

УДК 519.21

О. М. Гопкало (Київський нац. ун-т ім. Т. Шевченка)

УЗАГАЛЬНЕНІ ТЕОРЕМИ ЛЕВІ-БАКСТЕРА ДЛЯ ПСЕВДОГАУСОВИХ ВИПАДКОВИХ ВЕКТОРІВ

This paper is devoted pseudo-Gaussian random vectors that are both sub-Gaussian and super-Gaussian. For these vectors prove theorem generalized Levy-Baxter.

Робота присвячена псевдогаусовим випадковим векторам, які є одночасно субгаусовими та супергаусовими. Для таких векторів доведено узагальнену теорему Леві-Бакстера.

1. Вступ. Нехай (Ω, F, P) — стандартний ймовірнісний простір, $(\xi_{n,k}, k = 1, \dots, p_n)$ — послідовність серій центрованих випадкових величин, де $(p_n, n \geq 1)$ — послідовність натуральних чисел, така що:

$$p_n \rightarrow \infty, \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Класичні теореми Леві-Бакстера — це твердження про асимптотичну поведінку сум

$$S_n^{(2)} = \sum_{k=1}^{p_n} \xi_{n,k}^2, n \geq 1.$$

Цікавими є умови, за яких

$$E(S_n^{(2)} - ES_n^{(2)})^2 \rightarrow 0, n \rightarrow \infty.$$

Найцікавішим є випадок, коли $S_n^{(2)} \rightarrow const$ при $n \rightarrow \infty$.

Теоремам Леві-Бакстера присвячено багато робіт, зокрема роботи [1] - [3]. В основному в цих роботах вивчалися умови збіжності до нуля в середньому квадратичному або з ймовірністю 1.

У даній роботі розглядаються узагальнені теореми Леві-Бакстера, в яких досліджується поведінка різниці сум квадратів псевдогаусових випадкових векторів: $\sum_n \xi_k^2 - \sum_m \xi_k^2$.

Крім цього наводиться оцінка розподілу для квадратичної форми псевдогаусового випадкового вектора.

2. Базові визначення. У цьому розділі наведемо кілька означень, які будуть використані при доведенні основних результатів.

Означення 1 (див. [1]). *Випадкову величину $\xi, E\xi = 0$, будемо називати субгаусовою, якщо існує таке $a \geq 0$, що $\forall \lambda \in \mathbb{R}$:*

$$E \exp\{\lambda\xi\} \leq \exp\left\{\frac{a^2\lambda^2}{2}\right\}.$$

Клас субгаусових випадкових величин позначатимемо $\text{Sub}(\Omega)$.

Числова характеристика $\tau(\xi) = \inf\left\{a \geq 0 : E \exp\{\lambda\xi\} \leq \exp\left\{\frac{\lambda^2 a^2}{2}\right\}; \lambda \in \mathbb{R}\right\}$ називається *субгаусовським стандартом випадкової величини*.

Означення 2 (див. [1]). *Центрований випадковий вектор $\vec{\xi} \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$ називається субгаусовим, якщо існує симетричний невід'ємно визначений оператор $B : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, такий що*

$$\mathbb{E} \exp\{(\vec{u}; \vec{\xi})\} \leq \exp\left\{\frac{1}{2}(B\vec{u}; \vec{u})\right\}, u \in \mathbb{R}^n.$$

Будемо називати B оператором, що супроводжує субгаусовий вектор $\vec{\xi}$.

Означення 3 (див. [2]). *Центрована випадкова величина ξ називається супергаусовою, якщо існує таке $r > 0$, що $\forall \lambda \in \mathbb{R}$*

$$|\mathbb{E} \exp\{i\lambda\xi\}| \leq \exp\left\{-\frac{r^2\lambda^2}{2}\right\}.$$

Клас супергаусових випадкових величин позначатимемо: $\text{Super}(\Omega)$.

Функціонал $r(\xi) = \sup\left\{r > 0 : |\mathbb{E} \exp\{i\lambda\xi\}| \leq \exp\left\{-\frac{r^2\lambda^2}{2}\right\}; \lambda \in \mathbb{R}\right\}$ називається супергаусовим стандартом випадкової величини.

Означення 4 (див. [2]). *Центрований випадковий вектор $\vec{\xi} \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$ називається супергаусовим, якщо існує симетричний додатньо визначений оператор $R : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, такий що:*

$$|\mathbb{E} \exp\{i(\vec{\lambda}; \vec{\xi})\}| \leq \exp\left\{-\frac{1}{2}(R\vec{\lambda}; \vec{\lambda})\right\}, \lambda \in \mathbb{R}^n.$$

Будемо називати R оператором, що супроводжує супергаусовий вектор $\vec{\xi}$.

Означення 5 (див. [1]). *Нехай $\vec{\xi}$ – n -вимірний випадковий вектор, $n \geq 1$. Якщо $\vec{\xi}$ є одночасно субгаусовим та супергаусовим випадковим вектором, то $\vec{\xi}$ називається псевдогаусовим. При $n = 1$, ξ – псевдогаусова випадкова величина.*

Клас псевдогаусових випадкових векторів позначатимемо $\text{Psg}(\Omega, \mathbb{R}^n) = \text{Sub}(\Omega, \mathbb{R}^n) \cap \text{Super}(\Omega, \mathbb{R}^n)$. За означенням існує симетричний невід'ємно визначений оператор $B : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ та існує симетричний додатньо визначений оператор $R : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, такі що $\forall \lambda \in \mathbb{R}^n$:

$$|\mathbb{E} \exp\{(\vec{\lambda}; \vec{\xi})\}| \leq \exp\left\{\frac{1}{2}(B\vec{\lambda}; \vec{\lambda})\right\},$$

$$|\mathbb{E} \exp\{i(\vec{\lambda}; \vec{\xi})\}| \leq \exp\left\{-\frac{1}{2}(R\vec{\lambda}; \vec{\lambda})\right\}.$$

Оператори (матриці) B та R називаються *операторами (матрицями)*, що супроводжують псевдогаусовий вектор $\vec{\xi}$.

Позначимо B – *sub*-оператор, R – *super*-оператор.

Теорема 1 (див. [1]). *Нехай $\vec{\xi} \in \text{Psg}(\Omega, \mathbb{R}^n)$, $R = (r_{ij})_{i,j=1}^n$, $B = (b_{ij})_{i,j=1}^n$ – матриці, що супроводжують вектор $\vec{\xi}$. Тоді $\forall s \in (0, 1)$:*

$$\mathbb{E} \exp\left\{\frac{s}{2\hat{D}_n} \sum_{k=1}^n (\xi_k^2 - b_{kk})\right\} \leq \exp\left\{-\frac{s}{2}\right\} \frac{1}{\sqrt{1-s}},$$

$$\mathbb{E} \exp \left\{ \frac{s}{2\hat{D}_n} \sum_{k=1}^n (r_{kk} - \xi_k^2) \right\} \leq \exp \left\{ \frac{s^2}{4} \right\},$$

$$\text{де } \hat{D}_n = \left(\sum_{i,j=1}^n (b_{ij})^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \check{D}_n = \left(\sum_{i,j=1}^n (r_{ij})^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

3. Теорема про псевдогаусові випадкові вектори.

Теорема 2. Нехай $(\xi_1, \dots, \xi_n, \xi_{n+1}, \dots, \xi_{n+m})^T$ — псевдогаусовий випадковий вектор, $n, m \geq 1$, такий що $\forall \vec{\lambda} \in \mathbb{R}^{n+m}$ виконується наступне:

$$|\mathbb{E} \exp\{i(\vec{\lambda}; \vec{\xi})\}| \leq \exp \left\{ -\frac{1}{2}(R\vec{\lambda}; \vec{\lambda}) \right\},$$

де $R = (r_{ij})_{i,j=1}^{n+m}$ — super-оператор (симетрична додатньо визначена матриця), та

$$|\mathbb{E} \exp\{(\vec{\lambda}; \vec{\xi})\}| \leq \exp \left\{ \frac{1}{2}(B\vec{\lambda}; \vec{\lambda}) \right\},$$

де $B = (b_{ij})_{i,j=1}^{n+m}$ — sub-оператор (симетрична невід'ємно визначена матриця), причому $B = \varkappa R$, $\varkappa \geq 1$.

Розглянемо

$$I_{n,m}(s) = \mathbb{E} \exp \left\{ \frac{s}{2(G_{n+m})^{1/2}} \sum_{k=1}^n (\xi_k^2 - \varkappa r_{kk}) + \sum_{k=n+1}^{n+m} (r_{kk} - \xi_k^2) \right\},$$

де $G_{n+m} = \sum_{k,j=1}^{n+m} r_{kj}^2$. Тоді

$$I_{n,m}(s) \leq \exp \left\{ -\frac{s\varkappa}{2} \right\} (1 - 2s\varkappa)^{-1/4},$$

де $s < \frac{1}{2\varkappa}$.

Доведення. Доведемо обмеження на $I_{n,m}(s)$:

$$\begin{aligned} I_{n,m}(s) &= \mathbb{E} \exp \left\{ \frac{s}{2(G_{n+m})^{1/2}} \left(\sum_{k=1}^n (\xi_k^2 - \varkappa r_{kk}) + \sum_{k=n+1}^{n+m} (r_{kk} - \xi_k^2) \right) \right\} = \\ &= \mathbb{E} \exp \left\{ \frac{s}{2(G_{n+m})^{1/2}} \sum_{k=1}^n (\xi_k^2 - \varkappa r_{kk}) + \frac{s}{2(G_{n+m})^{1/2}} \sum_{k=n+1}^{n+m} (r_{kk} - \xi_k^2) \right\} \leq \\ &\leq \left(\mathbb{E} \exp \left\{ \frac{2s}{2(G_{n+m})^{1/2}} \sum_{k=1}^n (\xi_k^2 - \varkappa r_{kk}) \right\} \right)^{1/2} \times \\ &\quad \times \left(\mathbb{E} \exp \left\{ \frac{2s}{2(G_{n+m})^{1/2}} \sum_{k=n+1}^{n+m} (r_{kk} - \xi_k^2) \right\} \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Позначимо R_n, R_{n+m} — матриці, такі що $R_n = (r_{ik})_{i,k=1}^n$; $R_{n+m} = (r_{ik})_{i,k=n+1}^{n+m}$. Крім того, $B_n = \varkappa R_n$, $g_n = \sum_{k,j=1}^n r_{kj}^2$, $g_{n+m} = \sum_{k,j=n+1}^{n+m} r_{kj}^2$.

З теореми 1 маємо:

$$\mathbb{E} \exp \left\{ \frac{2s}{2(G_{n+m})^{1/2}} \frac{\varkappa(g_n)^{1/2}}{\varkappa(g_n)^{1/2}} \sum_{k=1}^n (\xi_k^2 - \varkappa r_{kk}) \right\} \leq \exp \left\{ -\frac{2u_n \varkappa}{2} \right\} \frac{1}{\sqrt{1 - 2u_n \varkappa}},$$

якщо позначити $u_n = \frac{s(g_n)^{1/2}}{(G_{n+m})^{1/2}}$, та при $u_n \varkappa * 2 < 1$.

Також, з теореми 1, маємо:

$$\mathbb{E} \exp \left\{ \frac{2s}{2(G_{n+m})^{1/2}} \frac{(g_{n+m})^{1/2}}{(g_{n+m})^{1/2}} \sum_{k=n+1}^{n+m} (r_{kk} - \xi_k^2) \right\} \leq \exp \left\{ \frac{(2v_n)^2}{4} \right\},$$

якщо позначити $v_n = \frac{s(g_{n+m})^{1/2}}{(G_{n+m})^{1/2}}$, та при $2v_n < 1$.

Отже,

$$\begin{aligned} I_{n,m}(s) &\leq \exp \left\{ -\frac{u_n \varkappa}{2} \right\} \frac{1}{(1 - 2u_n \varkappa)^{1/4}} \exp \left\{ \frac{2v_n^2}{4} \right\} = \\ &= \exp \left\{ -\frac{s \varkappa (g_n)^{1/2}}{2(G_{n+m})^{1/2}} + \frac{2s^2 g_{n+m}}{4G_{n+m}} \right\} \left(1 - \frac{2s \varkappa (g_n)^{1/2}}{(G_{n+m})^{1/2}} \right)^{-\frac{1}{4}}. \end{aligned}$$

Оскільки $g_n + g_{n+m} \leq G_{n+m}$, то $g_{n+m} \leq G_{n+m} - g_n$. Звідси маємо наступне:

$$\frac{g_{n+m}}{G_{n+m}} \leq \frac{G_{n+m} - g_n}{G_{n+m}} = 1 - \frac{g_n}{G_{n+m}}.$$

Позначимо $f_n = \left(\frac{g_n}{G_{n+m}} \right)^{1/2}$, $f_n \leq 1$.

Тоді

$$\begin{aligned} I_{n,m}(s) &\leq \exp \left\{ -\frac{s \varkappa f_n}{2} + \frac{s^2}{2} (1 - f_n^2) \right\} (1 - 2s f_n \varkappa)^{-\frac{1}{4}} = \\ &= \exp \left\{ \frac{s^2}{2} \right\} \exp \left\{ -\frac{s f_n \varkappa}{2} - \frac{s^2 f_n^2}{2} \right\} (1 - 2s f_n \varkappa)^{-\frac{1}{4}}. \end{aligned}$$

Позначимо $L(u) = \exp \left\{ -\frac{u \varkappa}{2} - \frac{u^2}{2} \right\} (1 - 2u \varkappa)^{-\frac{1}{4}}$.

Легко бачити, що максимум цієї функції досягається в точці $u = \frac{1}{2\varkappa}$.

Підставимо це значення у нерівність вище та отримаємо наступне:

$$\begin{aligned} I_{n,m}(s) &\leq \exp \left\{ \frac{s^2}{2} \right\} \exp \left\{ -\frac{s \varkappa}{2} - \frac{s^2}{2} \right\} (1 - 2s \varkappa)^{-\frac{1}{4}} = \\ &= \exp \left\{ -\frac{s \varkappa}{2} \right\} (1 - 2s \varkappa)^{-\frac{1}{4}}, \end{aligned}$$

де $s < \frac{1}{2\varkappa}$.

Наступна теорема випливає з теореми 2. Оскільки, якщо перенумерувати величини ξ_i випадкового вектора $\vec{\xi}$, то твердження теореми 2 не зміниться.

Теорема 3. Нехай $\vec{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_N)$ – псевдогаусовий випадковий вектор, $N \geq 1$, із супроводжуваними матрицями R_N – супергаусова, B_N – субгаусова: $B_N = \varkappa_N R_N$, де $\varkappa_N \geq 1$, $G_N = \sum_{j,k=1}^N (r_{kj}^{(N)})^2$, де $r_{k,j}^{(N)}$ – елементи матриці R_N .

Позначимо

$$I_{Z^+, Z^-}(s) = \mathbb{E} \exp \left\{ \frac{s}{2(G_N)^{1/2}} Y_{Z^+, Z^-} \right\},$$

де $Y_{Z^+, Z^-} = \sum_{k \in Z^+} (\xi_k^2 - \varkappa_N r_{kk}^{(N)}) + \sum_{k \in Z^-} (r_{kk}^{(N)} - \xi_k^2)$; тут Z^+, Z^- – множини цілих чисел від 1 до N такі, що $Z^+ \cap Z^- = \emptyset$, $Z^+ \cup Z^- = (1, \dots, N)$.

Тоді при $0 \leq s < \frac{1}{2\varkappa_N}$ та $\forall Z^-, Z^+$ маємо:

$$I_{Z^+, Z^-}(s) \leq \exp \left\{ -\frac{s\varkappa_N}{2} \right\} (1 - 2s\varkappa_N)^{-\frac{1}{4}}. \quad (1)$$

Наслідок 1. Позначимо

$$\hat{I}_{Z^+, Z^-}(s) = \mathbb{E} \exp \left\{ \frac{s}{2(G_N)^{1/2}} |Y_{Z^+, Z^-}| \right\}.$$

Тоді при $0 \leq s < \frac{1}{2\varkappa_N}$, має місце нерівність:

$$\hat{I}_{Z^+, Z^-}(s) \leq 2 \exp \left\{ -\frac{s\varkappa_N}{2} \right\} (1 - 2s\varkappa_N)^{-\frac{1}{4}}.$$

Доведення. Доведемо твердження наслідку. Маємо наступне:

$$\begin{aligned} \hat{I}_{Z^+, Z^-}(s) &= \mathbb{E} \exp \left\{ \frac{s}{2(G_N)^{1/2}} |Y_{Z^+, Z^-}| \right\} \leq \\ &\leq \mathbb{E} \exp \left\{ \frac{s}{2(G_N)^{1/2}} Y_{Z^+, Z^-} \right\} + \mathbb{E} \exp \left\{ \frac{s}{2(G_N)^{1/2}} (-Y_{Z^+, Z^-}) \right\}. \end{aligned}$$

Для першого доданку справедлива нерівність (1). Для другого також справджується ця нерівність, оскільки вона не залежить від Z^+, Z^- .

Теорема 4. Нехай виконуються умови теореми 3. Тоді $\forall x > 0$ справджується нерівність:

$$\mathbb{P} \left\{ \frac{s}{2(G_N)^{1/2}} |Y_{Z^+, Z^-}| > x \right\} \leq 2 \exp \left\{ -\frac{x\varkappa_N}{2} \right\} (1 - 2\varkappa_N x)^{\frac{1}{4}}.$$

Доведення. З нерівності Чебишева при $x > 0$, $s > 0$ випливає наступне:

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left\{ \frac{1}{2(G_N)^{1/2}} |Y_{Z^+, Z^-}| > x \right\} &= \\ &= \mathbb{P} \left\{ \frac{s}{2(G_N)^{1/2}} |Y_{Z^+, Z^-}| > sx \right\} \leq \frac{\mathbb{E} \exp \left\{ \frac{s}{2(G_N)^{1/2}} |Y_{Z^+, Z^-}| \right\}}{\mathbb{E} \exp \{sx\}}. \end{aligned}$$

З теореми 3 маємо:

$$\mathbb{P} \left\{ \frac{s}{2(G_N)^{1/2}} |Y_{Z^+, Z^-}| > x \right\} \leq 2 \exp \left\{ -\left(\frac{s\varkappa_N}{2} + sx \right) \right\} (1 - 2s\varkappa_N)^{-\frac{1}{4}}. \quad (2)$$

Мінімум правої частини досягається при $s = \frac{\varkappa_N^2 x}{1 + 2\varkappa_N x}$.

Легко бачити, що тут $s < \frac{1}{2\varkappa_N}$.

Підставимо це значення в (2) та отримаємо твердження теореми.

4. Узагальнені теореми Леві-Бакстера для псевдогаусових випадкових векторів.

Теорема 5. Нехай $\vec{\xi}_N$ – послідовність псевдогаусових випадкових векторів, $N \geq 1$, для кожного з яких виконуються умови теореми 3.

Нехай існує константа c , така що $\sum_{k \in Z^+} \varkappa_N r_{kk}^{(N)} - \sum_{k \in Z^-} r_{kk}^{(N)} \rightarrow c$, при $N \rightarrow \infty$.

Введемо наступні позначення: $I_{Z^+, Z^-, N} = \sum_{k \in Z^+} \xi_k^2 - \sum_{k \in Z^-} \xi_k^2$ та $F_N = \sum_{k \in Z^+} \varkappa_N r_{kk}^{(N)} - \sum_{k \in Z^-} r_{kk}^{(N)} - c$, де $r_{kj}^{(N)}$ – елементи матриці R_N .

Тоді

$$I_{Z^+, Z^-, N} \rightarrow c$$

за ймовірністю, якщо $G_N \rightarrow 0$, при $N \rightarrow \infty$, та справджується наступна нерівність при $y > F_N$:

$$P \left\{ \left| \sum_{k \in Z^+} \xi_k^2 - \sum_{k \in Z^-} \xi_k^2 - c \right| > y \right\} \leq 2 \exp \left\{ -\frac{(y - F_N) \varkappa_N}{8(G_N)^{1/2}} \right\} \left(1 + \frac{2 \varkappa_N (y - F_N)}{(G_N)^{1/2}} \right)^{\frac{1}{4}},$$

де $G_N = \sum_{j,k=1}^N (r_{kj}^{(N)})^2$.

Доведення. З теореми 4 випливає, що

$$\begin{aligned} P \left\{ \left| \sum_{k \in Z^+} \xi_k^2 - \sum_{k \in Z^-} \xi_k^2 - c \right| > y \right\} &= \\ &= P \left\{ \frac{\sum_{k \in Z^+} \xi_k^2 - \sum_{k \in Z^-} \xi_k^2 - (\sum_{k \in Z^+} \varkappa_N r_{kk}^{(N)} - \sum_{k \in Z^-} r_{kk}^{(N)}) + F_N}{4(G_N)^{1/2}} > \right. \\ &\quad \left. > \frac{y}{4(G_N)^{1/2}} \right\} = \\ &= P \left\{ \frac{\sum_{k \in Z^+} \xi_k^2 - \sum_{k \in Z^-} \xi_k^2 - (\sum_{k \in Z^+} \varkappa_N r_{kk}^{(N)} - \sum_{k \in Z^-} r_{kk}^{(N)})}{4(G_N)^{1/2}} > \right. \\ &\quad \left. > \frac{y - F_N}{4(G_N)^{1/2}} \right\} \leq \\ &\leq 2 \exp \left\{ -\frac{(y - F_N) \varkappa_N}{8(G_N)^{1/2}} \right\} \left(1 + 2 \varkappa_N \frac{(y - F_N)}{4(G_N)^{1/2}} \right)^{\frac{1}{4}}. \end{aligned}$$

З цієї нерівності випливає твердження теореми.

Зауваження 1. Узагальнена теорема Леві-Бакстера при $Z^- = \emptyset$ набуває вигляду теореми Леві-Бакстера.

Список використаної літератури

1. Buldygin V. V., Kozachenko Yu. V. Metric Characterization of Random Variables and Random Processes. – American Mathematical Society, Providence, RI, 2000. – 257 p.
2. Козаченко Ю. В., Вовк Л. Б. Про швидкість збіжності в теоремах Леві-Бакстера для деяких класів випадкових процесів // Теорія ймовір. та матем. статист. – 1992. – Вип. 46. – С. 25–36.
3. Козаченко Ю. В., Бесклинская Е. П. Сходимость в нормах пространства Орлича и теоремы Леві-Бакстера // Теорія ймовір. та матем. статист. – 1986. – Вип. 35. – С. 3–6.

Одержано 02.03.2017