УДК 512.44

Г. І. Сливка-Тилищак (Пряшівський ун-т в Пряшеві, ДВНЗ «Ужгородський нац. ун-т»)

ОЦІНКИ ДЛЯ РОЗПОДІЛУ СУПРЕМУМУ НА НЕСКІНЧЕННОСТІ РОЗВ'ЯЗКУ ЗАДАЧІ ПРО КОЛИВАННЯ СТРУНИ З ВИПАДКОВИМИ ПОЧАТКОВИМИ УМОВАМИ

In the paper the estimates for distribution of supremum for the solution of the hyperbolic equation of mathematical physics whis random initial conditions on the unbounded domain are found.

В роботі отримано оцінку для розподілу супремуму розв'язку гіперболічного рівняння математичної фізики з випадковими початковими умовами в нескінченній області.

1. Вступ. Багато науковців досліджували властивості розподілів супремумів випадкових процесів, працювали над знаходженням оцінок ймовірності, вивчали проблему існування моментів розподілу супремумів процесів. Оцінки для розподілів супремумів різних орлічевських процесів розглядалися в роботах [2, 4–6]. У монографії Дарійчук І. В., Козаченко Ю. В., Перестюк М. М. [9] розглядаються питання пов'язані з розподілом супремуму випадкових процесів з простору Орліча випадкових величин. Зауважимо, що в [9] процеси визначені як на скінченному інтервалі, та і на $\mathbb{R}$. Оцінки для розподілу супремуму гауссових випадкових процесів на компактах розглядалися в багатьох роботах, зокрема в монографії [7], де можна знайти посилання і на інші статті. Оцінки для розподілу супремуму $Sub_\varphi(\Omega)$ випадкових процесів на компактах розглядалися в [8]. У статті [3] отримано оцінки розподілу супремуму для випадкових полів з простору $Sub_\varphi(\Omega)$ на нескінченності.

Дана робота присвячена застосуванню оцінок для розподілу супремуму випадкових полів в нескінченній області з простору $Sub_\varphi(\Omega)$ до розв'язку рівняння гіперболічного типу математичної фізики з випадковими початковими умовами.

Отримані оцінки можна застосовувати при вивченні швидкості росту розвязків задач математичної фізики при $t \to \infty$. Результати в цьому напрямку можна використовувати в наступних ситуаціях: Нехай диференціальне рівняння описує деякий фізичний процес. Відомо, що при перевищенні деякого рівня даним процесом відбувається катастрофа. Ці перевищення відбуваються досить рідко. Якщо мати оцінки зростання процесу на нескінченості, то можна оцінити ймовірність катастрофи за певний проміжок часу.

2. Основний результат. Розглянемо крайову задачу гіперболічного типу математичної фізики про коливання неоднорідної струни:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(p(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right) - q(x)u - \rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0; \tag{1}$$

$$x \in [0, l]\,,\ t \in [0, T]\,,\ T > 0;$$

$$u(0, t) = u(l, t) = 0,\ t \in [0, T]\,; \tag{2}$$

$$u(x,0)=\xi(x),\ \frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=\eta(x),\ x\in[0,l]\,. \tag{3}$$

Припустимо, що початкове положення струни $(\xi(x),\ x\in[0,\pi])$ і початкова швидкість $(\eta(x),\ x\in[0,\pi])$ є сумісно строго $Sub_\varphi(\Omega)$ випадкові процеси, де $\varphi(x)=\frac{|x|^p}{p}$, $|x|>1$, $p>1$.

Означення 1 ([1]). *Парна неперервна опукла функція $u(x)$, $x\in\mathbb{R}^1$ така, що $u(0)=0$, $u(x)>0$ при $x\neq0$ і $\lim\limits_{x\to0}\frac{u(x)}{x}=0$, $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{u(x)}{x}=\infty$ називається N -функцією.*

Означення 2 ([1]). *Для N-функції $\varphi(x)$ виконується умова Q, якщо*

$$\liminf_{x\to0}\frac{\varphi(x)}{x^2}=c>0.$$

Означення 3 ([1]). *Нехай $\varphi(x)$ — N-функція, для якої виконується умова Q. Простором $Sub_\varphi(\Omega)$ породженим N-функцією $\varphi(x)$ називається простір випадкових $\xi(\omega)$, $\omega\in\Omega$, $(\mathbb{E}\xi=0)$, таких, що існує константа a_ξ, що для всіх $\lambda\in\mathbb{R}^1$ виконується нерівність*

$$\mathbb{E}\exp\{\lambda\xi\}\leqslant\exp\{\varphi(\lambda a_\xi)\}\,.$$

Означення 4 ([1]). *Випадковий процес $X=\{X(t)\,,\ t\in T\}$ належить простору $Sub_\varphi(\Omega)$ $(X\in Sub_\varphi(\Omega))$, якщо для $t\in T$ випадкова величина $X(t)\in Sub_\varphi(\Omega)$.*

Приклад 1. *Гауссів центрований випадковий процес $X(t)$ є $Sub_\varphi(\Omega)$, де $\varphi(x)=\frac{x^2}{2}$ і $\tau(X(t))=(\mathbb{E}(X(t))^2)^{1/2}$.*

Означення 5 ([1]). *Випадкова величина $\xi\in\ Sub_\varphi(\Omega)$ називається строго $Sub_\varphi(\Omega)$, $(SSub_\varphi(\Omega))$, якщо $\tau_\varphi(\xi)=(\mathbb{E}\xi^2)^{1/2}$.*

Означення 6 ([11]). *Сім'я випадкових величин ξ з простору $Sub_\varphi(\Omega)$ називається $SSub_\varphi(\Omega)$, якщо для довільної не більш ніж зліченної множини I, $\xi_i\in\Delta_i$, $i\in I$ і для всіх $\lambda_i\in\mathbb{R}^1$ виконується нерівність*

$$\tau_\varphi\left(\sum_{i\in I}\lambda_i\xi_i\right)\leqslant\left(\mathbb{E}\left(\sum_{i\in I}\lambda_i\xi_i\right)^2\right)^{1/2}.$$

Розв'язок задачі зображується у вигляді ряду [12]

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}X_k(x)\left[A_k\cos\sqrt{\lambda_k}t+\frac{B_k}{\sqrt{\lambda_k}}\sin\sqrt{\lambda_k}t\right], \tag{4}$$

$$x\in[0,l]\,,\ t\in[0,T]\,,\ T>0;$$

де

$$A_k=\int_0^l\xi(x)X_k(x)\rho(x)dx,$$

$$B_k=\int_0^l\eta(x)X_k(x)\rho(x)dx,\ k\geq1,$$

$\lambda_k,\ k \geq 1$ — власні значення, $X_k = (X_k)(x),\ x \in [0,l]),\ k \geq 1$ — відповідні їм власні функції задачі Штурма-Ліувілля

$$\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dX_k(x)}{dx}\right) - q(x)x(x) + \lambda\rho(x)X(x) = 0, \quad x \in [0,l],$$

$$X(0) = X(l) = 0.$$

Ряд (4) згідно [10], є також $Sub_\varphi(\Omega)$ випадковим полем.

Теорема 1 ([3])**.** *Нехай* $\{\xi(x,t),\ (x,t) \in V\}$, $V = [-A;A] \times [0,+\infty)$ *— сепарабельне випадкове поле з простору* $Sub_\varphi(\Omega)$*. Нехай виконуються наступні умови:*

1) $[b_k, b_{k+1}]$, $k = 0,1,\ldots$ *— сім'я таких відрізків, що* $0 \leq b_k < b_{k+1} < +\infty$, $k = 0,1,\ldots$ $V_k = [-A;A] \times [b_k, b_{k+1}]$, $\bigcup\limits_k V_k = V$*;*

2) *існують такі неперервні монотонно зростаючі функції* $\sigma_k(h),\ 0 < h < b_{k+1} - b_k$*, що* $\sigma_k(h) \longrightarrow 0$ *при* $h \longrightarrow 0$*, що на кожному* V_k *виконується умова*
$$\sup_{\substack{|x-x_1|\leq h,\\ |t-t_1|\leq h\\ (x,t),(x_1,t_1)\in V_k}} \tau_\varphi\left(\xi\left(x,t\right) - \xi\left(x_1,t_1\right)\right) \leqslant \sigma_k\left(h\right) \tag{5}$$
і
$$\int\limits_{0+} \Psi\left(\ln\frac{1}{\sigma_k^{(-1)}\left(\varepsilon\right)}\right) d\varepsilon < \infty, \tag{6}$$
де $\Psi\left(u\right) = \frac{u}{\varphi^{(-1)}(u)}$, $\sigma_k^{(-1)}(\varepsilon)$ *— обернені функції до* $\sigma_k(\varepsilon)$*;*

3) $c = \{c(t),\ t \in R\}$ *— деяка неперервна функція така, що* $c(t) > 0,\ t \in R$, $c_k = \min\limits_{t\in[b_k,b_{k+1}]} c(t)$*;*

4) $\sup\limits_k \frac{\varepsilon_k}{c_k} < \infty$, $\sup\limits_k \frac{I_\varphi(\theta\varepsilon_k)}{c_k} < \infty$, *де* $\varepsilon_k = \sup\limits_{(x,t)\in V_k} \tau_\varphi\left(\xi(x,t)\right)$,

5) *для деякого* s*, такого що,* $\sup\limits_k \frac{4\varepsilon_k}{c_k(1-\theta)} < s < \frac{u}{2}$*, збігається ряд*
$$\sum_{k=0}^{\infty} \exp\left\{-\varphi^*\left(\frac{sc_k(1-\theta)}{2\varepsilon_k}\right)\right\}.$$

Тоді для $u > \sup\limits_k \frac{I_\varphi(\theta\varepsilon_k)}{c_k} \cdot \frac{4}{\theta(1-\theta)}$*, де*

$$\tilde{I_\varphi}\left(\delta\right) = \int\limits_0^\delta \Psi\left[\left(\ln\left(\frac{A}{\sigma_k^{(-1)}\left(\varepsilon\right)} + 1\right)\right) + \left(\ln\left(\frac{b_{k+1} - b_k}{2\sigma_k^{(-1)}\left(\varepsilon\right)} + 1\right)\right)\right] d\varepsilon,$$

$k = 0,1,\ldots,\ 0 < \theta < 1$ *має місце нерівність*

$$P\left\{\sup_{(x,t)\in V} \frac{|\xi(x,t)|}{c(t)} > u\right\} \leqslant 2\exp\left\{-\varphi^*\left(\frac{u}{s}\right)\right\} \times$$

$$\times \sum_{k=0}^{\infty} \exp\left\{-\varphi^*\left(\frac{sc_k(1-\theta)}{2\varepsilon_k}\right)\right\}. \tag{7}$$

Теорема 2 ([3]). *Нехай* $\{\xi(x,t),\ (x,t)\in V\}$, $V=[-A;A]\times[0,+\infty)$ *— сепарабельне випадкове поле з простору* $Sub_\varphi(\Omega)$, *де* $\varphi(x)=\frac{|x|^p}{p}$ *при* $|x|>1$, $p>1$, *Нехай виконуються наступні умови:*

1) $[b_k,b_{k+1}]$, $k=0,1,\dots$ *— сім'я таких відрізків, що* $0\le b_k<b_{k+1}<+\infty$, $k=0,1,\dots$ $V_k=[-A;A]\times[b_k,b_{k+1}]$, $\bigcup\limits_k V_k=V$;

2) *існують такі константи* $a_k>0$ *і* $d>1$, *що* $A>\frac{1}{d}$, $\frac{b_{k+1}-b_k}{2}>\frac{1}{d}$ *і для довільного* $|h|$ *виконується умова*

$$\sup_{|x-x_1|\leqslant h,|t-t_1|\leqslant h(x,t),(x_1,t_1)\in V_k} \tau_\varphi\left(\xi\left(x,t\right)-\xi\left(x_1,t_1\right)\right)\leqslant \frac{a_k}{\left|\ln\left(\frac{1}{|h|}+d\right)\right|^\alpha},$$

при $\alpha>1-\frac{1}{p}$;

3) $c=\{c(t),\ t\in R\}$ *— деяка неперервна функція така, що* $c(t)>0$, $t\in R$, $c_k=\min\limits_{t\in[b_k,b_{k+1}]}c(t)$;

4) $\sup\limits_k \frac{\varepsilon_k}{c_k}<\infty$, $\sup\limits_k \frac{(a_k)^{\frac{1}{\alpha q}}(\varepsilon_k)^{1-\frac{1}{\alpha q}}}{c_k}<\infty$, $\sup\limits_k \frac{\varepsilon_k\ln\left(A\cdot\frac{b_{k+1}-b_k}{2}\right)^{\frac{1}{q}}}{c_k}<\infty$;

5) *для деякого* s *такого, що,* $\sup\limits_k\frac{4\varepsilon_k}{c_k(1-\theta)}<s<\frac{u}{2}$,

де $\varepsilon_k=\sup\limits_{(x_k,t_k)\in V_k}\tau_\varphi\left(\xi(x_k,t_k)\right)$, $k=0,1,\dots$ *збігається ряд*

$$\sum_{k=0}^{\infty}\exp\left\{-\frac{1}{q}\left(\frac{sc_k(1-\theta)}{2\varepsilon_k}\right)^q\right\}$$

.

Тоді для $u>\sup\limits_k\frac{\frac{1}{p^{\frac{1}{p}}}\left(2^{\frac{1}{q}}(a_k)^{\frac{1}{\alpha q}}\frac{(\theta\varepsilon_k)^{1-\frac{1}{\alpha q}}}{1-\frac{1}{\alpha q}}+\theta\varepsilon_k\ln\left(A\cdot\frac{b_{k+1}-b_k}{2}\right)^{\frac{1}{q}}\right)}{c_k}\cdot\frac{4}{\theta(1-\theta)}$,

$0<\theta<1$ *має місце нерівність*

$$P\left\{\sup_{(x,t)\in V}\frac{|\xi(x,t)|}{c(t)}>u\right\}\leqslant 2\exp\left\{-\frac{1}{q}\left(\frac{u}{s}\right)^{\frac{1}{q}}\right\}\times$$

$$\times\sum_{k=0}^{\infty}\exp\left\{-\frac{1}{q}\left(\frac{sc_k(1-\theta)}{2\varepsilon_k}\right)^q\right\}. \tag{8}$$

Теорема 3. *Нехай* $\{u(x,t),\ (x,t)\in D\}$, $D=[0;l]\times[0,+\infty)$ *— розв'язок задачі (1)—(3) сепарабельне випадкове поле з простору* $SSub_\varphi(\Omega)$, *де* $\varphi(x)=\frac{|x|^p}{p}$ *при* $|x|>1$, $p>1$, *Нехай виконуються наступні умови:*

1) $[b_k,b_{k+1}]$, $k=0,1,\dots$ *— сім'я таких відрізків, що* $0\le b_k<b_{k+1}<+\infty$, $k=0,1,\dots$ $D_k=[0;l]\times[b_k,b_{k+1}]$, $\bigcup\limits_k D_k=D$;

2) $c = \{c(t),\ t \in R\}$ — *деяка неперервна функція, що* $c(t) > 0,\ t \in R$, $c_k = \min\limits_{t\in[b_k, b_{k+1}]} c(t)$*;*

3) $\sup\limits_k \frac{1}{c_k} < \infty, \quad \sup\limits_k \frac{\ln\left(\frac{l}{2}\cdot\frac{b_{k+1}-b_k}{2}\right)^{\frac{1}{q}}}{c_k} < \infty;$

4) *для деякого* s*, такого що,* $\sup\limits_k \frac{4\varepsilon_0}{c_k(1-\theta)} < s < \frac{v}{2}$,

де $\varepsilon_0 \leq \sum\limits_{k=n}^{\infty}\sum\limits_{l=n}^{\infty}\left[|\mathbb{E}A_kA_l| + \frac{|\mathbb{E}B_kB_l|}{ml} + \frac{|\mathbb{E}A_kB_l|}{l}\right]^{\frac{1}{2}}$*, збігаеться ряд*

$$\sum_{k=0}^{\infty}\exp\left\{-\frac{1}{q}\left(\frac{sc_k(1-\theta)}{2\tilde{\varepsilon}_0}\right)^q\right\} < \infty.$$

Тоді для $v > \sup\limits_k \frac{\frac{1}{p^{\frac{1}{p}}}\left(2^{\frac{1}{q}}(a_k)^{\frac{1}{\alpha q}}\frac{(\theta\varepsilon_0)^{1-\frac{1}{\alpha q}}}{1-\frac{1}{\alpha q}} + \theta\varepsilon_0\ln\left(\frac{l}{2}\cdot\frac{b_{k+1}-b_k}{2}\right)^{\frac{1}{q}}\right)}{c_k}\cdot\frac{4}{\theta(1-\theta)}$, $0 < \theta < 1$ *має місце нерівність*

$$P\left\{\sup_{(x,t)\in D}\frac{|u(x,t)|}{c(t)} > v\right\} \leqslant$$

$$\leqslant 2\exp\left\{-\frac{1}{q}\left(\frac{v}{s}\right)^q\right\}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\exp\left\{-\frac{1}{q}\left(\frac{sc_k(1-\theta)}{2\tilde{\varepsilon}_0}\right)^q\right\}.$$

Доведення.

Оскільки $\{u(x,t),\ (x,t) \in D\}$ — строго $Sub_\varphi(\Omega)$ випадкове поле, то будемо мати

$$\sup_{\substack{|x_k-y_k|\leqslant h\\|t_k-s_k|\leqslant h\\(x_k,t_k),(y_k,s_k)\in V_k}} \tau_\varphi\left(u\left(x,t\right) - u\left(x_1,t_1\right)\right) \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{\substack{|x_k-y_k|\leqslant h\\|t_k-s_k|\leqslant h\\(x_k,t_k),(y_k,s_k)\in V_k}} \left(\mathbb{E}\left|u(x_k,t_k) - u(y_k,s_k)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \sup_{\substack{|x_k-y_k|\leqslant h\\|t_k-s_k|\leqslant h\\(x_k,t_k),(y_k,s_k)\in V_k}} \left(\mathbb{E}\left|\sum_{l=1}^{\infty}\left(A_l\sin(l\gamma(x_k))\cos lt_k + \frac{B_l}{l}\sin(l\gamma(x_k))\cos lt_k\right) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \sum_{l=1}^{\infty}\left(A_l\sin(l\gamma(y_k))\cos ls_k + \frac{B_l}{l}\sin(l\gamma(y_k))\cos ls_k\right)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{\substack{|x_k-y_k|\leqslant h\\|t_k-s_k|\leqslant h\\(x_k,t_k),(y_k,s_k)\in V_k}} \sum_{l=1}^{\infty}\left[\left(\mathbb{E}A_l^2\right)^{\frac{1}{2}}\left|\sin(l\gamma(x_k))\cos lt_k - \sin(l\gamma(y_k))\cos ls_k\right| + \right.$$

$$\left.\frac{(\mathbb{E}B_l^2)^{\frac{1}{2}}}{l}\left|\sin(l\gamma(x_k))\sin lt_k - \sin(l\gamma(y_s))\sin ls_k\right|\right].$$

Розглянемо

$$\begin{gathered}|\sin(l\gamma(x_k))\cos lt_k-\sin(l\gamma(y_k))\cos ls_k|\leq\\ \leqslant|\sin(l\gamma(x_k))-\sin(l\gamma(y_k))|+|\cos lt_k-\cos ls_k|\leqslant\\ \leqslant\frac{\left(\ln\left(l+e^{\delta}\right)\right)^{\delta}}{\left(\ln\left(\frac{1}{c_0|x_k-y_k|}+e^{\delta}\right)\right)^{\delta}}+\frac{\left(\ln\left(l+e^{\delta}\right)\right)^{\delta}}{\left(\ln\left(\frac{1}{|t_k-s_k|}+e^{\delta}\right)\right)^{\delta}}\leqslant\\ \leqslant 2\frac{\left(\ln\left(l+e^{\delta}\right)\right)^{\delta}}{\left(\ln\left(\frac{1}{|h|}+e^{\delta}\right)\right)^{\delta}}.\end{gathered}$$

Аналогічно

$$|\sin(l\gamma(x_k))\sin lt_k-\sin(l\gamma(y_s))\sin ls_k|\leqslant 2\frac{\left(\ln\left(l+e^{\delta}\right)\right)^{\delta}}{\left(\ln\left(\frac{1}{|h|}+e^{\delta}\right)\right)^{\delta}}.$$

Отже,

$$\sup_{\substack{|x_k-y_k|\leqslant h\\ |t_k-s_k|\leqslant h\\ (x_k,t_k),(y_k,s_k)\in V_k}}\tau_{\varphi}\left(u\left(x,t\right)-u\left(x_1,t_1\right)\right)\leqslant\frac{\widetilde{C}}{\left(\ln\left(\frac{1}{|h|}+e^{\delta}\right)\right)^{\delta}},$$

де

$$\widetilde{C}=2\sum_{l=1}^{\infty}\left[\left(\mathbb{E}A_l^2\right)^{\frac{1}{2}}+\frac{\left(\mathbb{E}B_l^2\right)^{\frac{1}{2}}}{l}\right]\left(\ln\left(l+e^{\delta}\right)\right)^{\delta}.$$

Оскільки, $\{u(x,t),\ (x,t)\in D\}$ з імовірністю одиниця є розв'язком задачі (1)—(3), то ряд $\widetilde{C}$, згідно теореми 3.9 роботи [10], є збіжним.

Отже, умова 2) теореми 2 виконується.

Розглянемо

$$\begin{gathered}\varepsilon_k=\sup_{(x_k,t_k)\in D_k}\tau_{\varphi}\left(u(x_k,t_k)\right)=\sup_{(x_k,t_k)\in V_k}\left(\mathbb{E}\left|u(x_k,t_k)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}=\\ \sup_{(x_k,t_k)\in V_k}\left(\mathbb{E}\left|\sum_{l=1}^{\infty}\left(A_l\sin(l\gamma(x_k))\cos lt_k+\frac{B_l}{l}\sin(l\gamma(x_k))\cos lt_k\right)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant\\ \leq\sum_{k=n}^{\infty}\sum_{l=n}^{\infty}\left[|\mathbb{E}A_kA_l|+\frac{|\mathbb{E}B_kB_l|}{kl}+\frac{|\mathbb{E}A_kB_l|}{l}\right]^{\frac{1}{2}}.\end{gathered}$$

Оскільки, $\{u(x,t),\ (x,t)\in D\}$ з імовірністю одиниця є розв'язком задачі (1)—(3), то останній ряд, згідно теореми 3.9 роботи [10], є збіжним. Тому

$$\varepsilon_k\leqslant\varepsilon_0=const.$$

Отже, умови 4) теореми 2 можна переписати у вигляді

$$\sup_k\frac{1}{c_k}<\infty,\quad\sup_k\frac{\ln\left(\frac{l}{2}\cdot\frac{b_{k+1}-b_k}{2}\right)^{\frac{1}{q}}}{c_k}<\infty.$$

Тому дана теорема випливає з теореми 2.

Приклад 2. *Нехай* $b_0 = 0$, $b_k = e^k$, $k \geq 1$, $c(t) = B(\ln t)^{\frac{1}{q}+\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$, $B = const$. *Покажемо, що функція* $c(t) = B(\ln t)^{\frac{1}{q}+\varepsilon}$ *задовольняє умовам теореми* 3. *Розглянемо ряд*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \exp\left\{-\frac{1}{q}\left(\frac{sc_k(1-\theta)}{2\tilde{\varepsilon}_0}\right)^q\right\}.$$

$$c_k = \min_{t\in[b_k,b_{k+1}]} c(t) = \min_{t\in[e^k,e^{k+1}]} B(\ln t)^{\frac{1}{q}+\varepsilon} = B(\ln e^k)^{\frac{1}{q}+\varepsilon} = B(k)^{\frac{1}{q}+\varepsilon}.$$

Тоді

$$\exp\left\{-\frac{1}{q}\left(\frac{sc_k(1-\theta)}{2\tilde{\varepsilon}_0}\right)^q\right\} = \exp\left\{-\frac{1}{q}\left(\frac{sBk^{\frac{1}{q}+\varepsilon}(1-\theta)}{2\tilde{\varepsilon}_0}\right)^q\right\} =$$

$$= \exp\left\{-\widetilde{B}k^{1+\varepsilon q}\right\},$$

де $\widetilde{B} = -\frac{1}{q}\left(\frac{sB(1-\theta)}{2\tilde{\varepsilon}_0}\right)^q$. *Ряд* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \exp\left\{-\widetilde{B}k^{1+\varepsilon q}\right\}$ *є збіжним.*

Перевіримо виконання умов 3) теореми 3.

$$\sup_k \frac{1}{c_k} = \sup_k \frac{1}{B(k)^{\frac{1}{q}+\varepsilon}} < \infty,$$

$$\sup_k \frac{\ln\left(\frac{l}{2}\cdot\frac{b_{k+1}-b_k}{2}\right)^{\frac{1}{q}}}{c_k} = \sup_k \frac{\ln\left(\frac{l}{2}\cdot\frac{e^{k+1}-e^k}{2}\right)^{\frac{1}{q}}}{B(k)^{\frac{1}{q}+\varepsilon}} =$$

$$= \frac{1}{qB}\sup_k\left[\frac{\ln\frac{l}{2}}{(k)^{\frac{1}{q}+\varepsilon}} + \frac{\ln\frac{e^k(e-1)}{2}}{(k)^{\frac{1}{q}+\varepsilon}}\right] =$$

$$= \frac{1}{qB}\sup_k\left[\frac{\ln\frac{l}{2}}{(k)^{\frac{1}{q}+\varepsilon}} + \frac{1}{k^{\frac{1}{q}+\varepsilon-1}} + \frac{\ln\frac{(e-1)}{2}}{(k)^{\frac{1}{q}+\varepsilon}}\right] < \infty.$$

Отже, функція $c(t) = B(\ln t)^{\frac{1}{q}+\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$, $B = const$ *задовольняє умовам теореми* 3.

Список використаної літератури

1. *Buldygin V. V., Kozachenko Yu. V.* Metric Characterization of Random Variables and Random processes. American Mathematical Society, Providence, Rhode. – 2000.
2. *Fernique X.* Regularite le fonctions aleatoires non gaussiennes// Lecture Notes in Mathematics. – 1983. – Vol. 976. – P. 1–74.
3. *Kozachenko Yu. V., Slyvka-Tylyshchak A. I.* On the increase rate of random fields from space on unbounded domains// Statistics, optimization and information computing. – June 2014. – Vol. 2. – P. 79–92.
4. *Kono N.* Sample path properties of stochastic processes// J. Math. Kyoto Univ. – 1980. – 20, № 2. – P. 295–313.
5. *Pisier G.* Conditions d'entropie assurant la continuite de certains processus et applications a l'analyze harmonique// Semin. Anal. Fonct. – 1979 – 1980. – № 13-14. – 43p.
6. *Pisier G.* Some applications of the metric entropy condition to harmonic analysis// Lect. Notes Math. – 1983. – 995. – P. 123–154.

7. *Piterbarg V. I.* Asymptotic methods in the theory of Gaussian processes and fields, 2012, – 207p.
8. *Василик О. І., Козаченко Ю. В., Ямненко Р. Є.* φ-субгауссові випадкові процеси. Монографія. «Київський університет» 2008 – 231 с.
9. *Дарійчук І. В.,Козаченко Ю. В.,Перестюк М. М.* Випадкові процеси з просторів Орліча – Чернівці: Видавництво «Золоті литаври», 2011. – 212 с.
10. *Довгай Б. В.,Козаченко Ю. В., Сливка-Тилищак Г. І.* Крайові задачі математичної фізики з випадковими факторами. Монографія. К.: Видавничо-поліграфічний центр «Київський університет», 2008. – 175 с.
11. *Козаченко Ю. В., Ковальчук Ю. А.* Краевые задачи со случайными начальными условиями и функциональные ряды из $sub_{\varphi}(\Omega)$. I// Укр. мат. журнал. – 1998 . – т. 50, №4. – С. 504–515.
12. *Положий Г. Н.* Уравнения математической физики. – М.: Высшая школа, 1964.

Одержано 15.03.2017