha\mu}K_\beta, \tag{19}$$

$$[D, K_\mu] = K_\mu. \tag{20}$$

2. Перетворення еквівалентності. Оскільки рівняння (1) містить довільні функції $F^{\mu\nu}$, G, то воно описує певний клас диференціальних рівнянь.

При симетрійній класифікації деякого класу рівнянь важливу роль відіграють перетворення еквівалентності даного класу рівнянь.

Означення [6], [12]. Перетворення незалежних змінних x та залежнох змінної u

$$\begin{cases} x' = f(x, u), \\ u' = g(x, u), \end{cases} \tag{21}$$

які довільне рівняння класу (1) переводять у рівняння з того ж класу називаються перетвореннями еквівалентності класу рівнянь (1).

Знання перетворень еквівалентності дозволяє розбити клас рівнянь на нееквівалентні підкласи, вибрати в кожному підкласі канонічного представника, дослідити його симетрійні властивості та поширити ці властивості на всі рівняння даного підкласу.

У роботах [6], [12] запропонований алгоритм знаходження неперервних перетворень еквівалентності. Використавши цей алгоритм, ми отримали наступний результат.

Лема 1. Максимальною групою неперервних перетворень класу рівнянь (1) є перетворення вигляду

$$x'_\mu = \gamma_{\mu\nu}x_\nu + \theta_\mu(u), u' = \alpha_{\mu\nu}x_\mu x_\nu + \beta_\mu x_\mu + \theta(u), \tag{22}$$

де $\gamma_{\mu\nu}$ — довільні сталі, які задають групу $GL(1+n, R)$, $\alpha_{\mu\nu}$, β_μ — групові параметри, $\theta = \theta(u)$, $\theta_\mu = \theta_\mu(u)$ — довільні гладкі функції, $\theta(u) \neq const$.

Лема 1 доводиться методами [6], [12].

Таким чином всі подальші дослідження ми будемо проводити з точністю до перетворень (22).

3. Система визначальних рівнянь. Основна алгебра інваріантності. Інфінітезимальний оператор алгебри інваріантності рівняння (1) будемо шукати у вигляді

$$X = \xi^\mu(x, u)\partial_\mu + \eta(x, u)\partial_u. \tag{23}$$

Стандартним методом С.Лі [7] доводиться наступне твердження.

Лема 2. Рівняння (1) інваріантне відносно оператора (23) тоді і тільки тоді, коли координати інфінітезимального оператора ξ^μ, η та функції $F^{\mu\nu}$, G задовольняють наступній "визначальній "системі диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned} &\eta F^{\mu\nu}_u + (\eta_\alpha + u_\alpha\eta_u - u_\beta\xi^\beta_\alpha - u_\alpha u_\beta\xi^\beta_u)F^{\mu\nu}_{u_\alpha} + (\eta_u - u_\alpha\xi^\alpha_u)F^{\mu\nu} - \\ &-(\xi^\nu_\alpha + u_\alpha\xi^\nu_u)F^{\mu\alpha} - (\xi^\mu_\alpha + u_\alpha\xi^\mu_u)F^{\alpha\nu} = \lambda F^{\mu\nu}, \end{aligned} \tag{24}$$

$$\eta G_u + (\eta_\alpha + u_\alpha\eta_u - u_\beta\xi^\beta_\alpha - u_\alpha u_\beta\xi^\beta_u)G_{u_\alpha}+$$
$$+(\eta_{\mu\nu} + u_\mu\eta_{\nu u} + u_\nu\eta_{\mu u} + u_\mu u_\nu\eta_{uu} - u_\alpha(\xi^\alpha_{\mu\nu} + u_\mu\xi^\alpha_{\nu u} + u_\nu\xi^\alpha_{\mu u} + u_\mu u_\nu\xi^\alpha_{uu}))F^{\mu\nu} = \lambda G, \quad (25)$$

де λ — деяка функція, що підлягає визначенню.

Лема 2 доводиться методом С. Лі (див., наприклад, [7], [15]).

Розчепивши систему рівнянь (24) — (25) за функціями $F^{\mu\nu}$, G та їх похідними, одержимо

$$\xi^\mu_\mu = \xi^\mu_u = \eta = 0, \quad (26)$$

звідки

$$\xi^\mu = d_\mu - const, \quad \eta = 0. \quad (27)$$

Функції (27) задають основну алгебру інваріантності рівняння (1):

$$A^{bas} = \langle \partial_0, \partial_1, ..., \partial_n \rangle, \quad (28)$$

відносно якої воно інваріантне при довільних гладких функціях $F^{\mu\nu}$, G.

4. Зображення алгебри Пуанкаре $AP(1,2)$. Оскільки рівняння (1) інваріантне відносно алгебри (28), то в якості операторів P_μ алгебри (10) візьмемо оператори ∂_μ, тобто

$$P_\mu = \partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x_\mu}. \quad (29)$$

Знайдемо тепер вигляд операторів $J_{\mu\nu}$, які разом з операторами (29) утворюють алгебру Пуанкаре (11) — (12). Задавши довільним чином оператори $J_{\mu\nu}$:

$$J_{\mu\nu} = \xi^{\mu\nu\beta}(x,u)\partial_\beta + \eta^{\mu\nu}(x,u)\partial_u \quad (30)$$

та використавши комутаційні співвідношення (11), одержимо

$$\xi^{\mu\nu\beta}_\alpha = g^{\alpha\mu}\delta_{\beta\nu} - g^{\alpha\nu}\delta_{\beta\mu}, \quad \eta^{\mu\nu}_\beta = 0. \quad (31)$$

Проінтегрувавши систему (31), знаходимо

$$\xi^{\mu\nu\beta} = x^\mu\delta_{\beta\nu} - x^\nu\delta_{\beta\mu} + a^{\mu\nu\beta}(u), \eta^{\mu\nu} = m^{\mu\nu}(u), \quad (32)$$

де $a^{\mu\nu\beta} = a^{\mu\nu\beta}(u)$, $m^{\mu\nu} = m^{\mu\nu}(u)$ — довільні гладкі функції. З урахуванням формул (32) оператори (30) запишуться у вигляді

$$J_{\mu\nu} = \xi^\mu\partial_\nu - x^\nu\partial_\mu + a^{\mu\nu\beta}(u)\partial_\beta + m^{\mu\nu}(u)\partial_u. \quad (33)$$

З формул (11) легко бачити, що $J_{\nu\mu} = -J_{\mu\nu}$. Тому

$$a^{\nu\mu\beta} = -a^{\mu\nu\beta}, \quad (34)$$

$$m^{\nu\mu}(u) = -m^{\mu\nu}(u). \quad (35)$$

Якщо врахувати комутаційні співвідношення (12), то одержимо наступну систему рівнянь для визначення невідомих функцій $a^{\mu\nu\beta}$ та $m^{\mu\nu}$:

$$m^{\alpha\beta}\dot{m}^{\mu\nu} - m^{\mu\nu}\dot{m}^{\alpha\beta} = g^{\alpha\mu}m^{\nu\beta} + g^{\alpha\nu}m^{\beta\mu} + g^{\beta\mu}m^{\alpha\nu} + g^{\beta\nu}m^{\mu\alpha}, \quad (36)$$

$$m^{\alpha\beta}\dot{a}^{\mu\nu\gamma} - m^{\mu\nu}\dot{a}^{\alpha\beta\gamma} = g^{\nu\sigma}\delta_{\mu\gamma}a^{\alpha\beta\sigma} + g^{\alpha\sigma}\delta_{\beta\gamma}a^{\mu\nu\sigma} - g^{\mu\sigma}\delta_{\nu\gamma}a^{\alpha\beta\sigma} - g^{\beta\sigma}\delta_{\alpha\gamma}a^{\mu\nu\sigma} + \\ + g^{\alpha\mu}a^{\nu\beta\gamma} + g^{\alpha\nu}a^{\beta\mu\gamma} + g^{\beta\mu}a^{\alpha\nu\gamma} + g^{\beta\nu}a^{\mu\alpha\gamma}. \tag{37}$$

У випадку $n = 2$ система (36), з урахуванням умов (34), має вигляд

$$\begin{aligned} m^{02}\dot{m}^{01} - m^{01}\dot{m}^{02} &= m^{12}, \\ m^{12}\dot{m}^{01} - m^{01}\dot{m}^{12} &= m^{02}, \\ m^{12}\dot{m}^{02} - m^{02}\dot{m}^{12} &= -m^{01}, \end{aligned} \tag{38}$$

а система рівнянь (37) перепишеться наступним чином

$$\begin{aligned} m^{01}\dot{a}^{020} - m^{02}\dot{a}^{010} &= -a^{012} + a^{021} - a^{120}, \\ m^{01}\dot{a}^{021} - m^{02}\dot{a}^{011} &= a^{020} - a^{121}, \\ m^{01}\dot{a}^{022} - m^{02}\dot{a}^{012} &= -a^{010} - a^{121}, \\ m^{01}\dot{a}^{120} - m^{12}\dot{a}^{010} &= a^{121} - a^{020}, \\ m^{01}\dot{a}^{121} - m^{12}\dot{a}^{011} &= -a^{012} - a^{021} + a^{120}, \\ m^{02}\dot{a}^{122} - m^{12}\dot{a}^{012} &= a^{011} - a^{022}, \\ m^{02}\dot{a}^{120} - m^{12}\dot{a}^{020} &= a^{010} + a^{122}, \\ m^{02}\dot{a}^{121} - m^{12}\dot{a}^{021} &= a^{011} - a^{022}, \\ m^{02}\dot{a}^{122} - m^{12}\dot{a}^{022} &= a^{012} + a^{021} + a^{120}. \end{aligned} \tag{39}$$

Розв'яжемо спочатку систему рівнянь (38). Взявши лінійну комбінацію її рівнянь відповідно з множниками $-m^{12}$, m^{02}, $-m^{01}$, одержимо

$$(m^{12})^2 = (m^{01})^2 + (m^{02})^2. \tag{40}$$

Загальним розв'язком системи (38) при умові (40) є функції

$$m^{01} = m^{02} = m^{12} = 0, \tag{41}$$

або

$$m^{01} = \frac{\sinh\varphi}{\dot{\varphi}}, \quad m^{02} = \frac{1}{\dot{\varphi}}, \quad m^{12} = \frac{\cosh\varphi}{\dot{\varphi}}, \tag{42}$$

де $\varphi = \varphi(u) \neq const$ — довільна гладка функція.

Зауваження. У випадку $m^{\mu\nu} = 0$ задача опису диференціальних рівнянь, інваріантних відносно алгебри $AP(1, n)$, розв'язана в [17]. Тому основну увагу ми звернемо на випадок (42).

Застосувавши перетворення еквівалентності

$$x_\mu \to x_\mu, \quad \varphi(u) \to u,$$

одержимо

$$m^{01} = \sinh u, \quad m^{02} = 1, \quad m^{12} = \cosh u. \tag{43}$$

Застосувавши перетворення еквівалентності

$$x_\mu \to x_\mu + \theta_\mu(u), \quad u \to u, \tag{44}$$

де

$$\theta_0 = \int \frac{a^{120}}{m^{12}}du, \quad \theta_1 = \int \frac{a^{021}}{m^{02}}du, \quad \theta_2 = \int \frac{a^{012}}{m^{01}}du, \tag{45}$$

ми можемо позбутися функцій a^{012}, a^{021}, a^{120} в операторах $J_{\mu\nu}$. Тобто, не втрачаючи загальності, можна покласти

$$a^{012} = a^{021} = a^{120} = 0. \tag{46}$$

Не важко переконатися, що при умовах (46) система рівнянь (39) сумісна, якщо

$$a^{020} - a^{121} = 0, \quad a^{010} + a^{122} = 0, \quad a^{011} - a^{022} = 0. \tag{47}$$

Тоді з системи (39) одержуємо

$$\dot{a}^{\alpha\beta\gamma} = 0.$$

Таким чином

$$a^{011} = a^{022} = k_0, \quad a^{010} = -a^{122} = k_1, \quad a^{020} = a^{121} = k_2, \tag{48}$$

де k_μ — довільні сталі.

У результаті одержуємо, що оператори $J_{\mu\nu}$ мають вигляд

$$J_{\mu\nu} = (x^\mu + k^\mu)\partial_\nu - (x^\nu + k^\nu)\partial_\mu + m^{\mu\nu}(u)\partial_u. \tag{49}$$

Оператори (49) з точністю до перетворень

$$x_\mu + k_\mu \to x_\mu, \quad u \to u \tag{50}$$

еквівалентні операторам

$$J_{\mu\nu} = x^\mu\partial_\nu - x^\nu\partial_\mu + m^{\mu\nu}(u)\partial_u, \tag{51}$$

де $m^{\mu\nu}(u)$ задаються формулами (35), (43).

Отже, ми отримали алгебру Пуанкаре з базовими генераторами вигляду

$$AP(1,2) = \langle \partial_\mu, \quad J_{\mu\nu} = x^\mu\partial_\nu - x^\nu\partial_\mu + m^{\mu\nu}(u)\partial_u.\rangle \tag{52}$$

5. Зображення розширеної алгебри Пуанкаре $AP_1(1,2)$ та конформної алгебри $AC(1,2)$. Розширимо алгебру Пуанкаре (52) оператором масштабних перетворень D, який будемо шукати в довільному вигляді

$$D = \xi^\gamma(x,u)\partial_\gamma + \eta(x,u)\partial_u, \tag{53}$$

де $\xi^\gamma = \xi^\gamma(x,u)$, $\eta = \eta(x,u)$ — шукані функції. Для того, щоб оператори ∂_μ, $J_{\mu\nu}$, D утворювали розширену алгебру Пуанкаре $AP_1(1,2)$, необхідно виконання умов комутування (15) — (16). З умов (15) одержимо

$$\xi^\gamma_\alpha\partial_\gamma + \eta_\alpha\partial_u = \partial_\alpha, \tag{54}$$

звідки

$$\xi^\gamma_\alpha = \delta_{\alpha\gamma}, \quad \eta_\alpha = 0. \tag{55}$$

Загальним розв'язком системи (55) є функції

$$\xi^\gamma = x_\gamma + b^\gamma(u), \quad \eta = \eta(u), \tag{56}$$

де $b^\gamma(u)$, $\eta(u)$ — довільні гладкі функції аргумента u. Отже,

$$D = x_\gamma\partial_\gamma + b^\gamma(u)\partial_\gamma + \eta(u)\partial_u. \tag{57}$$

Залишається задовольнити умови (16):

$$[J_{\alpha\beta}, D] = [x^\alpha\partial_\beta - x^\beta\partial_\alpha + m^{\alpha\beta}(u)\partial_u, x_\gamma\partial\gamma + b^\gamma(u)\partial_\gamma + \eta(u)\partial_u] =$$

$$= m^{\alpha\beta}(\dot{b}^\gamma\partial_\gamma + \dot{\eta}\partial_u) - b_\alpha\partial_\beta + b_\beta\partial\alpha - \eta\dot{m}^{\alpha\beta}\partial_u = 0.$$

Тоді

$$m^{\alpha\beta}\dot{b}^\gamma = (g^{\alpha\sigma}\delta_{\beta\gamma} - g^{\beta\sigma}\delta_{\alpha\gamma})b^\sigma, \tag{58}$$

$$m^{\alpha\beta}\dot{\eta} = \eta\dot{m}^{\alpha\beta}. \tag{59}$$

Враховуючи вигляд функцій $m^{\alpha\beta}$, які задані формулами (43), одержуємо, що рівняння (58) — (59) можливі лише при $b^\gamma = \eta = 0$. З формули (57) випливає, що

$$D = x_\gamma\partial_\gamma. \tag{60}$$

Отже, ми показали, що з точністю до перетворень еквівалентності (22) у випадку $m^{\mu\nu} \neq 0$ можлива лише наступна реалізація розширеної алгебри Пуанкаре

$$AP_1(1,2) = \langle\partial_\mu, \quad J_{\mu\nu} = x^\mu\partial_\nu - x^\nu\partial_\mu + m^{\mu\nu}(u)\partial_u, \quad D = x_\gamma\partial_\gamma\rangle. \tag{61}$$

Доповнимо тепер алгебру (61) операторами конформних перетворень

$$K_\mu = \xi^{\mu\gamma}(x,u)\partial_\gamma + \eta^\mu(x,u)\partial_u. \tag{62}$$

Для того, щоб оператори (61) — (62) утворювали конформну алгебру $AC(1,2)$, необхідно виконання умов (18) — (20), які і уточнюють шукані функції $\xi^{\mu\gamma}(x,u)$, $\eta^\mu(x,u)$.

З умов (18) одержуємо

$$\begin{aligned} &\xi^{\mu\gamma}_\alpha = 2g^{\alpha\mu}x_\gamma + 2\delta_{\alpha\gamma}x^\mu - 2\delta_{\mu\gamma}x^\alpha, \\ &\eta^\mu_\alpha = 2m^{\mu\alpha}(u). \end{aligned} \tag{63}$$

Загальним розв'язком системи рівнянь (63) є функції

$$\begin{aligned} &\xi^{\mu\gamma} = 2x^\mu x_\gamma - \delta_{\mu\gamma}x_\nu x^\nu + a^{\mu\gamma}(u), \\ &\eta^\mu = 2m^{\mu\alpha}(u)x_\alpha + b^\mu(u), \end{aligned} \tag{64}$$

де $a^{\mu\gamma}(u)$, $b^\mu(u)$ — довільні гладкі функції, $m^{\mu\nu}(u)$ задаються формулами (35), (43).

Використавши комутаційні співвідношення (20), одержуємо, що $a^{\mu\beta} = b^\mu = 0$. Тому

$$K_\mu = 2x^\mu D - x^2\partial_\mu + 2x_\nu m^{\mu\nu}(u)\partial_u. \tag{65}$$

Комутаційні співвідношення (19) для операторів (65) виконуються тотожньо.

Таким чином ми одержали наступну реалізацію конформної алгебри:

$$\begin{aligned} AC(1,2) = \langle\partial_\mu, \quad J_{\mu\nu} = x^\mu\partial_\nu - x^\nu\partial_\mu + m^{\mu\nu}(u)\partial_u, \quad D = x_\gamma\partial_\gamma, \\ K_\mu = 2x^\mu D - x^2\partial_\mu + 2x_\nu m^{\mu\nu}\partial_u\rangle, \end{aligned} \tag{66}$$

де $m^{\mu\nu} = m^{\mu\nu}(u)$ задаються формулами (35), (43).

6. Інваріантність рівняння відносно алгебри Пуанкаре та її розширень. Розглянемо задачу при яких нелінійностях $F^{\mu\nu}$ і G рівняння (1) інваріантне відносно алгебри Пуанкаре та її розширень операторами масштабних та конформних перетворень. Результати класифікації сформулюємо у вигляді наступної теореми.

Теорема 1. *Рівняння (1) з точністю до перетворень еквівалентності (22) інваріантне відносно*

алгебри Пуанкаре $AP(1,2)$ базисні генератори якої мають вигляд (52) тоді і тільки тоді, коли функції $F^{\mu\nu}$ і G є розв'язками наступної системи рівнянь

$$\begin{gathered}(u_\alpha \dot{m}^{\mu\nu} + u_\mu g^{\mu\alpha}) F^{s\gamma}_{u_\alpha} + m^{\mu\nu} F^{s\gamma}_u + (\delta_{\mu\gamma} g^{t\nu} - \delta_{\nu\gamma} g^{t\mu}) F^{st} + \\ +(\delta_{\mu s} g^{t\nu} - \delta_{\nu s} g^{t\mu}) F^{\gamma t} = 2(\delta_{\mu 0} g^{t\nu} - \delta_{\nu 0} g^{t\mu}) F^{0t} F^{s\gamma},\end{gathered} \tag{67}$$

$$\begin{gathered}m^{\gamma\beta} G_u + (\dot{m}^{\gamma\beta} u_\alpha + g^\alpha u_\gamma - g^{\alpha\gamma} u_\beta) G_{u_\alpha} + (2(\delta_{\beta 0} g^{\alpha\gamma} - \delta_{\gamma 0} g^{\alpha\beta}) F^{\alpha 0} - \dot{m}^{\gamma\beta}) G + \\ +\ddot{m}^{\gamma\beta} u_\mu u_\nu F^{\mu\nu} = 0;\end{gathered} \tag{68}$$

розширеної алгебри Пуанкаре $AP_1(1,2)$ (61) тоді і тільки тоді, коли функції $F^{\mu\nu}$ і G є розв'язками рівнянь (67), (68) і

$$u_\alpha F^{s\gamma}_{u_\alpha} = 0, \tag{69}$$

$$u_\alpha G_{u_\alpha} = 2G; \tag{70}$$

конформної алгебри $AC(1,2)$ (66) тоді і тільки тоді, коли функції $F^{\mu\nu}$ і G є розв'язками рівнянь (67) — (70) і

$$m^{\mu\nu} F^{s\gamma}_{u_\nu} = 0, \tag{71}$$

$$m^{\alpha\beta} G_{u_\beta} = (2 g^{\mu\alpha} u_\nu - g^{\mu\nu} u_\alpha - 2\dot{m}^{\alpha\nu} u_\mu) F^{\mu\nu}. \tag{72}$$

Доведення теореми проводиться стандартним методом С.Лі.

Поставимо задачу визначити при яких нелінійностях $F^{\mu\nu}$ і G рівняння (1) інваріантне відносно алгебри Пуанкаре $AP(1,2)$.

Інфінітезімальний оператор алгебри (52) можна записати наступним чином

$$X = \frac{1}{2} c_{\mu\nu} J_{\mu\nu} + d_\mu \partial_\mu = \frac{1}{2} c_{\mu\nu} (x^\mu \partial_\nu - x^\nu \partial_\mu + m^{\mu\nu}(u) \partial_u) + d_\mu \partial_\mu, \tag{73}$$

де $c_{\mu\nu}$, d_μ — довільні сталі, $c_{\nu\mu} = -c_{\mu\nu}$. Використовуючи результат теореми 1 про інваріантність рівняння (1) відносно алгебри Пуанкаре з рівнянь (67), (68) при фіксованих значеннях індексів μ, ν, s, γ одержимо наступні системи рівнянь для визначення невідомих функцій $F^{\mu\nu}$, G:

$$\begin{aligned}&L_{01} F^{01} = -2F^{01} F^{01} + 1 + F^{11}, \\ &L_{01} F^{02} = -2F^{01} F^{02} + F^{12}, \\ &L_{01} F^{11} = -2F^{01} F^{11} + 2F^{01}, \\ &L_{01} F^{12} = -2F^{01} F^{12} + F^{02}, \\ &L_{01} F^{22} = -2F^{01} F^{22}, \\ &L_{01} G = -2F^{01} G + \dot{m}^{01} G - \ddot{m}^{01} u_\mu u_\nu F^{\mu\nu},\end{aligned} \tag{74}$$

де

$$L_{01} = m^{01}\partial_u + \dot{m}^{01}u_\alpha\partial_{u_\alpha} - u_1\partial_{u_0} - u_0\partial_{u_1}; \tag{75}$$

$$\begin{aligned}
&L_{02}F^{01} = -2F^{02}F^{01} + F^{12},\\
&L_{02}F^{02} = -2F^{02}F^{02} + 1 + F^{22},\\
&L_{02}F^{11} = -2F^{02}F^{11},\\
&L_{02}F^{12} = -2F^{02}F^{12} + F^{01},\\
&L_{02}F^{22} = -2F^{02}F^{22} + 2F^{02},\\
&L_{02}G = -2F^{02}G,
\end{aligned} \tag{76}$$

де

$$L_{02} = \partial_u - u_2\partial_{u_0} - u_0\partial_{u_2}; \tag{77}$$

$$\begin{aligned}
&L_{12}F^{01} = F^{02},\\
&L_{12}F^{02} = -F^{01},\\
&L_{12}F^{11} = 2F^{12},\\
&L_{12}F^{12} = F^{22} - F^{11},\\
&L_{12}F^{22} = -2F^{12},\\
&L_{12}G = \dot{m}^{12}G - \ddot{m}^{12}u_\mu u_\nu F^{\mu\nu},
\end{aligned} \tag{78}$$

де

$$L_{12} = m^{12}\partial_u + \dot{m}^{12}u_\alpha\partial_{u_\alpha} + u_2\partial_{u_1} - u_1\partial_{u_2}. \tag{79}$$

Розв'язавши систему рівнянь (78), знаходимо

$$\begin{aligned}
&F^{01} = \frac{\sinh u\varphi^1 - \varphi^2}{\cosh u},\\
&F^{02} = \frac{\varphi^1 + \sinh u\varphi^2}{\cosh u},\\
&F^{11} = \frac{\varphi^3\sinh^2 u + 2\varphi^4\sinh u + \varphi^5}{\cosh^2 u},\\
&F^{22} = \frac{\varphi^5\sinh^2 u - 2\varphi^4\sinh u + \varphi^3}{\cosh^2 u},\\
&F^{12} = \frac{-\varphi^4\sinh^2 u + (\varphi^3 - \varphi^5)\sinh u + \varphi^4}{\cosh^2 u},\\
&G = \cosh u\varphi^6 - \sinh u\cosh uB,
\end{aligned} \tag{80}$$

де $\varphi^k = \varphi^k(\omega_1,\omega_2,\omega_3)$ — довільні гладкі функції інваріантних змінних

$$\omega_1 = \frac{u_0}{\cosh u}, \quad \omega_2 = \frac{u_0^2 - u_1^2 - u_2^2}{\cosh^2 u}, \quad \omega_3 = \frac{u_2\sinh u - u_1}{\cosh^2 u}, \tag{81}$$

$$B = 2\sqrt{\omega_1^2 - \omega_3^2 - \omega_2}(\omega_1\varphi^1 - \omega_3\varphi^4) + 2\omega_1\omega_3\varphi^2 + (\omega_1^2 - \omega_3^2 - \omega_2)\varphi^3 + \omega_3^2\varphi^5 + \omega_1^2. \tag{82}$$

Підставимо тепер знайдені функції (80) в систему рівнянь (76). У результаті одержимо

$$\begin{aligned}
&L\varphi^1 = 2\varphi^1\varphi^2 + \varphi^4,\\
&L\varphi^2 = 2\varphi^2\varphi^2 - \varphi^5 - 1,\\
&L\varphi^3 = 2\varphi^2\varphi^3,\\
&L\varphi^4 = 2\varphi^2\varphi^4 + \varphi^1,\\
&L\varphi^5 = 2\varphi^2\varphi^5 - 2\varphi^2;\\
&L\varphi^6 = (2\varphi^1 + 1)\varphi^6 + 2\varphi^2 B + MB;
\end{aligned} \tag{83}$$

$$\begin{aligned}
&M\varphi^1 = 2\varphi^1\varphi^1 + \varphi^2 - \varphi^3 - 1,\\
&M\varphi^2 = 2\varphi^1\varphi^2 - \varphi^1 + \varphi^4,\\
&M\varphi^3 = 2\varphi^1\varphi^3 - 2\varphi^1 - 2\varphi^4,\\
&M\varphi^4 = 2\varphi^1\varphi^4 + \varphi^2 + \varphi^3 - \varphi^5,\\
&M\varphi^5 = 2\varphi^1\varphi^5 + 2\varphi^4,\\
&M\varphi^6 = -2\varphi^2\varphi^6 - B;
\end{aligned} \tag{84}$$

$$LB = 2(\varphi^1 + 1)B, \tag{85}$$

де

$$\begin{aligned}
&L = (\omega_1 + \omega_3)(\partial_{\omega_1} + \partial_{\omega_3}) + 2\omega_2\partial_{\omega_2},\\
&M = \sqrt{A}(\partial_{\omega_1} - \partial_{\omega_3}), A = \omega_1^2 - \omega_3^2 - \omega_2.
\end{aligned} \tag{86}$$

Якщо зробити заміну

$$w_1 = \omega_1 - \omega_3, \quad w_2 = \frac{\omega_2}{\omega_1 + \omega_3}, \quad w_3 = \frac{1}{2}ln(\omega_1 + \omega_3) \tag{87}$$

або

$$\omega_1 = \frac{1}{2}(e^{2w_3} + w_1), \quad \omega_2 = w_2e^{2w_3}, \quad \omega_3 = \frac{1}{2}(e^{2w_3} - w_1), \tag{88}$$

то формули (83) — (86) в нових змінних w_1, w_2, w_3 запишуться наступним чином

$$\begin{aligned}
&\varphi^1_{w_3} = 2\varphi^1\varphi^2 + \varphi^4, \quad \varphi^2_{w_3} = 2\varphi^2\varphi^2 - \varphi^5 - 1, \quad \varphi^3_{w_3} = 2\varphi^2\varphi^3,\\
&\varphi^4_{w_3} = 2\varphi^2\varphi^4 + \varphi^1, \quad \varphi^5_{w_3} = 2\varphi^2\varphi^5 - 2\varphi^2;
\end{aligned} \tag{89}$$

$$\begin{aligned}
&2\sqrt{A}\varphi^1_{w_1} = 2\varphi^1\varphi^1 + \varphi^2 - \varphi^3 - 1, \quad 2\sqrt{A}\varphi^2_{w_1} = 2\varphi^1\varphi^2 - \varphi^1 + \varphi^4,\\
&2\sqrt{A}\varphi^3_{w_1} = 2\varphi^1\varphi^3 - 2\varphi^1 - 2\varphi^4,\\
&2\sqrt{A}\varphi^4_{w_1} = 2\varphi^1\varphi^4 + \varphi^2 + \varphi^3 - \varphi^5, \quad 2\sqrt{A}\varphi^5_{w_1} = 2\varphi^1\varphi^5 + 2\varphi^4,
\end{aligned} \tag{90}$$

де $A = (w_1 - w_2)e^{2w_3}$.

Одним з розв'язків системи (89) — (90) є функції

$$\varphi^1 = \varphi^2 = \varphi^4 = 0, \quad \varphi^3 = \varphi^5 = -1. \tag{91}$$

У цьому випадку з формул (80) знаходимо

$$F^{\mu\nu} = g^{\mu\nu}, \tag{92}$$

$$G = \cosh u\varphi^6 - \sinh u \cosh u(\omega_1 + \omega_2). \tag{93}$$

Якщо (93) підставити в останнє рівняння системи рівнянь (76) та перейти до змінних (87), то одержимо

$$2\sqrt{w_1 - w_2}\varphi^6_{w_1} = -w_2e^{w_3}, \quad \varphi^6_{w_3} = \varphi^6. \tag{94}$$

Загальним розв'язком системи (94) є функція

$$\varphi^6 = (-w_2\sqrt{w_1 - w_2} + \Phi)e^{w_3}, \tag{95}$$

де $\Phi = \Phi(w_2)$ — довільна гладка функція. Тоді, повернувшись до змінних ω_1, ω_2, ω_3 із формул (87), (88), (93), (95), знаходимо

$$G = \cosh u(\sqrt{\omega_1 + \omega_3}\Phi(\omega) - \frac{\omega_2}{\omega_1 + \omega_3}\sqrt{\omega_1^2 - \omega_3^2 - \omega_2}) - \omega_2 \sinh u \cosh u, \tag{96}$$

де

$$\omega = \frac{\omega_2}{\omega_1 + \omega_3}. \tag{97}$$

Якщо у формули (96), (97) підставити ω_a із (81) то приходимо до остаточного вигляду функції G:

$$G = \sqrt{\alpha u}\Phi(\omega) - \frac{\dot{\alpha} u}{\alpha u} u^2, \tag{98}$$

де

$$\omega = w_2 = \frac{u^2}{\alpha u}, \tag{99}$$

$$\begin{aligned} &u^2 = u_\mu u^\mu, \\ &\alpha u \equiv \alpha_\mu u^\mu = \cosh u \cdot u_0 - u_1 + \sinh u \cdot u_2, \\ &\dot{\alpha} u \equiv \dot{\alpha}_\mu u^\mu = \sinh u \cdot u_0 + \cosh u \cdot u_2. \end{aligned} \tag{100}$$

Зауваження. Система рівнянь (74) на розв'язках систем (76),(78) є тотожністю. Це випливає, наприклад, із того що

$$J_{01} = [J_{02}, J_{12}] = J_{01} J_{12} - J_{12} J_{02}. \tag{101}$$

У випадку (91) ми одержали, що рівняння (1) інваріантне відносно алгебри Пуанкаре (52), якщо воно має вигляд

$$\Box u + \sqrt{\alpha u}\Phi(\omega) - \frac{\dot{\alpha} u}{\alpha u} u^2 = 0, \tag{102}$$

де αu і ω задані формулами (99), (100). Дослідимо тепер якою повинна бути функція $\Phi(\omega)$, щоб рівняння (102) було інваріантне відносно розширеної алгебри Пуанкаре $AP_1(1,2)$, базисні генератори якої задані формулами (61).

Теорема 2. *Рівняння (102) інваріантне відносно розширеної алгебри Пуанкаре (61) тоді і тільки тоді, коли має вигляд*

$$\Box u = (\lambda\sqrt{u^2} + \dot{\alpha} u)\frac{u^2}{\alpha u}, \tag{103}$$

де λ — довільна стала.

Доведення. Використавши результат теореми 1 про інваріантність рівняння (1) відносно розширеної алгебри Пуанкаре, після підстановки функцій (92) і (93) в рівняння (69), (70) одержимо наступне рівняння для визначення функції $\Phi(\omega)$:

$$\omega\Phi_\omega = \frac{3}{2}\Phi, \tag{104}$$

загальний розв'язок якого має вигляд:

$$\Phi = -\lambda\omega^{\frac{3}{2}}, \tag{105}$$

де λ — довільна стала. Підставляючи формули (99), (105) в рівняння (102) одержуємо рівняння (103).

Теорема доведена.

Теорема 3. *Рівняння (1) інваріантне відносно конформної алгебри $AC(1,2)$ з базисними генераторами (66) тоді і тільки тоді, коли воно має вигляд (103).*

Доведення. Із рівнянь (67), (69), (71) теореми 1 випливає, що $F = F(u)$. Тоді із (80) одержимо, що $\varphi^i = \lambda_i$, де λ_i — довільні сталі, $i = \overline{1,5}$. Підставивши $\varphi^i = \lambda_i$ у рівняння (83), (84), маємо два набори фунуцій $\varphi^i = \lambda_i$:

$$\varphi^1 = 0, \quad \varphi^2 = 0, \quad \varphi^3 = -1, \quad \varphi^4 = 0, \quad \varphi^5 = -1 \tag{106}$$

або

$$\varphi^1 = 0, \quad \varphi^2 = 1, \quad \varphi^3 = 0, \quad \varphi^4 = 0, \quad \varphi^5 = 1, \tag{107}$$

причому із (82) випливає, що у випадку (106) $B = \omega_2$, у випадку (107) $B = (\omega_1 + \omega_3)^2$. Рівняння (85) задовольняє тільки функція $B = \omega_2$. Отже, рівняння (1) інваріантне відносно алгебри Пуанкаре, якщо воно має вигляд (102).

За теоремою 2 рівняння (102) інваріантне відносно розширеної алгебри Пуанкаре, тоді і тільки тоді якщо воно має вигляд (103) .

Не важко переконатися, що координати інфінітезимальних операторів, що відповідають конформній алгебрі $AC(1,2)$ (66) та функції $F^{\mu\nu}$, G в даному випадку тотожньо задовольняють систему рівнянь (71), (72).

Отже, рівняння (1) інваріантне відносно конформної алгебри $AC(1,2)$ з базисними генераторами (66) тоді і тільки тоді, коли воно має вигляд (103).

Теорему доведено.

Отже, в даній роботі з точністю до перетворень еквівалентності (22) описано всі можливі зображення алгебри Пуанкаре, розширеної алгебри Пуанкаре та конформної алгебри, відносно яких можуть бути інваріантні квазілінійні диференціальні рівняння з частиними похідними другого порядку вигляду (1) у випадку трьох незалежних змінних. Одержані результати класифікації застосовано для дослідження інваріантності даного рівняння відносно цих алгебр. Показано, що рівняння (1) інваріантне відносно конформної алгебри $AC(1,2)$ з базисними генераторами (66) тоді і тільки тоді, коли воно має вигляд (103).

Список використаної літератури

1. *Барбашов Б. М., Нестеренко В. В.* Модель релятивистской струны в физике адронов. – М. : Энергоатомиздат, 1987. — 176 с.
2. *Барбашов Б. М., Черников Н. А.* Решение и квантование нелинейной двумерной модели типа Борна-Инфельда // Журн. эксперим. и теорет. физики. – 1966. – Т. 60, № 5. – С. 1296–1308.
3. *Блажко Л. М.* Інваріантність квазілінійного рівняння другого порядку відносно конформної алгебри // Праці Ін-ту математики НАН України. – 2001. – Т. 36. – С. 40–44.
4. *Блажко Л. М.* Симетрійні властивості і точні розв'язки нелінійних рівнянь гіперболічного типу: дис. ... канд. фіз.-мат. наук : 01.01.03 / – К., 2008. – 138 с.
5. *Ибрагимов Н. Х.* Группы преобразований в математической физике / Н. Х. Ибрагимов. — М. : Наука, 1983. — 280 с.
6. *Лагно В. І., Спічак С. В., Стогній В. І.* Симетрійний аналіз рівнянь еволюційного типу // Праці Інституту математики НАН України : Мат-ка та її застосування. – 2002. – Т. 45. – 359 с.
7. *Овсянников Л. В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. — М. : Наука, 1978. — 400 с. — English translation: Ovsiannikov L.V. Group analysis of differential equations. — New York : Academic Press, 1982. — 400 p.
8. *Сєров М.І., Блажко Л. М.* Конформна інваріантність квазілінійних диференціальних рівняняь з частинними похідними другого порядку // Науковий вісник Ужгородського університету. Сер. матем. і інформ. – Ужгород: Видавництво УжНУ "Говерла", 2012. -– Вип. 23, № 1. — С. 26.
9. *Уизем Д.* Линейные и нелинейные волны. — М. : Мир, 1977. — 622 с.

10. *Фущич В. И., Никитин А. Г.* Симметрия уравнений квантовой механики. – М.: Наука. – 1990. – 400 с.
11. *Фущич В. И., Никитин А. Г.* Симметрия уравнений Максвелла. – Киев: Наукова думка. – 1983. – 199 с.
12. *Akhatov I. S., Gazizov R. K., Ibragimov N. H.* Nonlocal symmetries. Heuristic approach // J. Sov. Math. – 55 (1991) – P. 1401–1450.
13. *Fushchych W., Shtelen W., Serov N.* Symmetry Analysis and Exact Solutions of Equations of Nonlinear Mathematical Physics. — Dordrecht : Kluwer Academic Publishers. — 1993. — 436 p.
14. *Lie S.* "Uber Integration durch bestimmente Integrale von einer Klasse lineare partiellen Differentialgleichungen 6. – Leipzig: 1881. – P. 328–368.
15. *Olver P.* Applications of Lie groups to differential equations. — Berlin: Springer, 1986.
16. *Fushchych W. I.* Симетрія рівнянь лінійної та нелінійної квантової механіки. Scientific Works, 2004. – V. 6 – P. 105–119.
17. *Fushchych W. I., Egorchenko I. A.* Differential invariants of the Poincare group. – Dokl. AN Ukr. SSR, 1989. – No. 5, Ser. A – P. 46–53.
18. *Rideau G. and Winternitz P.* Nonlinear equations invariant under Poincare, similitude and conformal groups in two-dimensional space-time, J. Math. Phys., 1990. – V.31 – P. 1095-–1105.

Одержано 20.04.2016