УДК 519.21

М. М. Капустей, Г. І. Сливка-Тилищак, П. В. Слюсарчук
(Ужгородский нац. ун-т)

ОЦІНКА БЛИЗЬКОСТІ РОЗПОДІЛІВ ДВОХ СУМ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН

The paper contains estimates of approximation of convergence of sums distributed random variables in the term pseudomoments.

Робота містить оцінки близькості розподілів сум випадкових величин в термінах зрізаних псевдомоментів.

Основні результати. Продовжуються дослідження із застосування псевдомоментів до оцінки близькості розподілів двох сум випадкових величин, аналогічні [1–3]. На випадкові величини однієї із сум накладається обмеження, що використане в [4] (стор. 382).

Нехай $\xi_1, \ldots, \xi_n, \ldots$ та $\eta_1, \ldots, \eta_n, \ldots$ – дві послідовності випадкових величин з функціями розподілу відповідно $F_k(x)$ і $G_k(x)$, характеристичними функціями $f_k(t)$ і $g_k(t)$. $\Phi_n(x)$ і $Q_n(x)$ – відповідно функції розподілу випадкових величин $\sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k$ і $\sum\limits_{k=1}^{n} \eta_k$, $H_k(x) = F_k(x) - G_k(x)$, $\rho_n = \sup\limits_x |\Phi_n(x) - Q_n(x)|$.

Нехай виконуються умови:

існує число $\alpha \in (0;2]$ і стала $\lambda > 0$ такі, що

$$|g_n(t)| \le e^{-\lambda|t|^\alpha}; \tag{1}$$

$$\mu_{kj} = \int\limits_{\infty}^{\infty} x^j dH_k(x) = 0 \ \ (k = 1, 2, \ldots; \ j = \overline{1, m}), \tag{2}$$

де $m = 1$ при $\alpha \le 1$ і $m = 2$ при $1 < \alpha \le 2$.

Розглянемо для довільного $y > 0$ псевдомоменти вигляду:

$$\kappa_k^{(1)}(y) = \int\limits_{|x|\le y} |x|^\alpha \left|H_k\left(x\lambda^{\frac{1}{\alpha}}\right)\right| dx, \ \kappa_k^{(2)}(y) = \int\limits_{|x|>y} |x|^{m-1} \left|H_k\left(x\lambda^{\frac{1}{\alpha}}\right)\right| dx,$$

$$\kappa^{(1)}(y) = \max_{1\le k\le n} \kappa_k^{(1)}(y), \ \kappa^{(2)}(y) = \max_{1\le k\le n} \kappa_k^{(2)}(y), \ \kappa(y) = \max\left\{\kappa^{(1)}(y), \kappa^{(2)}(y)\right\}.$$

Теорема. *Нехай виконуються умови* (1) *і* (2). *Тоді для всіх* $n \ge 1$ *справедлива нерівність*

$$\rho_n \le C^{(1)} \inf_{y>0} \left\{ \frac{\kappa^{(1)}(y)}{n^{\frac{1}{\alpha}}} + \kappa^{(2)}(y) + \frac{(\kappa(y))^{\frac{n}{(\alpha+1)n+1}}}{n^{\frac{1}{\alpha}}} \right\}, \tag{3}$$

де $C^{(1)}$ *– стала, що залежить тільки від* α.

Допоміжні леми.

Лема 1. *Нехай виконуються умови* (2), $\omega_k(t) = |f_k(t) - g_k(t)|$, *тоді для будь-яких дійсних* t *і* $y > 0$

$$\omega_k\left(t\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}\right) \le \frac{2^{1-\delta}}{m^\delta} |t|^{\alpha+1} \kappa_k^{(1)}(y) + 2|t|^m \kappa_k^{(2)}(y),$$

де $\delta = \alpha + 1 - m$.

Доведення. Із (2) випливає рівність

$$\omega_k\left(t\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}\right) = \left|\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(e^{itx} - \sum_{j=0}^{m}\frac{(itx)^j}{j!}\right)dH_k\left(x\lambda^{\frac{1}{\alpha}}\right)\right| =$$

$$= |t|\left|\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(e^{itx} - \sum_{j=0}^{m-1}\frac{(itx)^j}{j!}\right)H_k\left(x\lambda^{\frac{1}{\alpha}}\right)dx\right|.$$

Із нерівності ([4], стор. 372)

$$\left|e^{iz} - \sum_{j=0}^{m}\frac{(iz)^j}{j!}\right| \le \frac{2^{1-\gamma}|z|^{m+\gamma}}{m!(m+1)^\gamma},\ 0 \le \gamma \le 1,\ m = 0, 1, 2, \dots,$$

одержуємо

$$\omega_k\left(t\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}\right) \le |t|\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left|e^{itx} - \sum_{j=0}^{m-1}\frac{(itx)^j}{j!}\right|\left|H_k\left(x\lambda^{\frac{1}{\alpha}}\right)\right|dx =$$

$$= |t|\int\limits_{|x|\le y}\left|e^{itx} - \sum_{j=0}^{m-1}\frac{(itx)^j}{j!}\right|\left|H_k\left(x\lambda^{\frac{1}{\alpha}}\right)\right|dx +$$

$$+|t|\int\limits_{|x|>y}\left|e^{itx} - \sum_{j=0}^{m-1}\frac{(itx)^j}{j!}\right|\left|H_k\left(x\lambda^{\frac{1}{\alpha}}\right)\right|dx \le \frac{2^{1-\delta}}{m^\delta}|t|^{\alpha+1}\kappa_k^{(1)}(y) + 2|t|^m\kappa_k^{(2)}(y).$$

Лема 1 доведена.

Лема 2. *Нехай виконуються умови* (1) *і* (2), $c \in \left(0; \min\left\{e^{-\frac{2}{\alpha}}; 2^{-2}e^{-1}; b\right\}\right)$,

$$b = \sup\left\{c \in \left(0; e^{-\frac{2}{\alpha}}\right) : \frac{1}{2} - 4\left(-c^{\frac{\alpha}{2}}\ln c\right)^{\frac{1}{\alpha}} > 0\right\},\ \delta = \alpha + 1 - m,\ \kappa^{(2)}(y) \le c.$$

Якщо $\kappa(y) \le c$, *то при* $|t| \le T_1 = (-\ln(\kappa(y)))^{\frac{1}{\alpha}}$,

$$\left|f_k\left(t\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}\right)\right| \le e^{-c_1|t|^\alpha}, \tag{4}$$

де $c_1 = \frac{1}{2} - 4\left(-c^{\frac{\alpha}{2}}\ln c\right)^{\frac{1}{\alpha}} > 0$, $T_1 > 1$,

а при $|t| > T_1$

$$\left|f_k\left(t\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}\right)\right| \le 5|t|^{\alpha+1}\kappa(y). \tag{5}$$

Якщо $\kappa(y) > c$ (*тобто* $\kappa^{(1)}(y) > c$) *і* $|t| \le T_2 = \frac{c}{\kappa^{(1)}(y)}$, $(T_2 < 1)$, *то*

$$\left|f_k\left(t\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}\right)\right| \le e^{-c_2|t|^\alpha}, \tag{6}$$

де $c_2 = 1 - 4ce > 0$.

Доведення. Із умови (1)

$$\left|f_k\left(t\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}\right)\right| \le \left|f_k\left(t\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}\right)-g_k\left(t\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}\right)\right|+\left|g_k\left(t\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}\right)\right| \le e^{-|t|^\alpha}+\omega_k\left(t\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}\right). \quad (7)$$

Нехай $\kappa(y)\le c$, $|t|\le T_1$. Оскільки $\kappa(y)\le c< e^{-\frac{2}{\alpha}}\le e^{-1}$, то $T_1\ge 1$. Із (7), леми 1 і визначення T_1 одержуємо

$$\left|f_k\left(t\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}\right)\right| \le e^{-\frac{1}{2}|t|^\alpha}\left(e^{-\frac{1}{2}|t|^\alpha}+e^{\frac{1}{2}|t|^\alpha}\omega_k\left(t\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}\right)\right)\le$$

$$\le e^{-\frac{1}{2}|t|^\alpha}\left(1+e^{\frac{1}{2}|t|^\alpha}|t|^\alpha\Big(\frac{2^{1-\delta}}{m^\delta}|t|\kappa_k^{(1)}(y)+2|t|^{m-\alpha}\kappa_k^{(2)}(y)\Big)\right)\le$$

$$\le e^{-\frac{1}{2}|t|^\alpha}\left(1+e^{\frac{1}{2}T_1^\alpha}|t|^\alpha\kappa(y)\Big(\frac{2^{1-\delta}}{m^\delta}T_1+2T_1^{m-\alpha}\Big)\right)\le e^{-\frac{1}{2}|t|^\alpha}\left(1+4|t|^\alpha\sqrt{\kappa(y)}(-\ln(\kappa(y)))^{\frac{1}{\alpha}}\right).$$

Функція $y=x^{\frac{\alpha}{2}}\ln x$ спадає при $x\in\left(0;e^{-\frac{2}{\alpha}}\right)$. Тому

$$\left|f_k\left(t\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}\right)\right| \le e^{-\frac{1}{2}|t|^\alpha}\left(1+4|t|^\alpha\left(-c^{\frac{\alpha}{2}}\ln c\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right)\le e^{-c_1|t|^\alpha}.$$

У випадку $\kappa(y)\le c$ при $|y|>T_1$ із (7), леми 1 і умови $T_1\ge 1$ одержуємо

$$\left|f_k\left(t\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}\right)\right| \le e^{-|t|^\alpha}+\omega_k\left(t\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}\right)\le e^{-T_1^\alpha}+\frac{2^{1-\delta}}{m^\delta}|t|^{\alpha+1}\kappa_k^{(1)}(y)+$$

$$+2|t|^m\kappa_k^{(2)}(y)\le\kappa(y)(1+4|t|^{\alpha+1})\le 5|t|^{\alpha+1}\kappa(y).$$

Нехай $\kappa(y)>c$. Тоді із умов $\kappa^{(2)}(y)\le c$, $\kappa^{(1)}(y)>c$, (7), леми 1 при $|t|\le T_2=\frac{c}{\kappa^{(1)}(y)}$ (враховуємо, що $T_2<1$ і $m-\alpha\ge 0$)

$$\left|f_k\left(t\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}\right)\right| \le e^{-|t|^\alpha}+\omega_k\left(t\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}\right)=e^{-|t|^\alpha}\left(1+e^{|t|^\alpha}\omega_k\left(t\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}\right)\right)\le$$

$$\le e^{-|t|^\alpha}\left(1+e^{|t|^\alpha}|t|^\alpha\left(\frac{2^{1-\delta}}{m^\delta}|t|\kappa_k^{(1)}(y)+2|t|^{m-\alpha}\kappa_k^{(2)}(y)\right)\right)\le$$

$$\le e^{-|t|^\alpha}\left(1+e^{T_2^\alpha}|t|^\alpha\left(\frac{2^{1-\delta}}{m^\delta}T_2\kappa_k^{(1)}(y)+2T_2^{m-\alpha}\kappa_k^{(2)}(y)\right)\right)\le e^{-|t|^\alpha}(1+4e|t|^\alpha c)\le e^{-c_2|t|^\alpha}.$$

Лема 2 доведена.

Доведення теореми. Нехай $y>0$ і виконується умова $\kappa^{(2)}(y)\le c$, де стала c визначена у лемі 2. У випадку $\kappa^{(2)}(y)>c$ теорема стає очевидною: $\rho_n\le 1\le\frac{1}{c}\kappa^{(2)}(y)$. Використаємо нерівність ([5], стор. 299)

$$|F(x)-G(x)|\le\frac{2}{\pi}\int\limits_0^T|f(t)-g(t)|\,\frac{dt}{t}+\frac{24\sup\limits_x|G'(x)|}{\pi T}. \quad (8)$$

Оскільки $\rho_n=\sup\limits_x\Big|\Phi_n(x)-Q(x)\Big|=\sup\limits_x\Big|\Phi_n\Big(x\lambda^{\frac{1}{\alpha}}\Big)-Q_n\Big(x\lambda^{\frac{1}{\alpha}}\Big)\Big|$, то в (8) покладемо $F(x)=\Phi_n\Big(x\lambda^{\frac{1}{\alpha}}\Big)$, $G(x)=Q_n\Big(x\lambda^{\frac{1}{\alpha}}\Big)$, $f(t)=\prod\limits_{k=1}^n f_k\Big(t\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}\Big)$, $g(t)=\prod\limits_{k=1}^n g_k\Big(t\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}\Big)$. Із (1) випливає, що випадкові величини η_i мають щільність розподілу, а $G(x)=Q_n\Big(x\lambda^{\frac{1}{\alpha}}\Big)$

є функцією розподілу випадкової величини $\frac{1}{\lambda^{\frac{1}{\alpha}}}(\eta_1 + \cdots + \eta_n)$, тоді $|G'(x)| =$ $= \frac{1}{2\pi}\left|\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx} \prod\limits_{k=1}^{n} g_k\Big(t\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}\Big)dt\right| \leq \frac{1}{n^{\frac{1}{\alpha}}}\ \frac{1}{\pi}\,\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}+1\right)$. Тому із (8) отримаємо

$$\rho_n \leq \frac{2}{\pi}\int\limits_0^T \left|\prod_{k=1}^{n} f_k\Big(t\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}\Big) - \prod_{k=1}^{n} g_k\Big(t\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}\Big)\right|\frac{dt}{t} + \frac{24\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}+1\right)}{n^{\frac{1}{\alpha}}T\pi^2}. \tag{9}$$

Із нерівності $\left|\prod\limits_{i=1}^{n} a_i - \prod\limits_{i=1}^{n} b_i\right| \leq \sum\limits_{i=1}^{n} |a_i - b_i| \left(\prod\limits_{k=1}^{i-1} |b_k|\right)\left(\prod\limits_{k=i+1}^{n} |a_k|\right)$, лем 1 і 2 при $|t| \leq T_l$ ($l = 1$ при $\kappa(y) \leq c$ і $l = 2$ при $\kappa(y) > c$)

$$\left|\prod_{i=1}^{n} f_i\Big(t\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}\Big) - \prod_{i=1}^{n} g_i\Big(t\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}\Big)\right| \leq \sum_{i=1}^{n}\omega_i\Big(t\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}\Big)\prod_{k=1}^{i-1}\Big|g_k\Big(t\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}\Big)\Big|\prod_{k=i+1}^{n}\Big|f_k\Big(t\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}\Big)\Big| \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2^{1-\delta}}{m^{\delta}}|t|^{\alpha+1}\kappa_k^{(1)}(y) + 2|t|^m\kappa_k^{(2)}(y)\right)e^{-|t|^{\alpha}(k-1)}e^{-c_l|t|^{\alpha}(n-k)} \leq$$

$$\leq \left(\frac{2^{1-\delta}}{m^{\delta}}|t|^{\alpha+1}\kappa^{(1)}(y) + 2|t|^m\kappa_k^{(2)}(y)\right)ne^{-c_l|t|^{\alpha}(n-1)}. \tag{10}$$

Нехай $\kappa(y) > c$ ($l = 2$). Покладемо у (9) $T = T_2$. Тоді для інтеграла у (9), із використанням нерівності (10), при $n > 1$

$$I = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{T_2}\left|\prod_{k=1}^{n} f_k\Big(t\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}\Big) - \prod_{k=1}^{n} g_k\Big(t\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}\Big)\right|\frac{dt}{t} \leq$$

$$\leq \frac{2}{\pi}n\int\limits_0^{T_2}\left(\frac{2^{1-\delta}}{m^{\delta}}|t|^{\alpha+1}\kappa^{(1)}(y) + 2|t|^m\kappa^{(2)}(y)\right)ne^{-c_l|t|^{\alpha}(n-1)}dt \leq$$

$$\leq \frac{\kappa^{(1)}(y)}{n^{\frac{1}{\alpha}}}C_3 + \frac{\kappa^{(2)}(y)}{n^{\frac{m}{\alpha}-1}}C_4. \tag{11}$$

Через C_k будемо позначати сталі, що залежать тільки від c і α. Із (9) та (11) при $n > 1$ і $\kappa(y) > c$ $\rho_n \leq C_5\left(\frac{\kappa^{(1)}(y)}{n^{\frac{1}{\alpha}}} + \frac{\kappa^{(2)}(y)}{n^{\frac{m}{\alpha}-1}}\right)$. Із умови $\kappa(y) > c$ випливає справедливість теореми і при $n = 1$. У випадку $\kappa(y) > c$ теорема доведена.

Нехай $\kappa(y) \leq c$, $n > 1$. В (9) покладемо $T = \left(\frac{c}{5}\right)^{\frac{1}{\alpha+1}}(\kappa(y))^{-\frac{n}{(\alpha+1)n+1}}$, $T' = \min(T_1, T)$. Тоді

$$I = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{T}\left|\prod_{k=1}^{n} f_k\Big(t\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}\Big) - \prod_{k=1}^{n} g_k\Big(t\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}\Big)\right|\frac{dt}{t} \leq \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{T'}\left|\prod_{k=1}^{n} f_k\Big(t\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}\Big) - \prod_{k=1}^{n} g_k\Big(t\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}\Big)\right|\frac{dt}{t} +$$

$$+\frac{2}{\pi}\int\limits_{T'}^{T}\left|\prod_{k=1}^{n} f_k\Big(t\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}\Big)\right|\frac{dt}{t} + \frac{2}{\pi}\int\limits_{T'}^{T}\left|\prod_{k=1}^{n} g_k\Big(t\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}\Big)\right|\frac{dt}{t} = I_1 + I_2 + I_3. \tag{12}$$

Враховуючи, що $T' \leq T_1$, та (12) при $n > 1$, аналогічно до (11),

$$I_1 \leq C_6 \left(\frac{\kappa^{(1)}(y)}{n^{\frac{1}{\alpha}}} + \frac{\kappa^{(2)}(y)}{n^{\frac{m}{\alpha}-1}} \right). \tag{13}$$

Будемо вважати, що $T' = T_1$, бо у випадку $T' = T$ $I_2 = 0$, $I_3 = 0$. Тому із (9), (12), (13) при $n > 1$ випливає (3).

Із нерівності (7) леми 2

$$I_2 = \frac{2}{\pi} \int\limits_{T_1}^{T} \left| \prod_{k=1}^{n} f_k\left(t\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}\right) \right| \frac{dt}{t} \leq \frac{2}{\pi} \int\limits_{T_1}^{T} (5|t|^{\alpha+1}\kappa(y))^n \frac{dt}{t} \leq \frac{2}{\pi}(5\kappa(y))^n \frac{T^{n(\alpha+1)}}{n(\alpha+1)} \leq$$

$$\leq \frac{2}{\pi}(\kappa(y))^{\frac{n}{n(\alpha+1)+1}} \frac{c^n}{n(\alpha+1)} \leq C_7 n^{-\frac{1}{\alpha}} (\kappa(y))^{\frac{n}{n(\alpha+1)+1}}. \tag{14}$$

Із (1), умов $\kappa(y) \leq c$, $T_1 \geq 1$ для I_3 одержуємо:

$$I_3 = \frac{2}{\pi} \int\limits_{T_1}^{T} \left| \prod_{k=1}^{n} g_k\left(t\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}\right) \right| \frac{dt}{t} \leq \frac{2}{\pi} \int\limits_{T_1}^{T} e^{-nt^{\alpha}} \frac{dt}{t} \leq \frac{2}{\pi} \int\limits_{T_1}^{\infty} e^{-nt^{\alpha}} n\alpha t^{\alpha-1} \frac{dt}{n\alpha t^{\alpha}} \leq$$

$$\leq \frac{2}{\pi\alpha n (T_1)^{\alpha}} e^{-n(T_1)^{\alpha}} \leq \frac{2}{\pi n \alpha}(\kappa(y))^n \leq \frac{\kappa(y)}{n^{\frac{1}{\alpha}}} \cdot \frac{2}{\pi\alpha} n^{\frac{1}{\alpha}-1} c^{n-1} \leq C_8 \frac{\kappa(y)}{n^{\frac{1}{\alpha}}}. \tag{15}$$

Із (9), (12)—(15), одержуємо справедливість теореми у випадку $n > 1$, $\kappa(y) \leq c$.

Нехай $n = 1$, $\kappa(y) \leq c$, $T = c^{\frac{1}{\alpha+1}}(\kappa(y))^{-\frac{1}{\alpha+2}}$. Із (9) і леми 1

$$\rho_1 \leq \frac{2}{\pi} \int\limits_{0}^{T} \left| f_1\left(t\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}\right) - g_1\left(t\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}\right) \right| \frac{dt}{t} + \frac{24\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}+1\right)}{T\pi^2} \leq$$

$$\leq \frac{2}{\pi} \int\limits_{0}^{T} \left(\frac{2^{1-\delta}}{m^{\delta}} |t|^{\alpha+1} \kappa_1^{(1)}(y) + 2|t|^m \kappa_1^{(2)}(y) \right) \frac{dt}{t} + \frac{24\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}+1\right)}{T\pi^2} \leq C_9 (\kappa(y))^{\frac{1}{\alpha+2}}.$$

Теорема доведена.

Список використаної літератури

1. *Боярищева Т. В., Слюсарчук П. В.* Близькість функцій розподілу двох сум випадкових величин // Міжнародна конференція "Сучасна стохастика: теорія і застосування". Матеріали конференції, 19–23 червня 2006. – Київ, 2006. – С. 80–81.
2. *Капустей М. М., Слюсарчук П. В.* Оцінка близькості функцій розподілу сум випадкових величин в термінах псевдомоментів // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Серія матем. і інформ. 2014. – Вип. № 2 (25). – С. 58–64.
3. *Капустей М. М.* Оцінка близькості функцій розподілу двох сум випадкових величин в термінах однієї форми псевдомоментів // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Серія матем. і інформ. –2015. – Вип. № 2 (27). – С. 59–64.
4. *Золотарёв В. М.* Современная теория суммирования независимых случайных величин. – Москва: Наука, 1986. – 416 с.
5. *Лоэв М.* Теория вероятностей. – Москва: Изд-во иностр. л-ры, 1962. – 720 с.

Одержано 27.09.2016