

УДК 519.21

Т. В. Боярищева, М. В. Далекорей, М. М. Михасюк, І. Й. Поляк,
П. В. Слюсарчук (ДВНЗ «Ужгородський нац. ун-т»)

ДЕЯКІ УЗАГАЛЬНЕННЯ ОЦІНОК ЗОЛОТАРЬОВА ДЛЯ ПОСЛІДОВНОСТІ СЕРІЙ

Estimates of Zolotarev in the central limit theorem generalized for sequences series random variables.

Оцінки Золотарьова в центральній граничній теоремі узагальнюються для послідовності серій випадкових величин.

У даній роботі результати роботи [1] узагальнюються на випадок послідовності серій випадкових величин.

Нехай $\xi_{n1}, \dots, \xi_{nn}$ — послідовність серій незалежних і однаково розподілених в кожній серії випадкових величин, $F_n(x)$ — функція розподілу ξ_{ni} , $f_n(t)$ — характеристична функція ξ_{ni} , $M\xi_{ni} = 0$; $D\xi_{ni} = \frac{1}{n}$.

Позначимо: $S_n = \xi_{n1} + \dots + \xi_{nn}$, $\Phi_n(x)$ — функція розподілу S_n , $\Phi(x)$ — функція розподілу стандартного нормального закону, $\rho_n = \sup_x |\Phi_n(x) - \Phi(x)|$, $H_n(x) = F_n\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right) - \Phi(x)$.

Введемо псевдомоменти такого вигляду:

$$\varkappa_n = 3 \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 |H_n(x)| dx, \quad \varkappa_{n0} = \int_{-\infty}^{+\infty} \max(1, 3x^2) |H_n(x)| dx.$$

Теорема 1. Для всіх $n \geq 1$ справедливі нерівності:

$$\rho_n \leq C_1 \frac{\max\left\{\varkappa_{n0}, (\varkappa_{n0})^{\frac{n}{n+1}}\right\}}{\sqrt{n}}, \quad \rho_n \leq C_2 \frac{\max\left\{\varkappa_n, (\varkappa_n)^{\frac{n}{3n+1}}\right\}}{\sqrt{n}},$$

де C_1, C_2 — деякі абсолютні сталі.

Для довільного $y > 0$ позначимо

$$\nu_{n0}^{(1)}(y) = \int_{|x| \leq y} \max(1, |x|^3) |dH_n(x)|, \quad \nu_{n0}^{(2)}(y) = \int_{|x| > y} \max(1, x^2) |dH_n(x)|.$$

Теорема 2. Для всіх $n \geq 1$ справедлива нерівність

$$\rho_n \leq C_3 \inf_{y>0} \left\{ \frac{\nu_{n0}^{(1)}(y)}{\sqrt{n}} + \nu_{n0}^{(2)}(y) \right\},$$

де C_3 — абсолютна стала.

Наслідок. Для всіх $n \geq 1$

$$\rho_n \leq C_3 \frac{\nu_{n0}}{\sqrt{n}},$$

де $\nu_{n0}(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \max(1, |x|^3) |dH_n(x)|$.

Нехай $\xi_1, \dots, \xi_n, \dots$ - послідовність незалежних однаково розподілених випадкових величин з функцією розподілу $F(x)$, $M\xi_i = 0$, $D\xi_i = 1$. Якщо покладемо $\xi_{ni} = \xi_i/\sqrt{n}$, то $F_n\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right) = F(x)$. Тоді із теореми 1 і наслідку одержуємо результати роботи [1].

Для доведення теореми необхідні наступні леми.

Лема 1. *Нехай $\omega_n(t) = \left|f_n(t\sqrt{n}) - e^{-\frac{t^2}{2}}\right|$. Тоді для всіх $t \in \mathcal{R}$ мають місце наступні нерівності:*

$$\omega_n(t) \leq \varkappa_n \frac{|t|^3}{6}, \quad (1)$$

$$\omega_n(t) \leq \varkappa_{n0} \min\left(|t|, \frac{t^3}{6}\right) \leq \varkappa_{n0} \frac{t^2}{\sqrt{6}}, \quad (2)$$

$$\omega_n(t) \leq \nu_{n0}^{(1)}(y) + \nu_{n0}^{(2)}(y), \quad (3)$$

$$\omega_n(t) \leq \frac{|t|^3}{6} \nu_{n0}^{(1)}(y) + t^2 \nu_{n0}^{(2)}(y), \quad (4)$$

$$\omega_n(t) \leq \frac{1}{2} t^2 \left(\nu_{n0}^{(1)}(y) + \nu_{n0}^{(2)}(y)\right). \quad (5)$$

Доведення. Із умов $M\xi_{nk} = 0$, $D\xi_{nk} = \frac{1}{n}$, одержуємо

$$\begin{aligned} \omega_n(t) &= \left|f_n(t\sqrt{n}) - e^{-\frac{t^2}{2}}\right| = \left|\int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx\sqrt{n}} dF_n(x) - \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} d\Phi(x)\right| = \\ &= \left|\int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} d\left(F_n\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right) - \Phi(x)\right)\right| = \\ &= \left|\int_{-\infty}^{+\infty} \left(e^{itx} - 1 - it - \frac{(itx)^2}{2}\right) d\left(F_n\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right) - \Phi(x)\right)\right| = \\ &= \left|t \int_{-\infty}^{+\infty} \left(F_n\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right) - \Phi(x)\right) e^{itx} dx\right| = \\ &= \left|t \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{itx} - 1 - itx) \left(F_n\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right) - \Phi(x)\right) dx\right|. \end{aligned} \quad (6)$$

Із нерівності ([1], ст.372)

$$\left|e^{iz} - \sum_{j=0}^m \frac{(iz)^j}{j!}\right| \leq \frac{2^{1-\gamma} |z|^{m+\gamma}}{m!(m+1)^\gamma}, \quad 0 \leq \gamma \leq 1, \quad (7)$$

одержуємо

$$\omega_n(t) = \left|t \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{itx} - 1 - itx) \left(F_n\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right) - \Phi(x)\right) dx\right| \leq$$

$$\begin{aligned} &\leq |t| \int_{-\infty}^{+\infty} |e^{itx} - 1 - itx| \left| F_n \left(\frac{x}{\sqrt{n}} \right) - \Phi(x) \right| dx \leq \\ &\leq \frac{|t|^3}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \left| F_n \left(\frac{x}{\sqrt{n}} \right) - \Phi(x) \right| dx = \frac{|t|^3}{6} \varkappa_n. \end{aligned}$$

Отже, нерівність (1) леми 1 доведена. За щойно доведеною нерівністю маємо:

$$\begin{aligned} \omega_n(t) &\leq \frac{|t|^3}{6} \int_{-\infty}^{+\infty} 3x^2 \left| F_n \left(\frac{x}{\sqrt{n}} \right) - \Phi(x) \right| dx \leq \\ &\leq \frac{|t|^3}{6} \int_{-\infty}^{+\infty} \max(1, 3x^2) \left| F_n \left(\frac{x}{\sqrt{n}} \right) - \Phi(x) \right| dx = \frac{|t|^3}{6} \varkappa_{n0}. \end{aligned}$$

Із рівності (6)

$$\begin{aligned} \omega_n(t) &= \left| t \int_{-\infty}^{+\infty} \left(F_n \left(\frac{x}{\sqrt{n}} \right) - \Phi(x) \right) e^{itx} dx \right| \leq |t| \int_{-\infty}^{+\infty} \left| F_n \left(\frac{x}{\sqrt{n}} \right) - \Phi(x) \right| dx \leq \\ &\leq |t| \int_{-\infty}^{+\infty} \max(1, 3x^2) \left| F_n \left(\frac{x}{\sqrt{n}} \right) - \Phi(x) \right| dx = |t| \varkappa_{n0}. \end{aligned}$$

Оскільки, $\omega_n(t) \leq |t| \varkappa_{n0}$ і $\omega_n(t) \leq \frac{|t|^3}{6} \varkappa_{n0}$, то

$$\omega_n(t) \leq \min \left(\frac{|t|^3}{6} \varkappa_{n0}, |t| \varkappa_{n0} \right) = \varkappa_{n0} \min \left(\frac{|t|^3}{6}, |t| \right).$$

Перша частина нерівності (2) леми 1 доведена.

Нехай $\min \left(|t|, \frac{|t|^3}{6} \right) = |t|$, тоді $|t| \leq \frac{|t|^3}{6}$, $1 \leq \frac{t^2}{6}$, $\frac{|t|}{\sqrt{6}} \geq 1$. Тому

$$\min \left(|t|, \frac{|t|^3}{6} \right) = |t| \leq |t| \frac{|t|}{\sqrt{6}} = \frac{t^2}{\sqrt{6}}.$$

Якщо ж $\min \left(|t|, \frac{|t|^3}{6} \right) = \frac{|t|^3}{6}$, то $\frac{|t|}{\sqrt{6}} \leq 1$, тому

$$\min \left(|t|, \frac{|t|^3}{6} \right) = \frac{|t|^3}{6} = \frac{t^2}{\sqrt{6}} \frac{|t|}{\sqrt{6}} \leq \frac{t^2}{\sqrt{6}}.$$

Нерівність (2) доведена.

$$\omega_n(t) = \left| f_n(t\sqrt{n}) - e^{-\frac{t^2}{2}} \right| = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} d \left(F_n \left(\frac{x}{\sqrt{n}} \right) - \Phi(x) \right).$$

Із (6) і (7) для довільного $y > 0$

$$\begin{aligned} \omega_n(t) &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} \left| d \left(F_n \left(\frac{x}{\sqrt{n}} \right) - \Phi(x) \right) \right| \leq \\ &\leq \int_{|x| \leq y} \max(1, |x|^3) \left| d \left(F_n \left(\frac{x}{\sqrt{n}} \right) - \Phi(x) \right) \right| + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{|x|>y} \max(1, x^2) \left| d\left(F_n\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right) - \Phi(x)\right) \right| = \nu_{n0}^{(1)}(y) + \nu_{n0}^{(2)}(y), \\
\omega_n(t) & = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \left(e^{itx} - 1 - it - \frac{(itx)^2}{2} \right) d\left(F_n\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right) - \Phi(x)\right) \right| \leq \\
& \leq \int_{|x|\leq y} \left| \left(e^{itx} - 1 - it - \frac{(itx)^2}{2} \right) \right| \left| d\left(F_n\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right) - \Phi(x)\right) \right| + \\
& + \int_{|x|>y} \left| \left(e^{itx} - 1 - it - \frac{(itx)^2}{2} \right) \right| \left| d\left(F_n\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right) - \Phi(x)\right) \right| \leq \\
& \leq \frac{|t|^3}{6} \int_{|x|\leq y} |x|^3 \left| d\left(F_n\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right) - \Phi(x)\right) \right| + t^2 \int_{|x|>y} x^2 \left| d\left(F_n\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right) - \Phi(x)\right) \right| \leq \\
& \leq \frac{|t|^3}{6} \nu_{n0}^{(1)}(y) + t^2 \nu_{n0}^{(2)}(y).
\end{aligned}$$

Крім того,

$$\begin{aligned}
\omega_n(t) & = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{itx} - 1 - it) d\left(F_n\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right) - \Phi(x)\right) \right| \leq \\
\omega_n(t) & \leq \frac{1}{2} t^2 \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \left| d\left(F_n\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right) - \Phi(x)\right) \right| \leq \frac{1}{2} t^2 (\nu_{n0}^{(1)}(y) + \nu_{n0}^{(2)}(y)).
\end{aligned}$$

Лема 1 доведена.

Лема 2.1 Нехай $c \in (0, 2^{-1})$. Якщо $\kappa_{n0} \leq c$ і $|t| \leq T_{11} = \sqrt{-2 \ln \kappa_{n0}}$, то

$$|f_n(t\sqrt{n})| \leq e^{-c_{11}t^2}, \quad (8)$$

де $c_{11} = \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{6}} > 0$,

а якщо $\kappa_{n0} \leq c$ і $|t| > T_{11}$, то

$$|f_n(t\sqrt{n})| \leq 2\kappa_{n0}|t|. \quad (9)$$

Якщо ж $\kappa_{n0} > c$, то при $|t| \leq T_{12} = \frac{c}{\kappa_{n0}}$,

$$|f_n(t\sqrt{n})| \leq e^{-c_{12}t^2}, \quad (10)$$

де $c_{12} = \frac{1}{2} - \frac{1}{6}c\sqrt{e} > 0$.

Доведення. Будемо використовувати нерівність

$$|f_n(t\sqrt{n})| = \left| f_n(t\sqrt{n}) - e^{-\frac{t^2}{2}} + e^{-\frac{t^2}{2}} \right| \leq e^{-\frac{t^2}{2}} + \omega_n(t). \quad (11)$$

Нехай $\kappa_{n0} \leq c$ і $|t| \leq T_{11}$.

Із (11), нерівності (2) лема 1, визначення T_{11} ($e^{\frac{(T_{11})^2}{2}} = (\kappa_{n0})^{-1}$) і нерівності $1 + x \leq e^x$

$$|f_n(t\sqrt{n})| \leq e^{-\frac{t^2}{2}} + \kappa_{n0} \frac{t^2}{\sqrt{6}} = e^{-\frac{t^2}{2}} \left(1 + e^{\frac{t^2}{2}} \kappa_{n0} \frac{t^2}{\sqrt{6}} \right) \leq$$

$$\leq e^{-\frac{t^2}{2}} \left(1 + e^{\frac{(T_{11})^2}{2}} \varkappa_{n0} \frac{t^2}{\sqrt{6}} \right) = e^{-\frac{t^2}{2}} \left(1 + \frac{t^2}{\sqrt{6}} \right) \leq e^{-\frac{t^2}{2}} e^{\frac{t^2}{6}} = e^{-t^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6} \right)}.$$

Нехай $\varkappa_{n0} \leq c, |t| > T_{11}$.

$$|f_n(t\sqrt{n})| \leq e^{-\frac{t^2}{2}} + \omega_n(t) \leq e^{-\frac{(T_{11})^2}{2}} + \varkappa_{n0} |t|.$$

Оскільки, $e^{-\frac{(T_{11})^2}{2}} = \varkappa_{n0}$, $\varkappa_{n0} \leq c < 2^{-1}$, а

$$T_{11} = \sqrt{-2\ln\varkappa_{n0}} \geq \sqrt{-2\ln c} > \sqrt{-2\ln 2^{-1}} = \sqrt{\ln 4} > 1,$$

то ми отримаємо наступне:

$$|f_n(t\sqrt{n})| \leq \varkappa_{n0} (1 + |t|) \leq 2\varkappa_{n0} |t|.$$

Розглянемо наступний випадок: $\varkappa_{n0} > c, |t| \leq T_{21}$, де $T_{21} = \frac{c}{\varkappa_{n0}}$.

За умовою $T_{12} < 1$. Із (11) і (2)

$$\begin{aligned} |f_n(t\sqrt{n})| &\leq e^{-\frac{t^2}{2}} \left(1 + e^{\frac{t^2}{2}} \omega_n(t) \right) \leq e^{-\frac{t^2}{2}} \left(1 + e^{\frac{t^2}{2}} \varkappa_{n0} \frac{|t|^3}{6} \right) \leq \\ &\leq e^{-\frac{t^2}{2}} \left(1 + e^{\frac{(T_{12})^2}{2}} \varkappa_{n0} T_{12} \frac{t^2}{6} \right) \leq e^{-\frac{t^2}{2}} \left(1 + \sqrt{e} \varkappa_{n0} \frac{c}{\varkappa_{n0}} \frac{t^2}{\sqrt{6}} \right) \leq e^{-\frac{t^2}{2}} e^{\frac{t^2 c \sqrt{e}}{6}} = \\ &= e^{-t^2 c_{12}}. \end{aligned}$$

Лема 2 доведена.

Лема 2.2. Нехай $c \in (0, e^{-1})$.

Якщо $\varkappa_n \leq c$ і $|t| \leq T_{21} = \sqrt{-2\ln\varkappa_n}$, то

$$|f_n(t\sqrt{n})| \leq e^{-t^2 c_{21}}, \quad (12)$$

де $c_{21} = \frac{1}{4} - \frac{1}{6} \sqrt{-2c \ln c} > 0$;

Якщо $\varkappa_n \leq c$ і $|t| > T_{21}$, то

$$|f_n(t\sqrt{n})| \leq \varkappa_n |t|^3 \left(\frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{6} \right). \quad (13)$$

Якщо $\varkappa_n > c$ і $|t| \leq T_{22} = \frac{c}{\varkappa_n}$, то

$$|f_n(t\sqrt{n})| \leq e^{-t^2 c_{22}}, \quad (14)$$

де $c_{22} = 1 - \frac{\sqrt{e}}{6} c$.

Доведення. Нехай $\varkappa_n \leq c$, Із (11) і нерівності (1) леми 1

$$\begin{aligned} |f_n(t\sqrt{n})| &\leq e^{-\frac{t^2}{2}} + \omega_n(t) \leq e^{-\frac{t^2}{4}} \left(e^{-\frac{t^2}{4}} + e^{\frac{t^2}{4}} \omega_n(t) \right) \leq \\ &\leq e^{-\frac{t^2}{4}} \left(1 + (\varkappa_n)^{-\frac{1}{2}} \varkappa_n \frac{t^2}{6} T_{21} \right) = e^{-\frac{t^2}{4}} \left(1 + t^2 \frac{1}{6} \sqrt{-2\varkappa_n \ln \varkappa_n} \right). \end{aligned}$$

Оскільки, $x \ln x$ спадає на $(0, e^{-1}]$, а $0 < \varkappa_n \leq c < e^{-1}$, то

$$|f_n(t\sqrt{n})| \leq e^{-\frac{t^2}{4}} \left(1 + t^2 \frac{1}{6} \sqrt{-2c \ln c}\right) \leq e^{-t^2 \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6} \sqrt{-2c \ln c}\right)} = e^{c_{21} t^2}.$$

Із умови $0 < c \leq e^{-1}$ і того, що $x \ln x$ спадає на $(0, e^{-1}]$, випливає $\sqrt{-2c \ln c} \leq \sqrt{2e^{-1}}$. Тому $c_{21} = \frac{1}{4} - \frac{1}{6} \sqrt{-2c \ln c} \geq \frac{1}{4} - \frac{1}{6} \sqrt{2e^{-1}} > 0$.

Нехай $\varkappa_n \leq c$, $|t| > T_{21}$. Оскільки $\varkappa_n \leq c \leq e^{-1}$, $\ln \varkappa_n \leq \ln c \leq -1$, то

$$T_{21} = \sqrt{-2 \ln \varkappa_n} \geq \sqrt{2}.$$

Із (11) і (1)

$$\begin{aligned} |f_n(t\sqrt{n})| &\leq e^{-\frac{t^2}{2}} + \omega_n(t) \leq e^{-\frac{t^2}{2}} + \varkappa_n \frac{|t|^3}{6} \leq e^{-\frac{(T_{21})^2}{2}} + \varkappa_n \frac{|t|^3}{6} = \\ &= \varkappa_n \left(1 + \frac{|t|^3}{6}\right) \leq \varkappa_n |t|^3 \left(\frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{6}\right). \end{aligned}$$

Нехай $\varkappa_n > c$, $|t| \leq T_{22}$, тоді із (11) і (1) леми 1 ($T_{22} < 1$)

$$\begin{aligned} |f_n(t\sqrt{n})| &\leq e^{-\frac{t^2}{2}} + \frac{|t|^3}{6} \varkappa_n = e^{-\frac{t^2}{2}} \left(1 + e^{\frac{t^2}{2}} \frac{|t|^3}{6} \varkappa_n\right) \leq \\ &\leq e^{-\frac{t^2}{2}} \left(1 + t^2 e^{\frac{(T_{22})^2}{2}} \frac{T_{22}}{6} \varkappa_n\right) \leq e^{-\frac{t^2}{2}} \left(1 + t^2 \frac{\sqrt{e}}{6} c\right) \leq e^{c_{22} t^2}. \end{aligned}$$

Лема доведена.

Лема 2.3. Нехай $c \in (0, 2^{-4})$, $\nu_{n0}^{(2)} \leq c$, $\nu_{n0}(y) = \max \left\{ \nu_{n0}^{(1)}(y); \nu_{n0}^{(2)}(y) \right\}$. Якщо $\nu_{n0}(y) \leq c$ і $|t| \leq X_1 = \sqrt{-2 \ln \nu_{n0}(y)}$, де

$$|f_n(t\sqrt{n})| \leq e^{-c_1 t^2}, \quad (15)$$

де $c_1 = \frac{1}{4} - \sqrt{c} > 0$, а при $\nu_{n0}(y) \leq c$ і $|t| > X_1$, то

$$|f_n(t\sqrt{n})| \leq 3\nu_{n0}(y), \quad (16)$$

якщо ж $\nu_{n0}(y) > c$, то при $|t| \leq X_2 = \frac{c}{\nu_{n0}^{(1)}(y)}$, то

$$|f_n(t\sqrt{n})| \leq e^{-c_2 t^2}, \quad (17)$$

де $c_2 = \frac{1}{2} - \frac{7}{6} c \sqrt{e} > 0$.

Доведення. Нехай $\nu_{n0}(y) \leq c$, $|t| \leq X_1$. Тоді із (11) і (5) леми 1

$$\begin{aligned} |f_n(t\sqrt{n})| &\leq e^{-\frac{t^2}{4}} \left(e^{-\frac{t^2}{4}} + e^{\frac{t^2}{4}} \omega_n(t) \right) \leq e^{-\frac{t^2}{4}} \left(1 + e^{\frac{t^2}{4}} \frac{t^2}{2} \left(\nu_{n0}^{(1)}(y) + \nu_{n0}^{(2)}(y) \right) \right) \leq \\ &\leq e^{-\frac{t^2}{4}} \left(1 + e^{\frac{X_1^2}{4}} t^2 \nu_{n0}(y) \right) = e^{-\frac{t^2}{4}} \left(1 + t^2 \sqrt{\nu_{n0}(y)} \right) \leq \end{aligned}$$

$$\leq e^{-\frac{t^2}{4}} (1 + t^2 \sqrt{c}) \leq e^{-c_1 t^2}.$$

Якщо $\nu_{n0}(y) \leq c$ і $|t| > X_1$, то із (11) і (3) леми 1

$$|f_n(t\sqrt{n})| \leq e^{-\frac{X_1^2}{2}} + \nu_{n0}^{(1)}(y) + \nu_{n0}^{(2)}(y) \leq 3\nu_{n0}(y).$$

У випадку $\nu_{n0}(y) > c$ із умов леми 2.3 випливає, що $\nu_{n0}^{(1)}(y) > c$. Із (4) леми 1 і (11) при $|t| \leq X_2$ ($X_2 < 1$)

$$\begin{aligned} |f_n(t\sqrt{n})| &\leq e^{-\frac{t^2}{2}} \left(1 + e^{\frac{t^2}{2}} \omega_n(t)\right) \leq \\ &\leq e^{-\frac{t^2}{2}} \left(1 + \sqrt{e} \left(\frac{|t|^3}{6} \nu_{n0}^{(1)}(y) + t^2 \nu_{n0}^{(2)}(y)\right)\right) \leq e^{-c_2 t^2}. \\ &\leq e^{-\frac{t^2}{2}} \left(1 + \sqrt{e} \left(\frac{c}{\nu_{n0}^{(1)}(y)} \frac{t^2}{6} \nu_{n0}^{(1)}(y) + t^2 c\right)\right) \leq e^{-c_2 t^2}. \end{aligned}$$

Лема доведена.

Доведення теореми 1. Використаємо нерівність ([3], ст.299):

$$\sup_x |F(x) - G(x)| \leq \frac{2}{\pi} \int_0^T |f(t) - g(t)| \frac{dt}{t} + \frac{24}{\pi T} \left| \sup_x G'(x) \right|. \quad (18)$$

Покладемо в даній нерівності

$$F(x) = \Phi_n(x); \quad G(x) = \Phi(x); \quad f(t) = (f_n(t))^n; \quad g(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

Тоді

$$\rho_n = \sup_x |\Phi_n(x) - \Phi(x)| \leq \frac{2}{\pi} \int_0^T |f_n^n(t) - e^{-\frac{t^2}{2}}| \frac{dt}{t} + \frac{24}{\pi \sqrt{2\pi T}}.$$

Зробимо заміну $t = z\sqrt{n}$ в інтегралі із правої частини нерівності, тоді

$$\rho_n \leq \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{T}{\sqrt{n}}} |f_n^n(t\sqrt{n}) - e^{-\frac{t^2}{2}n}| \frac{dt}{t} + \frac{24}{\pi \sqrt{2\pi T}}. \quad (19)$$

Використаємо рівність

$$a^n - b^n = (a - b) \sum_{k=1}^n a^{n-k} b^{k-1},$$

де покладемо $a = f_n(t\sqrt{n})$, $b = e^{-\frac{t^2}{2}}$, тоді

$$\left| f_n^n(t\sqrt{n}) - e^{-\frac{t^2}{2}n} \right| \leq \omega_n(t) \sum_{k=1}^n |f_n(t\sqrt{n})|^{n-k} \cdot e^{-\frac{t^2}{2}(k-1)}. \quad (20)$$

Із (2) леми 1 і (8), (10) леми 2.1 при $|t| \leq T_{1m}$ ($m = 1$ при $\varkappa_{n0} \leq c$ і $m = 2$ при $\varkappa_{n0} > c$)

$$\begin{aligned} \left| f_n^n(t\sqrt{n}) - e^{-\frac{t^2}{2}n} \right| &\leq \frac{|t|^3}{6} \varkappa_{n0} \sum_{k=1}^n e^{-c_{1m}t^2(n-k)} e^{-\frac{t^2}{2}(k-1)} \leq \\ &\leq \frac{|t|^3}{6} \varkappa_{n0} \cdot n e^{-c_{1m}t^2(n-1)}. \end{aligned} \quad (21)$$

Ми використали, що $c_{1m} \leq \frac{1}{2}$.

Нехай $n \geq 2$, $\varkappa_{n0} > c$. У (19) покладемо $T = T_{12}\sqrt{n}$, а в нерівності (21) $m = 2$, тоді одержимо таку оцінку:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{T_{12}} \left| f_n^n(z\sqrt{n}) - e^{-\frac{z^2}{2}n} \right| \frac{dt}{t} \leq \frac{\varkappa_{n0}n}{6} \int_0^{T_{12}} t^2 e^{-c_{12}t^2(n-1)} dt \leq \\ &\leq \varkappa_{n0} \frac{n}{12[c_{12}(n-1)]^{3/2}} \int_0^\infty z^{1/2} e^{-z} dz \leq \frac{\varkappa_{n0}}{\sqrt{n}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{6\sqrt{c_{12}^3}} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right). \end{aligned} \quad (22)$$

Тоді із (19) для $n \geq 2$ одержимо

$$\rho_n \leq \frac{\varkappa_{n0}}{\sqrt{n}} C_4,$$

$$C_4 = \frac{\sqrt{2}}{6\sqrt{\pi c_{12}^3}} + \frac{24}{\pi\sqrt{2\pi c}}.$$

Нехай $n \geq 2$, $\varkappa_{n0} \leq c$, $X = \varkappa_{n0}^{-\frac{n}{n+1}} c$, $T' = \min(T_{11}, X)$. Покладемо в (19) $T = X\sqrt{n}$. Тоді

$$\begin{aligned} I &= \int_0^X \left| f_n^n(t\sqrt{n}) - e^{-\frac{t^2}{2}n} \right| \frac{dt}{t} = \\ &= \int_0^{T'} \left| f_n^n(t\sqrt{n}) - e^{-\frac{t^2}{2}n} \right| \frac{dt}{t} + \int_{T'}^X \left| f_n^n(t\sqrt{n}) \right| \frac{dt}{t} + \int_{T'}^X e^{-\frac{t^2}{2}n} \frac{dt}{t} = I_1 + I_2 + I_3. \end{aligned} \quad (23)$$

Будемо розглядати випадок $T' = T_{11}$, бо інакше $I_2 = 0$, $I_3 = 0$ і доведення стає очевидним. Із нерівності (21), аналогічно до (22),

$$I_1 \leq \frac{\varkappa_{n0}}{\sqrt{n}} C_5, \quad (24)$$

$$\text{де } C_5 = \frac{1}{12} \sqrt{\frac{2\pi}{c_{11}^3}}.$$

Оцінимо спочатку інтеграл $I_2 = \int_{T'}^X \left| f_n^n(t\sqrt{n}) \right| \frac{dt}{t}$.

Із нерівності (2) леми 1 і нерівності (9) леми 2.1 при $n \geq 2$

$$I_2 \leq (2\varkappa_{n0})^n \int_{T_{11}}^X t^n \frac{dt}{t} \leq (2\varkappa_{n0})^n \frac{X^n}{n} =$$

$$= \frac{1}{n} (2c)^n \varkappa_{n0}^{\frac{n}{n+1}} \leq \frac{(\varkappa_{n0})^{\frac{n}{n+1}} (2c)^2}{\sqrt{n} \sqrt{2}}. \quad (25)$$

Залишилось оцінити I_3 . Враховуємо, що $T_{11} > 1$. Тоді

$$\begin{aligned} I_3 &= \int_{T_{11}}^X e^{-\frac{t^2}{2}n} \frac{dt}{t} \leq \int_{T_{11}}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}n} \frac{dt}{t} = \int_{T_{11}\sqrt{n}}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} \frac{dt}{t} \leq \\ &\leq \frac{1}{(T_{11}\sqrt{n})^2} e^{-\frac{1}{2}(T_{11}\sqrt{n})^2} \leq \frac{(\varkappa_{n0})^n}{n} \leq \frac{\varkappa_{n0}}{\sqrt{n}} \frac{c}{\sqrt{2}}. \end{aligned} \quad (26)$$

Із (19), (23)–(26) випливає справедливність першого твердження теореми у випадку $\varkappa_{n0} \leq c$, $n > 1$.

Нехай $n = 1$. Якщо $\varkappa_{n0} > c$, то $\rho_1 \leq 1 \leq \frac{\varkappa_{n0}}{c}$.

Якщо $\varkappa_{n0} \leq c$. Тоді із (2) леми 1, нерівності (19), у якій покладемо $T = X$,

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \sup |\Phi_1(x) - \Phi(x)| \leq \frac{2}{\pi} \int_0^T \left| f_1(t) - e^{-\frac{t^2}{2}} \right| \frac{dt}{t} + \frac{24}{\pi\sqrt{2\pi}T} \leq \\ &\leq \frac{2}{\pi} \int_0^X \varkappa_{10} t \frac{dt}{t} + \frac{24}{\pi\sqrt{2\pi}} \frac{(\varkappa_{10})^{\frac{1}{2}}}{c} = \frac{2}{\pi} \varkappa_{10} X + \frac{24}{\pi\sqrt{2\pi}} \frac{(\varkappa_{10})^{\frac{1}{2}}}{c} = \\ &= \frac{2}{\pi} \varkappa_{10} \varkappa_{10}^{-\frac{1}{2}} c + \frac{24}{\pi\sqrt{2\pi}} \frac{(\varkappa_{10})^{\frac{1}{2}}}{c} = (\varkappa_{10})^{\frac{1}{2}} \left(\frac{2}{\pi} c + \frac{24}{\pi\sqrt{2\pi}c} \right). \end{aligned}$$

Перше твердження теореми повністю доведене.

Друге твердження теореми доводиться повністю аналогічно. Лише відзначимо, що у випадку $n \geq 2$, $\varkappa_n \leq c$ у (19) вибираємо $T = X\sqrt{n}$, де $X = c(\varkappa_n)^{-\frac{n}{3n+1}}$, $T' = \min(T_{21}, X)$.

Доведення теореми 2. Будемо вважати, що $\nu_{n0}^{(2)}(y) \leq c$, бо у випадку $\nu_{n0}^{(2)}(y) > c$

$$\rho_n \leq 1 \leq \frac{\nu_{n0}^{(2)}(y)}{c}$$

і теорема 2 стає очевидною.

Із лем 1 і 2.3, нерівності (4), (15), (17), при $|t| \leq X_m$ ($m = 1$ при $\nu_{n0}(y) \leq c$ і $m = 2$ при $\nu_{n0}(y) > c$) одержимо

$$\begin{aligned} \left| f_n^n(t\sqrt{n}) - e^{-\frac{t^2}{2}n} \right| &\leq \omega_n(t) \sum_{k=1}^n |f_n(t\sqrt{n})|^{n-k} \cdot e^{-\frac{t^2}{2}(k-1)} \leq \\ &\leq \left(\frac{|t|^3}{6} \nu_{n0}^{(1)}(y) + t^2 \nu_{n0}^{(2)}(y) \right) \sum_{k=1}^n e^{-c_m t^2(n-k)} e^{-\frac{t^2}{2}(k-1)} \leq \\ &\leq n \left(\frac{|t|^3}{6} \nu_{n0}^{(1)}(y) + t^2 \nu_{n0}^{(2)}(y) \right) e^{-c_m t^2(n-1)}. \end{aligned} \quad (27)$$

Нехай $n \geq 2$, $\nu_{n0}(y) > c$. Тоді в (19) покладемо $T = X_2\sqrt{n}$, а в останній нерівності $m = 2$, тоді зі (27) одержимо

$$\rho_n \leq \frac{2}{\pi} \int_0^{X_2} \left| f_n^n(t\sqrt{n}) - e^{-\frac{t^2}{2}n} \right| \frac{dt}{t} + \frac{24}{\pi\sqrt{2\pi}c} \frac{\nu_{n0}^{(1)}(y)}{\sqrt{n}} \leq$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{2}{\pi} n \int_0^{X_2} \left(\frac{|t|^3}{6} \nu_{n0}^{(1)}(y) + t^2 \nu_{n0}^{(2)}(y) \right) e^{-c_2 t^2 (n-1)} \frac{dt}{t} + \frac{24}{\pi \sqrt{2\pi c}} \frac{\nu_{n0}^{(1)}(y)}{\sqrt{n}} \leq \\
&\leq \frac{n}{3\pi} \nu_{n0}^{(1)}(y) \int_0^\infty t^2 e^{-c_2 t^2 (n-1)} dt + \frac{2n}{\pi} \nu_{n0}^{(2)}(y) \int_0^\infty t e^{-c_2 t^2 (n-1)} dt + \\
&+ \frac{24}{\pi \sqrt{2\pi c}} \frac{\nu_{n0}^{(1)}(y)}{\sqrt{n}} = \nu_{n0}^{(1)}(y) \frac{n}{3\pi} \cdot \frac{1}{2 [c_2 (n-1)]^{3/2}} \int_0^\infty z^{1/2} e^{-z} dz + \\
&+ \nu_{n0}^{(2)}(y) \frac{n}{\pi} \cdot \frac{1}{c_2 (n-1)} + \frac{24}{\pi \sqrt{2\pi c}} \frac{\nu_{n0}^{(1)}(y)}{\sqrt{n}} \leq \\
&\leq C_6 \frac{\nu_{n0}^{(1)}(y)}{\sqrt{n}} + C_7 \nu_{n0}^{(2)}(y), \tag{28}
\end{aligned}$$

де $C_6 = \frac{\sqrt{2}}{6\sqrt{\pi c_2^3}} + \frac{24}{\pi \sqrt{2\pi c}}$, $C_7 = \frac{2}{c_2}$.

При $n = 1$ $\nu_{n0}(y) > c$

$$\rho_n \leq 1 \leq \frac{\nu_{n0}^{(2)}(y)}{c} \leq \frac{1}{c} \left(\nu_{n0}^{(1)}(y) + \nu_{n0}^{(2)}(y) \right).$$

Отже, у випадку $\nu_{n0}(y) > c$, теорема 2 доведена.

Нехай $n \geq 2$, $\nu_{n0}(y) \leq c$, тоді в (26) покладемо $T = Y\sqrt{n}$, $Y = \frac{c}{\nu_{n0}(y)}$ і $X' = \min \{X_1, Y\}$. Інтеграл у (19)

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^{\frac{T}{\sqrt{n}}} \left| f_n^n(t\sqrt{n}) - e^{-\frac{t^2}{2}n} \right| \frac{dt}{t} \leq \int_0^{X'} \left| f_n^n(t\sqrt{n}) - e^{-\frac{t^2}{2}n} \right| \frac{dt}{t} + \\
&+ \frac{2}{\pi} \int_{X'}^Y |f_n(t\sqrt{n})|^n \frac{dt}{t} + \int_{X'}^Y e^{-\frac{t^2}{2}n} \frac{dt}{t} = J_1 + J_2 + J_3. \tag{29}
\end{aligned}$$

Для оцінки інтеграла J_1 , аналогічно до (28), із (27) ($m = 1$) одержимо

$$\begin{aligned}
J_1 &\leq \frac{2}{\pi} n \int_0^{X'} \left(\frac{|t|^3}{6} \nu_{n0}^{(1)}(y) + t^2 \nu_{n0}^{(2)}(y) \right) e^{-c_1 t^2 (n-1)} \frac{dt}{t} \leq \\
&\leq C_8 \frac{\nu_{n0}^{(1)}(y)}{\sqrt{n}} + C_9 \nu_{n0}^{(2)}(y), \tag{30}
\end{aligned}$$

де $C_8 = \frac{\sqrt{2}}{6\sqrt{\pi c_1^3}}$, $C_9 = \frac{2}{c_1}$.

Будемо вважати, що $X' = X_1$, бо інакше $J_2 = 0$, $J_3 = 0$ і (??) для $n \geq 2$ є очевидною.

Із леми 2.2, нерівність (??), одержимо

$$J_2 = \frac{2}{\pi} \int_{X'}^Y |f_n(t\sqrt{n})|^n \frac{dt}{t} \leq \frac{2}{\pi} (3\nu_{n0}(y))^n \int_{X'}^Y \frac{dt}{t} \leq \frac{2}{\pi} (3\nu_{n0}(y))^n \frac{Y}{X'}.$$

Оскільки, $\nu_{n0}(y) \leq c < \frac{1}{16}$, то $X_1 = \sqrt{-2\ln\nu_{n0}(y)} \geq \sqrt{-2\ln c} > 2$.

Тому,

$$\begin{aligned} J_2 &\leq \frac{2}{\pi} (3\nu_{n0}(y))^{n-1} \cdot \frac{3c}{2} \leq 3\nu_{n0}(y) \cdot \frac{3c}{\pi} \cdot (3c)^{n-2} \leq \\ &\leq \left(\frac{\nu_{n0}^{(1)}(y)}{\sqrt{n}} + \nu_{n0}^{(2)}(y) \right) \frac{1}{\pi c} \sqrt{n} (3c)^n. \end{aligned}$$

При $n \geq 2$, вираз $\sqrt{n}(3c)^n$ є обмеженим, тому існує така стала C_{10} , що

$$J_2 \leq C_{10} \left(\frac{\nu_{n0}^{(1)}(y)}{\sqrt{n}} + \nu_{n0}^{(2)}(y) \right). \quad (31)$$

Оцінимо J_3 наступним чином,

$$\begin{aligned} J_3 &= \frac{2}{\pi} \int_{X'}^Y e^{-\frac{t^2}{2}n} \frac{dt}{t} \leq \frac{2}{\pi} \int_{\frac{X_1^2}{2}}^{\infty} e^{-u} \frac{du}{u} \leq \frac{1}{\pi} \left(\frac{X_1^2 n}{2} \right)^{-1} \cdot e^{-\frac{X_1^2 n}{2}} \leq \\ &\leq \frac{1}{2\pi n} (\nu_{n0}(y))^n \leq \frac{\nu_{n0}(y)}{\sqrt{n}} \cdot \frac{c}{2\pi} \leq c_8 \left(\frac{\nu_{n0}^{(1)}(y)}{\sqrt{n}} + \nu_{n0}^{(2)}(y) \right). \end{aligned} \quad (32)$$

Із (19), (29)–(??) одержуємо справедливість теореми 2 при $n \geq 2$ у випадку $\nu_{n0}(y) \leq c$. Нехай $n = 1$, тоді

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \sup_x |\Phi_1(x) - \Phi(x)| = \sup_x |H_1(x)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |dH_1(x)| = \\ &= \int_{|x| \leq y} |dH_1(x)| + \int_{|x| > y} |dH_1(x)| \leq \nu_{10}^{(1)}(y) + \nu_{20}^{(2)}(y). \end{aligned}$$

Теорема 2 доведена.

Список використаної літератури

1. *Zolotarev V.M.* Exactness of an approximation in the central limit theorem / V.M. Zolotarev // Proceedings of the Second Japan – USSR Symposium on Probability Theory. – Berlin: Springer-Verlag, 1973. – P. 531-543.
2. *Золотарев В.М.* Современная теория суммирования независимых случайных величин / В.М. Золотарев. – М.: Наука, 1986. – 416 с.
3. *Лоев М.* Теория вероятностей / М. Лоев. – М.: из-во иностр. лит., 1962. – 720 с.

Одержано 30.03.2017