

УДК 512.53

В. М. Бондаренко, Я. В. Заціха (Інститут математики НАН України)

**ПРО КОМБІНАТОРНІ ВЛАСТИВОСТІ НАПІВГРУП
ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКУ**

In this paper we study combinatorial semigroups of order 4 (up to isomorphism and duality, their number is 126).

У цій роботі вивчаються комбінаторні властивості напівгруп порядку 4 (з точністю до ізоморфізму та дуальності, їх число дорівнює 126).

Групам малих порядків присвячено багато робіт і вони досить добре вивчені (див., напр., [1]). Напівгрупи малих порядків вивчені не в такій мірі і це пов'язано з тим, що число напівгруп конкретного порядку набагато більше, ніж груп (наприклад, число напівгруп порядків 5, 6, 7 дорівнює відповідно 1160, 15973, 836021). Більшість задач про повний опис напівгруп фіксованого порядку отримано з використанням комп'ютерних програм. Зауважимо, що під описом традиційно мається на увазі опис з точністю до ізоморфізму та дуальності. Напівгрупи, що розглядаються з такою точністю, називаються різними.

Напівгрупи порядку $n < 4$ вивчені досить детально. Випадки $n = 1, 2$ тривіальні (число різних напівгруп відповідно 1 і 4). Напівгрупи порядку $n = 3$ описав Т. Тамура, у вигляді таблиць Келі, ще в 1953 р. (див. роботу [2]). Вони вивчалися, зокрема, в [3] – [5].

Напівгрупи порядку 4 описав Т. Тамура в 1954 р. (див. [6]), а в 1955 р. – Г. Е. Форсайт (див. [7]); друга робота виконана за допомогою комп'ютерної програми. Вкажемо таблиці Келі всіх таких (попарно різних) напівгруп, число яких дорівнює 126; елементи кожної напівгрупи позначені числами 0, 1, 2, 3.

1 – 5	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0
	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0
	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0
	0 0 0 0	0 0 0 1	0 0 0 3	0 0 1 0	0 0 1 1
6 – 10	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0
	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0
	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 1
	0 0 2 3	0 1 1 3	0 1 2 3	3 3 3 3	0 0 1 0
11 – 15	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0
	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0
	0 0 0 1	0 0 0 1	0 0 0 2	0 0 0 2	0 0 0 2
	0 0 1 1	0 0 1 2	0 0 2 3	0 1 0 3	0 1 2 3
16 – 20	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0
	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0
	0 0 1 0	0 0 1 0	0 0 1 0	0 0 1 0	0 0 1 1
	0 0 0 1	0 0 0 3	0 0 1 1	3 3 3 3	0 0 1 1
21 – 25	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0
	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0
	0 0 2 0	0 0 2 0	0 0 2 0	0 0 2 2	0 0 2 2
	0 0 0 3	0 1 0 3	3 3 3 3	0 0 2 2	0 0 2 3

26 – 30	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0
	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0
	0 0 2 2	0 0 2 2	0 0 2 3	0 0 2 3	0 1 2 0
	0 0 3 3	0 1 2 3	0 0 3 2	3 3 3 3	3 3 3 3
31 – 35	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0
	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0
	0 1 2 2	0 1 2 2	0 1 2 2	0 1 2 3	0 1 2 3
	0 1 2 2	0 1 2 3	0 1 3 3	0 1 2 3	0 1 3 2
36 – 40	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0
	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 1
	0 1 2 3	2 2 2 2	2 2 2 2	2 2 2 2	0 0 0 1
	3 3 3 3	2 2 2 2	2 2 2 3	3 3 3 3	0 1 1 3
41 – 45	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0
	0 0 0 1	0 0 0 1	0 0 0 1	0 0 0 1	0 0 0 1
	0 0 0 1	0 0 0 2	0 0 1 2	0 0 2 0	0 0 2 2
	0 1 2 3	0 1 2 3	0 1 2 3	0 1 0 3	0 1 2 3
46 – 50	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0
	0 0 0 1	0 0 0 1	0 0 0 1	0 0 0 1	0 0 0 1
	0 1 2 0	0 1 2 1	0 1 2 2	2 2 2 2	2 2 2 2
	0 0 0 3	0 0 0 3	0 1 2 3	0 0 0 3	0 0 2 3
51 – 55	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0
	0 0 0 1	0 0 0 1	0 0 0 1	0 0 0 2	0 0 1 1
	2 2 2 2	2 2 2 2	2 2 2 2	2 2 2 2	0 1 2 2
	0 1 0 3	0 1 2 3	2 2 2 3	3 3 3 3	0 1 2 2
56 – 60	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0
	0 0 1 1	0 0 1 1	0 0 1 1	0 1 0 0	0 1 0 0
	0 1 2 2	0 1 2 2	0 1 2 3	0 0 2 0	0 0 2 0
	0 1 2 3	0 1 3 3	0 1 3 2	0 0 0 3	3 3 3 3
61 – 65	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0
	0 1 0 0	0 1 0 0	0 1 0 0	0 1 0 0	0 1 0 0
	0 0 2 2	0 0 2 2	0 0 2 2	0 0 2 3	0 0 2 3
	0 0 2 2	0 0 2 3	0 0 3 3	0 0 3 2	3 3 3 3
66 – 70	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0
	0 1 0 0	0 1 0 0	0 1 0 1	0 1 0 1	0 1 0 1
	2 2 2 2	2 2 2 2	0 0 2 2	2 2 2 2	2 2 2 2
	2 2 2 3	3 3 3 3	0 1 2 3	0 1 0 1	0 1 0 3
71 – 75	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0
	0 1 0 1	0 1 0 1	0 1 0 1	0 1 0 3	0 1 0 3
	2 2 2 2	2 2 2 2	2 2 2 2	2 2 2 2	2 2 2 2
	0 1 2 3	0 3 0 3	2 3 2 3	0 1 0 3	0 3 0 1
76 – 80	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0
	0 1 0 3	0 1 1 1	0 1 1 1	0 1 1 1	0 1 1 1
	2 2 2 2	0 1 1 1	0 1 1 1	0 1 1 1	0 1 1 1
	3 3 3 3	0 1 1 1	0 1 1 2	0 1 1 3	0 1 2 3
81 – 85	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0
	0 1 1 1	0 1 1 1	0 1 1 1	0 1 1 1	0 1 1 1
	0 1 1 1	0 1 1 2	0 1 2 1	0 1 2 1	0 1 2 2
	0 3 3 3	0 1 2 3	0 1 1 3	0 3 3 3	0 1 2 2

86 – 90	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0
	0 1 1 1	0 1 1 1	0 1 1 1	0 1 1 1	0 1 1 1
	0 1 2 2	0 1 2 2	0 1 2 3	0 1 2 3	0 2 2 2
	0 1 2 3	0 1 3 3	0 1 3 2	0 3 3 3	0 3 3 3
91 – 95	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0
	0 1 1 3	0 1 1 3	0 1 1 3	0 1 1 3	0 1 1 3
	0 1 1 3	0 1 1 3	0 1 2 3	0 1 2 3	0 2 2 3
	0 3 3 1	3 3 3 3	0 3 3 1	3 3 3 3	3 3 3 3
96 – 100	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0
	0 1 2 2	0 1 2 3	0 1 2 3	0 1 2 3	0 1 2 3
	0 2 1 1	0 1 2 3	0 2 1 3	0 2 3 1	2 2 2 2
	0 2 1 1	3 3 3 3	3 3 3 3	0 3 1 2	2 3 0 1
101 – 105	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 3	0 0 0 3	0 0 0 3
	0 1 2 3	1 1 1 1	0 0 0 3	0 0 0 3	0 0 0 3
	2 2 2 2	2 2 2 2	0 0 0 3	0 0 1 3	0 0 2 3
	3 3 3 3	3 3 3 3	3 3 3 0	3 3 3 0	3 3 3 0
106 – 110	0 0 0 3	0 0 0 3	0 0 0 3	0 0 0 3	0 0 0 3
	0 0 0 3	0 0 1 3	0 1 0 3	0 1 1 3	0 1 1 3
	0 1 2 3	0 1 2 3	0 0 2 3	0 1 1 3	0 1 2 3
	3 3 3 0	3 3 3 0	3 3 3 0	3 3 3 0	3 3 3 0
111 – 115	0 0 0 3	0 0 0 3	0 0 2 2	0 0 2 2	0 0 2 2
	0 1 1 3	0 1 2 3	0 0 2 2	0 0 2 2	0 1 2 2
	0 2 2 3	0 2 1 3	2 2 0 0	2 2 0 0	2 2 0 0
	3 3 3 0	3 3 3 0	2 2 0 0	2 2 0 1	2 2 0 0
116 – 120	0 0 2 2	0 0 2 2	0 0 2 2	0 0 2 2	0 0 2 2
	0 1 2 2	0 1 2 3	0 1 2 3	1 1 3 3	1 1 3 3
	2 2 0 0	2 2 0 0	2 2 0 0	0 0 2 2	2 2 0 0
	2 3 0 0	2 3 0 0	2 3 0 1	1 1 3 3	3 3 1 1
121 – 125	0 0 2 3	0 0 2 3	0 1 1 1	0 1 1 3	0 1 2 3
	0 0 2 3	0 1 2 3	1 0 0 0	1 3 3 0	1 0 3 2
	2 2 3 0	2 2 3 0	1 0 0 0	1 3 3 0	2 3 0 1
	3 3 0 2	3 3 0 2	1 0 0 0	3 0 0 1	3 2 1 0
126	0 1 2 3				
	1 0 3 2				
	2 3 1 0				
	3 2 0 1				

Метою цієї статті є опис для всіх напівгруп 4-го порядку основних числових характеристик. Ми розглядаємо наступні властивості напівгруп.

- C : комутативність;
- NC : некомутативність;
- $P(1)$: існування одиничного елемента;
- $P(0)$: існування нульового елемента;
- $P^+(1)$: існування приєднаного одиничного елемента;
- $P^+(0)$: існування приєднаного нульового елемента;
- n_{id} : число ідемпотентів;
- n_{gen} : найменше число твірних;
- $ns(m)$: число напівгруп порядку m .

Сформулюємо основний результат цієї статті, який описує вказані властивості для всіх напівгруп 4-го порядку.

Теорема. *Напівгрупи 1–126 мають наступні властивості:*

№	C	NC	P(1)	P(0)	$P^+(1)$	$P^+(0)$	n_{id}	n_{gen}	ns(1)	ns(2)	ns(3)
1	+	-	-	+	-	-	1	3	1	3	3
2	+	-	-	+	-	-	1	2	1	2	2
3	+	-	-	+	-	-	2	3	2	3	3
4	-	+	-	+	-	-	1	2	1	3	2
5	-	+	-	+	-	-	1	2	1	2	2
6	-	+	-	+	-	-	2	3	2	3	3
7	-	+	-	+	-	-	2	2	2	3	2
8	-	+	-	+	-	-	2	3	2	3	3
9	-	+	-	-	-	-	2	3	2	3	3
10	+	-	-	+	-	-	1	2	1	3	2
11	+	-	-	+	-	-	1	2	1	2	2
12	+	-	-	+	-	-	1	1	1	2	1
13	+	-	-	+	-	-	2	3	2	3	3
14	-	+	-	+	-	-	2	3	2	3	3
15	-	+	-	+	-	-	2	3	2	3	3
16	+	-	-	+	-	-	1	2	1	1	2
17	+	-	-	+	-	-	2	2	2	2	2
18	-	+	-	+	-	-	1	2	1	1	2
19	-	+	-	-	-	-	2	2	2	2	2
20	+	-	-	+	-	-	1	2	1	1	2
21	+	-	-	+	-	-	3	3	3	3	3
22	-	+	-	+	-	-	3	3	3	3	3
23	-	+	-	-	-	-	3	3	3	3	3
24	+	-	-	+	-	-	2	2	2	3	2
25	+	-	-	+	-	-	3	3	3	4	3
26	-	+	-	+	-	-	3	3	3	4	3
27	-	+	-	+	-	-	3	3	3	4	3
28	+	-	-	+	-	-	2	2	2	3	2
29	-	+	-	-	-	-	3	3	3	4	3
30	-	+	-	-	-	-	3	3	3	3	3
31	-	+	-	+	-	-	2	2	2	3	2
32	-	+	-	+	-	-	3	3	3	4	3
33	-	+	-	+	-	-	3	3	3	4	3
34	-	+	-	+	-	-	3	3	3	4	3
35	-	+	-	+	-	-	2	2	2	3	2
36	-	+	-	-	-	-	3	3	3	4	3
37	-	+	-	-	-	-	2	2	2	3	2
38	-	+	-	-	-	-	3	2	3	3	2
39	-	+	-	-	-	-	3	3	3	4	3
40	+	-	-	+	-	-	2	2	2	3	2

№	C	NC	P(1)	P(0)	$P^+(1)$	$P^+(0)$	n_{id}	n_{gen}	ns(1)	ns(2)	ns(3)
41	-	+	-	+	-	-	2	2	2	3	2
42	+	-	+	+	+	-	2	3	2	3	3
43	+	-	+	+	+	-	2	2	2	2	2
44	+	-	-	+	-	-	3	3	3	3	3
45	+	-	+	+	+	-	3	3	3	4	3
46	-	+	-	+	-	-	3	3	3	3	3
47	-	+	-	+	-	-	3	2	3	3	2
48	-	+	+	+	+	-	3	3	3	4	3
49	-	+	-	-	-	-	3	3	3	3	3
50	-	+	-	-	-	-	3	3	3	4	3
51	-	+	-	-	-	-	3	3	3	3	3
52	-	+	+	-	+	-	3	3	3	4	3
53	-	+	-	-	-	-	3	2	3	3	2
54	-	+	-	-	-	-	3	2	3	4	2
55	+	-	-	+	-	-	2	2	2	3	2
56	+	-	+	+	+	-	3	3	3	4	3
57	-	+	-	+	-	-	3	3	3	4	3
58	+	-	+	+	-	-	2	2	2	3	2
59	+	-	-	+	-	-	4	3	4	3	3
60	-	+	-	-	-	-	4	3	4	3	3
61	+	-	-	+	-	-	3	3	3	3	2
62	+	-	-	+	-	-	4	3	4	4	3
63	-	+	-	+	-	-	4	3	4	4	3
64	+	-	-	+	-	-	3	2	3	3	2
65	-	+	-	-	-	-	4	3	4	4	3
66	-	+	-	-	-	-	4	2	4	3	2
67	-	+	-	-	-	-	4	3	4	4	3
68	+	-	+	+	+	-	4	3	4	5	3
69	-	+	-	-	-	-	3	2	3	3	2
70	-	+	-	-	-	-	4	3	4	4	3
71	-	+	+	-	+	-	4	3	4	5	3
72	-	+	-	-	-	-	4	3	4	4	3
73	-	+	-	-	-	-	4	3	4	4	2
74	-	+	-	-	-	-	4	3	4	4	3
75	-	+	-	-	-	-	3	3	3	3	2
76	-	+	-	-	-	-	4	3	4	5	3
77	+	-	-	+	-	+	2	3	2	3	3
78	+	-	-	+	-	+	2	2	2	2	2
79	+	-	-	+	-	+	3	3	3	4	3
80	-	+	-	+	-	+	3	3	3	4	3
81	-	+	-	+	-	+	3	3	3	4	3
82	+	-	+	+	+	+	3	3	3	4	3
83	+	-	-	+	-	+	4	3	4	5	3
84	-	+	-	+	-	+	4	3	4	5	3

№	C	NC	P(1)	P(0)	$P^+(1)$	$P^+(0)$	n_{id}	n_{gen}	ns(1)	ns(2)	ns(3)
85	+	-	-	+	-	+	3	3	3	4	3
86	+	-	+	+	+	+	4	4	4	6	4
87	-	+	-	+	-	+	4	4	4	6	4
88	+	-	+	+	-	+	3	3	3	4	3
89	-	+	+	+	+	+	4	4	4	6	4
90	-	+	-	+	-	+	4	4	4	6	4
91	+	-	-	+	-	+	2	3	2	3	3
92	-	+	-	-	-	-	3	3	3	4	3
93	+	-	+	+	+	+	3	3	3	4	3
94	-	+	+	-	+	-	4	4	4	6	4
95	-	+	-	-	-	-	4	4	4	6	4
96	+	-	-	+	-	+	2	2	2	2	2
97	-	+	-	-	-	-	4	4	4	6	4
98	-	+	+	-	-	-	3	3	3	4	3
99	+	-	+	+	-	+	2	2	2	1	1
100	-	+	+	-	-	-	3	2	3	4	1
101	-	+	+	-	+	-	4	4	4	6	4
102	-	+	-	-	-	-	4	4	4	6	4
103	+	-	-	-	-	-	1	3	1	3	3
104	+	-	-	-	-	-	1	2	1	2	2
105	+	-	-	-	-	-	2	3	2	3	3
106	-	+	-	-	-	-	2	3	2	3	3
107	+	-	+	-	+	-	2	3	2	3	3
108	+	-	-	-	-	-	3	3	3	3	3
109	+	-	-	-	-	-	2	2	2	3	2
110	+	-	+	-	+	-	3	3	3	4	3
111	-	+	-	-	-	-	3	3	3	4	3
112	+	-	+	-	-	-	2	2	2	3	2
113	+	-	-	-	-	-	1	2	1	2	2
114	+	-	-	-	-	-	1	1	1	2	1
115	+	-	-	-	-	-	2	2	2	2	2
116	-	+	-	-	-	-	2	2	2	2	2
117	+	-	+	-	+	-	2	2	2	2	2
118	+	-	+	-	-	-	2	2	2	3	1
119	-	+	-	-	-	-	4	2	4	4	0
120	-	+	-	-	-	-	2	2	2	3	0
121	+	-	-	-	-	-	1	2	1	1	1
122	+	-	+	-	+	-	2	2	2	1	1
123	+	-	-	-	-	-	1	2	1	1	2
124	+	-	-	-	-	-	1	1	1	0	1
125	+	-	+	-	-	-	1	2	1	3	0
126	+	-	+	-	-	-	1	1	1	1	0

Доведення теореми проводиться комбінаторним методом: для кожної напівгрупи описуються всі її піднапівгрупи, породжені одним, двома та трьома елементами, з послідовним аналізом отриманих даних.

Список використаної літератури

1. Холл М. Теория групп. М.: Иностр. лит., 1962. – 468 с.
2. Tamura T. Some remarks on semi-groups and all types of semi-groups of order 2, 3 // J. Gakugei Tokushima Univ. – 1953. – **3**, – P. 1–11
3. Бондаренко В. М., Заціха Я. В. Про визначальні співвідношення для мінімальних систем твірних напівгруп третього порядку // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова (Серія 1. Фізико-математичні науки). – 2013. – №14. – С. 62–67.
4. Chotchaisthit S. Simple proofs determining all nonisomorphic semigroups of order 3 // Appl. Math. Sci. (Ruse). – 2014. – **8**. – P. 1261–1269.
5. Bondarenko V. M., Zaciha Ya. V. On characteristic properties of semigroups // Algebra Discrete Math. – 2015 – **20**, no. 1. – P. 32–39.
6. Tamura T. Notes on finite semigroups and determination of semigroups of order 4 // J. Gakugei Tokushima Univ. – 1954. – **5**, – P. 17–27.
7. Forsythe G. E. SWAC computes 126 distinct semigroups of order 4 // Proc. Amer. Math. Soc. – 1955. – **6**. – P. 443–447.

Одержано 10.03.2017