УДК 519.21

М. С. Герич (Ужгородський нац. ун-т)
Д. В. Гусак (доктор фіз.-мат. наук, професор)

ПРО СТРИБКИ ЧЕРЕЗ НЕСКІНЧЕНО ВІДДАЛЕНИЙ РІВЕНЬ ДЛЯ ОДНОГО КЛАСУ ГРАТЧАСТИХ ПРОЦЕСІВ

Unexplored in [3]- [4] questions on overshoot functionals througn the level $x \to \infty$ for oscillating lattice random walks and processes are investigated for lower semi continuous integervalued Poisson process $\xi(t)$ with $E\xi(1) = 0$.

Невивчені в [3]- [4] питання про функціонали перетину рівня $x \to \infty$ для осцилюючих гратчастих випадкових блукань та процесів досліджуються в даній статті для майже напівнеперервних знизу цілозначних пуассонівських процесів $\xi(t)$ з $E\xi(1) = 0$.

Розподіл стрибкових функціоналів дійснозначних процесів Леві вивчався багатьма авторами зокрема в монографіях [1]- [4] та в статті [5], де наводиться список робіт з дослідження різних граничних функціоналів. В цих роботах інколи замість стрибкових функціоналів розглядаються значення процесів до виходу і після виходу за рівень. В [3] основна увага приділялася розподілу перестрибкових функціоналів через фіксований рівень, коли середнє значення процесу від'ємне, поскільки в цьому випадку вказані розподіли мають теоретико-ризикову інтерпритацію для майже напівнеперервних знизу дійснозначних процесів (див. [3], [4]). Тому в [3] в р.7 для цілозначних процесів не розглядалися розподіли перестрибкових функціоналів через рівень $x \to \infty$ коли $m = E\xi(1) = 0$. В [4] зовсім не включено розділ цілозначних процесів.

Щоб усунути цю прогалину, ми детальніше розглянемо розподіли перестрибкових функціоналів через рівень $x = 0$ та $x \to \infty$ для майже напівнеперервних знизу цілозначних процесів $\xi(t)$ $(\xi(0) = 0)$ з $m = 0$.

Нехай $\xi(t)\,(\xi(0) = 0)$ — майже напівнеперервний знизу цілозначний процес Пуасона з кумулянтою

$$\mathbf{k}(z) = \ln Ez^{\xi(1)} = \lambda_1(p_1(z) - 1) + \lambda_2 \frac{1-z}{z-b}\,(0 < b < 1,\ \lambda_1, \lambda_2 > 0),\ |m| < \infty. \quad (1)$$

Якщо $b = 0$, тоді $\xi(t)$ — напівнеперервний знизу процес. Введемо позначення граничних функціоналів процесу
$\tau^+(x) = \inf\{t > 0 : \xi(t) > x\}$ – момент 1-го досягнення рівня $x \geq 0$,
$\gamma_1(x) = \gamma^+(x) = \xi(\tau^+(x)) - x$ – перший перестрибок через x,
$\gamma_2(x) = \gamma_+(x) = x - \xi(\tau^+(x) - 0)$ – перший недострибок $\xi(t)$,
$\gamma_3(x) = \gamma_x^+ = \gamma_1(x) + \gamma_2(x)$ – перший стрибок, що накриває рівень x,
$\xi^\pm(t) = \sup\limits_{0\leq u\leq t} (inf)\, \xi(u),\ \xi^\pm = \sup\limits_{0\leq t<\infty} (inf)\, \xi(t)$ – екстремуми процесу $\xi(t)$.

Позначимо через θ_s випадкову величину з показниковим розподілом: $P\{\theta_s > t\} = e^{-st},\ s > 0,\ t \geq 0$ і відповідно генератриси цих функціоналів

$$g(s,z) = Ez^{\xi(\theta_s)}\,(|z| = 1),\ g_\pm(s,z) = Ez^{\xi^\pm(\theta_s)}\,(|z|^{\pm 1} \leq 1);$$

$$V(s,x,u_1,u_2,u_3) = E[e^{-s\tau^+(x)} u_1^{\gamma_1(x)} u_2^{\gamma_2(x)} u_3^{\gamma_3(x)},\ \tau^+(x) < \infty];$$

$$V_k(s,x,u_k)=E[e^{-s\tau^+(x)}u_k^{\gamma_k(x)},\ \ \tau^+(x)<\infty],\ k=\overline{1,3}.$$

В позначеннях $V(...)$ та $V_k(...)$ у випадку $m\geq 0$ $P\{\tau^+(x)<\infty\}=1$.

Спільна генератриса всіх перестрибкових функціоналів визначається, при довільному знаку m, згідно з теоремою 7.7. в [3] таким чином

$$sV(s,x,u_1,u_2,u_3)=\sum_{y=0}^{x}G(s,x-y,u_1,u_2,u_3)p_y^+(s),x\geq 0, \tag{2}$$

$$p^{\pm}_{\pm y}(s)=P\{\xi^{\pm}(\theta_s)=\pm y\},y\geq 0;$$

$$G(s,x,u_1,u_2,u_3)=\sum_{y\geq 0}A_{x+y}(u_1,u_2,u_3)p^-_{-y}(s),\ \ x\geq 0;$$

$$A_x(u_1,u_2,u_3)=\lambda_1\sum_{k\geq x+1}p_ku_1^{k-x}u_2^xu_3^k,\ x\geq 0.$$

Ми обмежимось розглядом генератрис маргінальних розподілів

$$sV_k(s,x,u_k)=\sum_{y=0}^{x}G_k(s,x-y,u_k)p_y^+(s),x\geq 0,\ \ k=\overline{1,3}; \tag{3}$$

$$G_k(s,x,u_k)=\sum_{y\geq 0}A^{(k)}_{x+y}(u_k)p^-_{-y}(s),\ \ x\geq 0.$$

Для функцій $A_x^{(k)}(u_k)$, що визначають праві частини рівнянь для розподілу відповідних функціоналів використовуються їх твірні перетворення

$$a_k(\beta,u_k)=\sum_{x\geq 0}\beta^xA_x^{(k)}(u_k)$$

які остаточно виражаються через генератрису $\widetilde{p}_1(u)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}u^kp_k$ та $\widetilde{\Pi}(u)=\sum\limits_{x\geq 0}^{\infty}u^x\Pi(x)$.

$$A_x^{(1)}(u_1)=\lambda_1\sum_{k\geq x+1}u_1^{k-x}p_k,\ A_0^{(1)}(u_1)=\lambda_1\widetilde{p}_1(u_1),\ A_0^{(1)}(1)=\lambda_1,\ A_x^{(1)}(1)=\Pi(x);$$

$$a_1(\beta,u_1)=\lambda_1\sum_{k\geq 1}u_1^kp_k\sum_{y=0}^{k-1}(\frac{\beta}{u})^y=\frac{\lambda_1u_1}{u_1-\beta}(\widetilde{p}_1(u_1)-\widetilde{p}_1(\beta));$$

$$A_x^{(2)}(u_2)=\lambda_1\sum_{k\geq x+1}u_2^xp_k=u_2^x\Pi(x),\ A_0^{(2)}(u_2)=\Pi(0)=\lambda_1,\ A_x^{(2)}(1)=\Pi(x);$$

$$a_2(\beta,u_2)=\lambda_1\sum_{k\geq 0}(\beta u_2)^x\Pi(x)=\widetilde{\Pi}(\beta u_2);$$

$$A_x^{(3)}(u_3)=\lambda_1\sum_{k\geq x+1}u_3^kp_k,\ A_0^{(3)}(u_3)=\lambda_1\widetilde{p}_1(u_3),\ A_x^{(3)}(1)=\Pi(x);$$

$$a_3(\beta,u_3)=\lambda_1(1-\beta)^{-1}(\widetilde{p}_1(u_3)-\widetilde{p}_1(\beta u_3)),\ a_3(1,u_3)=\lambda_1u_3\widetilde{p}'_1(u_3).$$

Згідно з (3) твірні перетворення

$$v_k(s,\beta,u_k)=\sum_{x\geq 0}\beta^x V_k(s,x,u_k)=s^{-1}g_+(s,\beta)p_-(s)g_k(s,\beta,u_k)$$

виражаються добутком генератрис $g_k(s,\beta,u_k)$ та $g_+(s,\beta)$, при цьому $g_k(s,\beta,u_k)$ обчислюються за допомогою $a_k(\beta,u_k)$.

Для дослідження розподілу перестрибків через рівень $x=0$ та $x\to\infty$ використаємо лему, що випливає з результатів р.7 в [3], про асимптотичну поведінку коренів кумулянтного рівняння Лундберга при $s\to 0$

$$k(z)=s,\ s\geq 0.\quad (\mathfrak{L}_s)$$

Лема 1. *Для $\xi(t)$ з кумулянтою (1) з $|m|<\infty$ рівняння $(\mathfrak{L}_s)$ при $s\to 0$ має 2 дійсні корені $0<z_1(s)<1<z_2(s)$. Лівий корінь $z_1(s)$ визначає генератрису $\xi^-(\theta_s)$*

$$g_-(s,z)=\frac{p_-(s)(z-b)}{z-z_1(s)},\ p_-(s)=P\{\xi^-(\theta_s)=0\}=\frac{1-z_1(s)}{1-b}.$$

а)Якщо $m=0$, тоді при $s\to 0$ добуток доповнень коренів $\overline{z}_1(s)=1-z_1(s),\ \overline{z}_2(s)=z_2(s)-1$

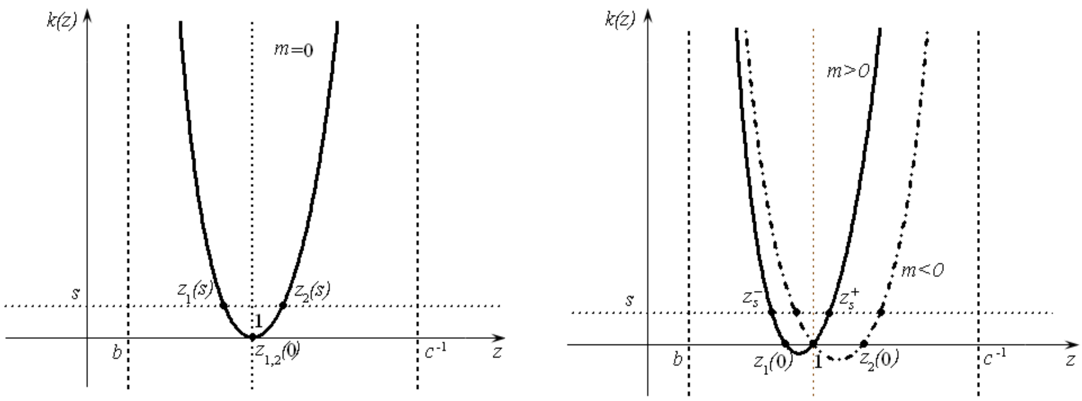
$$\overline{z}_1(s)\overline{z}_2(s)=O(s),\ p_-(s)p_+(s)\approx k_1 s,\ k_1=(\lambda_1 b+\lambda_2)^{-1}. \tag{4}$$

б)Якщо $m>0$, тоді $z_2(0)=1$, а $z_1(0)<1$ визначає генератрису ξ^-

$$E\,z^{\xi^-}=\frac{p_-(z-b)}{z-z_1(0)},\ z_1(0)=q_-+bp_-,\ (p_-=P\{\xi^-=0\}). \tag{5}$$

в) Якщо $m<0$, тоді $z_2(0)>1$, а $z_1(0)=1$, при цьому (див. (7.91) в [3])

$$z_1(s)\approx 1+\frac{s}{|m|},\ p_-(s)\approx\frac{s}{|m|(1-b)},\ s\to 0. \tag{6}$$



Схематично графіки кумулянти для $y\leq s$, при достатньо малих $s>0$, мають форму параболи (з несиметричними вертикально направленими вверх гілками, які при зростанні $k(z)$ наближаються до асимптот $z=b$ та $z=c^{-1}$) і розташовані в правій півплощині в обмеженій смузі прямої $z = 1$. При $m = 0$ вершина графіка знаходиться на осі абсцис в точці $z = 1$. При $\pm m > 0$ графіки опущені вниз і зміщені вліво(вправо) так, щоб права (ліва) гілка його проходила через точку $(1; 0)$.

Отже, при $m = 0$ рівняння $(\mathfrak{L}_0)$ має двократний корінь $z_{1,2}(0) = 1$ (див.(4)). При $m > 0$ рівняння $(\mathfrak{L}_0)$ має корінь $z_2(0) = 1$, а $z_1(0) < 1$ (визначає p_- в (5)). При $m < 0$ рівняння $(\mathfrak{L}_0)$ має корінь $z_2(0) > 1$, і $z_1(0) = 1$, а $1 - z_1(s) \approx O(s)$ визначає асимптотику $p_-(s)$ в (6). Якщо $\xi(t)$ з кумулянтою (1)– майже напівнеперервний зверху процес ($c \in (0, 1)$), то $1 < z_2(s) < c^{-1}$. Наступна лема випливає з наслідку 2.1. в [6]

Лема 2. *Для $\xi(t)$ з кумулянтою (1) і $m = 0$*

$$\lim_{\substack{s\to 0\\ \beta\to 1}} m_0(s, \beta) = \lim_{\substack{s\to 0\\ \beta\to 1}} \frac{1-\beta}{s} p_-(s) g_+(s, \beta) = \frac{1}{\sigma_1^2(1-b)} = \frac{1}{\lambda_1(b\mu_1 + (1-b)\mu_2)}. \tag{7}$$

Зауважимо, що при $m = 0$ моменти додатних стрибків $\mu_1 = \widetilde{p}'_1(1)$, $\mu_2 = \widetilde{p}''_1(1)$ пов'язані з моментами геометричного розподілу:

$$\lambda_1\mu_1 = \lambda_2(1-b)^{-1},\ \sigma_1^2 = k''(1) = \lambda_1\mu_2 + \frac{\lambda_2 b}{(1-b)^2} = \lambda_1(1-b)^{-1}(b\mu_1 + (1-b)\mu_2). \tag{8}$$

Надалі будемо позначати $z_1(s) = z_s$ і розглянемо спочатку перестрибкові функціонали через рівень $x = 0$.

Згідно з (2)-(3) генератриси $\{\tau^+(0), \gamma_k(0)\}$ для довільного знаку m визначаються простими співвідношеннями

$$V_k(s, 0, u_k) = s^{-1} p_+(s) G_k(s, 0, u_k),\ k = \overline{1,3}. \tag{9}$$

Нас цікавить осцилюючий випадок $m = 0$, для якого позначатимемо

$$G_k^0(s, x, u_k) = p_-^{-1}(s) G_k(s, x, u_k),\ x \geq 0,\ k = \overline{1,3}.$$

Теорема 1. *Для процесу $\xi(t)$ з кумулянтою (1) і $m = 0$*

$$E\, u^{\gamma_1(0)} = [b\lambda_1\widetilde{p}_1(u) + (1-b)u\widetilde{\Pi}(u)](\lambda_1 b + \lambda_2)^{-1}, \tag{10}$$

$$E\, v^{\gamma_2(0)} = [b\lambda_1 + (1-b)\widetilde{\Pi}(v)](\lambda_1 b + \lambda_2)^{-1}, \tag{11}$$

$$E\, \mu^{\gamma_3(0)} = [b\lambda_1\widetilde{p}_1(\mu) + (1-b)\widetilde{\Pi}(\mu)](\lambda_1 b + \lambda_2)^{-1}. \tag{12}$$

Доведення. Згідно з (7.31) в [3]

$$p_{-k}^-(s) = p_-(s)(z_s - b) z_s^{k-1}\ (k \geq 1,\ z_s = z_1(s) \leq 1). \tag{13}$$

Для випадку $k = 1$ знаходимо функцію $G_1^0(s, 0, u)$ та її граничні значення при $s \to 0, u \to 1$

$$G_1^0(s, 0, u) = bA_0^{(1)}(u) + \lambda_1 \frac{(z_s - u)u}{z_s - u}(\widetilde{p}_1(z_s) - \widetilde{p}_1(u)),$$

$$G_1^0(0, 0, u) = b\lambda_1\widetilde{p}_1(u) + \frac{\lambda_1(1-b)u}{1-u}(\widetilde{p}_1(1) - \widetilde{p}_1(u)),$$

$$G_1^0(0,0,1) = b\lambda_1 + \lambda_1(1-b)\mu_1.$$

Згідно з (8) при $k = \overline{1,3}$

$$E[e^{-s\tau^+(0)} u_k^{\gamma_1(0)}] = p_-(s)p_+(s)G_k^0(s,0,u). \tag{14}$$

Враховуючи (4) після граничного переходу $s \to 0$ з (14) випливає, що при $k = 1$, $u_k = u$: $E[u^{\gamma_1(0)}] = k_1 G_1^0(s,0,u) \xrightarrow[u\to 1]{} 1$, отже, $k_1 = (G_1^0(0,0,1))^{-1}$.

Згідно з (7) $G_1^0(0,0,1) = b\lambda_1 + \lambda_2$ і співвідношення (9) доведено і визначена стала k_1 в (4).

У випадку $k = 2$ простіше обчислюється функція G_2^0 з її граничними значеннями

$$G_2^0(s,0,v) = bz_s^{-1}\lambda_1 + (z_s - b)z_s\widetilde{\Pi}(vz_s),$$

$$G_2^0(0,0,v) = b\lambda_1 + (1-b)z_s\widetilde{\Pi}(v) \to G_2^0(0,0,1) = b\lambda_1 + \lambda_2.$$

Як і в попередньому випадку при $k = 2$, $u_2 = v$ з урахуванням (4) через $G_2^0(0,0,v)$ визначається генератриса $\gamma_2(0)$ в (11).

Для випадку $k = 3$, $u_3 = \mu$, аналогічно обчислюються

$$G_3^0(s,0,\mu) = z_s^{-1}[b\lambda_1\widetilde{p}_1(\mu) + \lambda_1\frac{z_s - b}{1 - z_s}(\widetilde{p}_1(\mu) - \widetilde{p}_1(\mu z_s))],$$

$$G_3^0(0,0,\mu) = b\lambda_1\widetilde{p}_1(\mu) + (1-b)\widetilde{\Pi}(\mu) \to G_3^0(0,0,1) = b\lambda_1 + \lambda_2.$$

Як і в попередніх випадках при $k = 3$ і $u_k = \mu$ із (13) після граничного переходу $s \to 0$ встановлюється (12).

В наступних теоремах розглядаються генератриси перестрибків через рівень $x \to \infty$.

Теорема 2. *Для процесу $\xi(t)$ з кумулянтою (1) та $m = 0$*

$$E\, u^{\gamma_1(\infty)} = \left[bu\widetilde{\Pi}(u) + \lambda_1(1-b)\frac{u}{u-1}\left(\widetilde{p}'_1(u) - \widetilde{p}'_1(1)\right)\right]\frac{1}{(1-b)\sigma_1^2}. \tag{15}$$

Доведення. При $m = 0$ згідно з (13) обчислюється функція

$$G_1^0(s,x,u) = bz_s^{-1}A_x^{(1)} + \lambda_1(z_s - b)z_s^{-1}\frac{u}{u - z_s}\sum_{k\geq x+1} p_k(u^k - z_s^k)$$

та її твірне перетворення $g_1^0(s,\beta,u)$ з її граничними значеннями

$$g_1^0(s,\beta,u) = z_s^{-1}\left[b\widetilde{\Pi}(u) + \frac{\lambda_1 u(z_s - b)}{(u - z_s)(1-\beta)}\left(\widetilde{p}_1(u) - \widetilde{p}_1(u\beta) - \widetilde{p}_1(z_s) + \widetilde{p}_1(\beta z_s)\right)\right],$$

$$g_1^0(0,1,u) = \lim_{s\to 0} g_1^0(s,\beta,u) = b\widetilde{\Pi}(u) + \lambda_1 u\frac{1-b}{u-1}\left(\widetilde{p}'_1(u) - \widetilde{p}'_1(1)\right), \tag{16}$$

$$g_1^0(0,1,1) = \lim_{u\to 1} g_1^0(0,1,u) = \lambda_1(b\mu_1 + (1-b)\mu_2).$$

Позначимо через ν_β – геометрично розподілену випадкову величину з параметром $\beta < 1$. Тоді згідно з (2)-(3) генератриси $\{\tau^+(\nu_\beta),\, \gamma_k(\nu_\beta)\}$ визначаються співвідношеннями

$$E\left[e^{-s\tau^+(\nu_\beta)} u_k^{\gamma_k(\nu_\beta)}\right] = \frac{1-\beta}{s}p_-(s)g_+(s,\beta)g_k^0(s,\beta,u_k) = m_0(s,\beta)g_k^0(s,\beta,u_k). \tag{17}$$

З урахуванням леми 2 та граничних значень в (16) при $k = 1$ і $u_1 = u$ із (16) при $s \to 0$ і $\beta \to 1$ випливає, що $E\, u^{\gamma_1(\infty)} = g_1^0(0,1,u)(g_1^0(0,1,1))^{-1}$. Згідно з (8) $g_1^0(0,1,1) = \sigma_1^2(1-b)$ і таким чином (15) доведено.

Теорема 3. *Для процесу $\xi(t)$ з кумулянтою (1) та $m = 0$*

$$E\, v^{\gamma_2(\infty)} = \left[b\widetilde{\Pi}(v) + \frac{1-b}{1-v}\left(\widetilde{\Pi}(v) - \lambda_1 v \widetilde{p}'_1(v)\right)\right]\frac{1}{(1-b)\sigma_1^2}. \tag{18}$$

Доведення. Для випадку $k = 2$, $u_2 = v$ при $m = 0$ знаходимо

$$G_2^0(s,x,v) = z_s^{-1} v^x \left[b\Pi(x) + \lambda_1 \frac{z_s - b}{1 - v z_s} \sum_{k \geq x+1} p_k (1 - (v z_s)^{k-x})\right]$$

та її твірне перетворення $g_2^0(s,\beta,u)$ з граничними значеннями

$$g_2^0(s,\beta,v) = z_s^{-1} b\widetilde{\Pi}(\beta v) + \frac{z_s - b}{z_s(1 - v z_s)}\left(\widetilde{\Pi}(\beta v) - \lambda_1 v \widetilde{p}'_1(v)\right),$$

$$g_2^0(0,1,v) = \lim_{s\to 0} g_1^0(s,1,v) = b\widetilde{\Pi}(v) + \frac{1-b}{1-v}\left(\widetilde{\Pi}(v) - \lambda_1 v \widetilde{p}_1(v)\right), \tag{19}$$

$$g_2^0(0,1,1) = \lim_{v\to 1} g_1^0(0,1,v) = \lambda_1(b\mu_1 + (1-b)\mu_2).$$

З урахуванням леми (19) після граничного переходу $s \to 0$, $\beta \to 1$ в (17) при $k = 2$ і $u_2 = v$ знаходимо, що $E\, v^{\gamma_2(\infty)} = g_2^0(0,1,v)(g_2^0(0,1,1))^{-1}$. Згідно з (8) з останнього співвідношення випливає (18).

Теорема 4. *При умові $m = 0$ генератриса $\gamma_3(\infty)$ визначаєтьcя через твірні перетворення функції $A_x^{(3)}(\mu)$*

$$a_3(\beta,\mu) = \frac{\lambda_1}{1-\beta}\left(\widetilde{p}_1(\mu) - \widetilde{p}_1(\beta\mu)\right),\ a_3(1,\mu) = \lambda_1 \widetilde{p}'_1(\mu),$$

$$E\, v^{\gamma_3(\infty)} = [b a_3(1,\mu) + (1-b) a'_3(1,\mu)]\frac{1}{(1-b)\sigma_1^2}, \tag{20}$$

$$a'_3(1,\mu) = \frac{\partial}{\partial\beta} a_3(\beta,\mu)\big|_{\beta=1} = \sum_{x\geq 0} x A_x^{(3)}(\mu).$$

Доведення. Із (17) при $k = 3$, $u_3 = \mu$, аналогічно, як і в попередніх випадках при $s \to 0$, $\beta \to 1$ встановлюється (20).

Зауваження 1. Для дійснозначних східчастих процесів Леві (див. [4], лема 3.4, с.84) незалежно від знаку m атомарні ймовірності $p_\pm(s) > 0$, $p_0(s) = P\{\xi(\theta_s) = 0\}$ задовольняють співвідношення(точне і асимптотичне)

$$p_+(s)p_-(s) = p_0(s) = \frac{s}{s+\lambda} \Rightarrow \lim_{s\to 0} s^{-1} p_+(s)p_-(s) = \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2}. \tag{21}$$

Отже, асимптотичне співвідношення (4) в лемі 1 і (21) майже подібні, тобто і в гратчастому випадку при $m = 0$ і $s \to 0$ добуток

$$p_+(s)p_-(s) \approx k_1 s = \frac{s}{b\lambda_1 + \lambda_2},\ (s \to 0) \tag{22}$$

асимптотично лінійний по s і обернено пропорціональний сумарній інтенсивності λ_1 додатних та λ_2 від'ємних стрибків. Але в гратчастому випадку величина інтенсивності λ_1 зменшена ($\lambda_1 b < \lambda_1$, $0 < b < 1$). Крім того,

$$p_0(s) = p_+(s)p_-(s) + \sum_{k\geq 1} p^-_{-k}(s)p^+_k(s) > p_+(s)p_-(s) > \frac{s}{s+\lambda} = p^0_0(s). \qquad (23)$$

Слід відзначити, що згідно (7.32) в [3]

$$p_+(s)p_-(s) = p_0(s) - (z_s - b)\sum_{k\geq 1} b^{k-1}p_k(s),\ 0 < b < z_s < 1.$$

Це пояснюється тим, що в гратчастому випадку після момента першого стрибка ζ_1 процес $\xi(t)$ повторно може попадати в нуль. Тому

$$p_0(s) > s\int_0^\infty e^{-st}P\{\zeta_1 > t\}dt = s\int_0^\infty e^{-(s+\lambda)t}dt = s(s+\lambda)^{-1} = p^0_0(s), \qquad (24)$$

де $p^0_0(s)$ – імовірність початкового перебування $\xi(t)$ в 0 (до виходу з 0). Імовірність перебування $\xi(t)$ в нулі за рахунок повернення в нього визначається різницею

$$\overline{p}_0(s) = p_0(s) - p^0_0(s) > p_+(s)p_-(s) - p^0_0(s) \approx \frac{s\lambda_1(1-b)}{(\lambda_1+\lambda_2)(b\lambda_1+\lambda_2)}\ (s\to 0). \qquad (25)$$

Права частина в (25) досягає максимуму при $b = 0$, коли процес $\xi(t)$ напівнеперервний знизу.

Зауваження 2. З результатів теорем 7.6, 7.7 та леми 7.6 в [3] (див. (7.34) та (7.51)) випливає, що при $\pm m > 0$ і $s \to 0$

$$0 < p_\mp = P\{\xi^\mp = 0\} < 1,\ p_\pm(s) \underset{s\to 0}{\longrightarrow} 0,$$

$$p'_+(0) = E[\tau^+(0)],\ p'_-(0) = E[\tau^-(0)] = \frac{1}{|m|(1-b)} > 0.$$

Отже, при $\pm m > 0$ та $s \to 0$ мають місце подібні до (22) співвідношення

$$p_+(s)p_-(s) \approx sp_\mp p'_\pm(0)\ (s\to 0). \qquad (26)$$

Зауваження 3. Для ілюстрації деяких результатів з розподілу граничних функціоналів використовується введене Ю. П. Студнєвим (див. [7]) поняття дискретних квазіймовірнісних розподілів.

Означення 1. *Послідовність* $\{p_k\}_{k=-\infty}^{+\infty}$ *називається дискретним квазіймовірнісним розподілом, якщо*

$$\sum_{|k|\geq 0} p_k = 1,\ \sum_{|k|\geq 0} |p_k| < \infty. \qquad (27)$$

Квазігенератрисою такого розподілу називається твірна функція

$$p_*(z) = \sum_{|k|\geq 0} p_k z^k,\ |z| = 1. \qquad (28)$$

Для майже напівнеперервного зверху процесу $\xi(t)$ з $0 < c < 1$ рівняння Лундберга: $k(z) = 0$ $(\mathfrak{L}_0)$ $(k(z) = lnEz^{\xi(t)})$ має корінь $z_0 > 1$. Якщо позначити $c' = z_0^{-1}$, то при $m < 0$ генератриса ξ^+ зводиться до вигляду

$$g_+(z) = \frac{1-c'}{1-c} \cdot \frac{1-cz}{1-c'z} = \frac{z^{-1}-c}{1-c} \cdot \frac{(1-c')z}{1-c'z} = b_*^-(z) g_*^+(z), \tag{29}$$

$g_*^+(z)$ – генератриса геометричного розподілу з параметром c' на $\mathbb{Z}^+$. Функцію $b_*^-(z)$ можна інтерпретувати як квазігенератрису бернуллівського "розподілу":

$$p_0 = -\frac{c}{1-c} \cdot p_{-1} = 1 - p_0 = \frac{1}{1-c}; \;\; E\xi^+ = \frac{1}{1-c'} - \frac{1}{1-c} = \frac{c'-c}{(1-c')(1-c)} > 0.$$

Аналогічно для майже напівнеперервного знизу процесу $\xi(t)$ з $0 < b < 1$ рівняння Лундберга $(\mathfrak{L}_0)$ має корінь $b < z_0 < 1$. Якщо позначити $b' = z_0$, то при $m > 0$ генератриса ξ^- зводиться до вигляду

$$g_-(z) = \frac{1-b'}{1-b} \cdot \frac{z-b}{z-b'} = \frac{z-b}{1-b} \cdot \frac{1-b'}{z-b'} = b_*^+(z) g_*^-(z), \tag{30}$$

$g_*^-(z)$ – генератриса геометричного розподілу з параметром b' на $\mathbb{Z}_-$, $b_*^+(z)$ квазігенератриса бернуллійового "розподілу":

$$p_0 = -\frac{b}{1-b}, \;\; p_1 = 1 - p_0 = \frac{1}{1-b}; \;\; E\xi^- = \frac{b-b'}{(1-b')(1-b)} < 0.$$

За рахунок $p_1 > 0$ множина значень ξ^- поповнюється значенням $\{0\}$.

Для розподілу ξ^+ та перестрибкових функціоналів процесу $\xi(t)$ з поліноміальними генератрисами додатних стрибків $\widetilde{p}_1(z)$ використовуються квазігенератриси геометричного розподілу на $\mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ з параметром $0 < c_* = |z_3(0)|^{-1} < 1$ $(|z_3(0)| > z_{1,2}(0))$:

$$p_*^+(z) = \frac{1+c_*}{1+c_* z} \;\; (p_k^* = (1+c_*)(-c_*)^k, \; k \geq 0, \; \sum_{k\geq 0} p_k^* = 1, \; \sum_{k \geq 0} |p_k^*| = \frac{1+c_*}{1-c_*}.)$$

Список використаної літератури

1. *Королюк В.С.* Граничные задачи для сложных пуассоновских процессов. – К.: Наукова думка, 1975. – 138 с.
2. *Гихман И.И., Скороход А.В.* Теория случайных процессов. (Т. 2) – М.: Наука, 1973. – 639 с.
3. *Гусак Д. В.* Процеси з незалежними приростами в теорії ризику. – Київ: Ін-т математики НАН України, 2011. – 543 с.
4. *Gusak D. V.* Boundary functionals for Levy processes and their applications. LAP Lambert Acad.Publishing, 2014, – 412 p.
5. *Гусак Д. В.* Розподіл перестрибкових функціоналів напівнеперервного однорідного процесу з незалежними приростами// Укр. мат. журн.– 2002. – 54, №3. – С. 303–322.
6. *Герич М. С.* Розподіли перестрибків для майже напівнеперервних процесів, заданих на ланцюгу Маркова// Теорія ймовір. та мат. статистика.– 2016. – 94, – С. 36–49.
7. *Студнев Ю. П., Игнат Ю. И.* Локальная предельная теорема для дискретных квазивероятностных распределений // Теория вероят. и её примен. – 1992. – Т 37, №4. – С. 807-808.

Одержано 10.10.2016