УДК 512.53+512.64

Е. М. Костишин (Київський нац. ун-т ім. Т. Шевченка)

АЛГЕБРА АУСЛЕНДЕРА ДЛЯ НАПІВГРУПИ ВСІХ ПЕРЕТВОРЕНЬ ДВОЕЛЕМЕНТНОЇ МНОЖИНИ

It is described the Auslander algebra for the matrix representations of the semigroup of all transformations of the two elements set over a field of any characteristic.

Описана алгебра Ауслендера для матричних зображень напівгрупи всіх перетворень двоелементної множини над полем довільної характеристики.

Матричні зображення скінченних груп над полями вивчені достатньо добре. У класичному випадку (коли характеристика p поля К не ділить порядку скінченної групи), група має скінченний зображувальний тип; більш того, у цьому випадку кожне нерозкладне зображення є незвідним і всі вони вичерпуються прямими доданками регулярного зображення. У модулярному випадку (коли характеристика p ділить порядок групи), група має скінченний зображувальний тип тоді і лише тоді, коли її силівська p-підгрупа є циклічною. У модулярному випадку більшість скінченних груп є дикими, тобто задача про опис їх зображень включає в себе задачу про класифікацію пар матриць з точністю до подібності; точні означення ручних та диких задач див. в [1]. Ручні та дикі групи для цього випадку повністю описані в роботі [2].

Матричні зображення напівгруп над полями вивчені не в такій мірі, як зображення груп. Найбільше робіт присвячена вивченню незвідних зображень та класів напівгруп, всі нерозкладні зображення яких є незвідними (див., напр., монографії [3,4]), тощо. Серед інших випадків виділимо відомі результати з теорії зображень алгебр, які легко переформулювати в термінах зображень напівгруп (наприклад, опис зображень алгебри $< a, b \,|\, ab = ba = 0 >$ [5,6] чи алгебри $< a, b \,|\, a^2 = b^2 = 0 >$ [7,8]) і деякі результати про напівгрупи скінченного зображувального типу: випадок скінченної цілком простої напівгрупи [9] та деякі немодулярні випадки напівгруп всіх перетворень скінченної множини [10, 11].

У цій статті ми описуємо алгебру Ауслендера для матричних зображень напівгрупи T_2 всіх перетворень множини із двох елементів, як у звичайному випадку, коли характеристика поля не дорівнює 2, так і в модулярному випадку, коли характеристика поля дорівнює 2. Нерозкладні зображення у цих випадках описано відповідно в роботах [10] і [12] (див. нижче пункт 2).

1. Напівгрупа representation type of the full transformation T_2. Напівгрупа всіх перетворень (відображень в себе) двоелементної множини $\{1, 2\}$ позначається нами через T_2. Вона складається із чотирьох елементів e, a, b, c:

$$e(1) = 1, \quad e(2) = 2; \quad a(1) = 2, \quad a(2) = 1;$$
$$b(1) = 2, \quad b(2) = 2; \quad c(1) = 1, \quad c(2) = 1.$$

Оскільки e — одиничний елемент напігрупи і $a^2 = e$, $b^2 = b$, $ab = b$, $ba = c$, $c^2 = c$, $ac = c$, $bc = c$, $ca = b$, $cb = b$, то e, a, b утворюють систему твірних із наступними визначальними співвідношеннями:

1) $e^2 = e, ea = ae = a, eb = be = b$;
2) $a^2 = e$, $b^2 = b$;
3) $ab = b$.

Матричне зображення розмірності n напівгрупи $T = T_2$ над полем K — це (згідно загального означення матричного зображення напівгрупи) довільний гомоморфізм $X : T \to M_n(K)$ напівгрупи T в напівгрупу $M_n(K)$ всіх квадратних матриць розміру $n \times n$ над полем К (n — натуральне число). Зауважимо, що в загальному означенні нічого не говориться про одиничний елемент напівгрупи (бо його може і не бути), але у випадку, коли одиниця в напівгрупі є, практично можна вважати, що гомоморфізм переводить її у одиничну матрицю (див. нижче); ми будемо розглядати лише такі зображення). Тоді зображення $X : T_2 \to M_n(K)$ напівгрупи $T = T_2$ однозначно задається парою матриць

$$R = \{A = X(a), B = X(b)\},$$

що задовольняють наступні рівності: $A^2 = E$, $B^2 = B$, $AB = B$.

Еквівалентність матричних зображень $R = \{A, B\}$ і $R' = \{A', B'\}$ напівгрупи T_2 означає існування оборотної матриці C такої, що $A' = CAC^{-1}$ і $B' = CBC^{-1}$ (або, що те ж саме, $A'C = CA$ і $B'C = CB$, що практично більш зручніше, бо маємо лінійні відносно C рівності).

Пряма сума матричних зображень $R = \{A, B\}$ і $R' = \{A', B'\}$ напівгрупи T_2 — це матричне зображення $R \oplus R' = \{A \oplus A', B \oplus B'\}$, де

$$A \oplus A' = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A' \end{pmatrix}, \quad B \oplus B' = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & B' \end{pmatrix}.$$

Зображення R називається розкладним, якщо воно еквівалентне прямій сумі двох зображень, і нерозкладним в іншому разі. Для матричних зображень напівгрупи $T = T_2$ (як і для будь-якої скінченновимірної алгебри) має місце теорема Крулля-Шмідта про однозначність розкладу довільного матричного зображення в пряму суму нерозкладних.

Матричне зображення напігрупи $T = T_2$ називається модулярним, якщо характеристика поля K, над яким воно розглядається, дорівнює 2 (бо напівгрупа T_2 має єдину нетривіальну підгрупу, породжену елементом a порядку 2).

Вище ми говорили, що у випадку, коли напівгрупа має одиничний елемент, практично можна вважати, що матричне зображення зіставляє йому одиничну матрицю.

Більш точно, має місце наступний факт.

Якщо $X : S \to M_n(K)$ — матричне зображення деякої напівгрупи S (див. вище відповідні позначення) і S містить одиничний елемент e, то зображення X еквівалентне прямій сумі зображень X_1 і X_2, таких що $X_1(e)$ — одинична матриця і $X_2(s) = 0$ для довільного $s \in S$. Іншими словами, якщо в означенні матричного зображення напігрупи з одиницею ми додатково будемо вимагати, щоб одиничному елементу відповідала одинична матриця, то ми втратимо лише одне нерозкладне зображення, а саме зображення, всі матриці якого є нульовими порядку 1.

Дійсно, оскільки матриця $Q = X_1(e)$ ідемпотентна, то із добре відомої теореми про канонічну форму Жордана безпосередньо випливає, що існує оборотна матриця C така, що $Q = CQ_0C^{-1}$, де

$$Q_0 = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};$$

тут і надалі E позначає одиничну матрицю (довільного порядку $m \geq 0$).

Розглянемо матричне зображення $\widehat{X} : s \to C^{-1}X(s)C$ (еквівалентне зображенню X), яке зіставляє одиничному елементу e матрицю Q_0. Із рівностей $\widehat{X}(e)\widehat{X}(s) = \widehat{X}(s)\widehat{X}(e) = \widehat{X}(s)$ (для довільного $s \in S$) і $\widehat{X}(e) = Q_0$, випливає, що в матриці

$$\widehat{X}(s) = \begin{pmatrix} \widehat{X}(s)_{11} & \widehat{X}(s)_{12} \\ \widehat{X}(s)_{21} & \widehat{X}(s)_{22} \end{pmatrix}$$

(розбитої на горизонтальні та вертикальні смуги таким же чином, як і матриця Q_0) блоки $\widehat{X}(s)_{12}$, $\widehat{X}(s)_{21}$, $\widehat{X}(s)_{22}$ є нульовими, звідки маємо, що зображення $\widehat{X}(s)$ є прямою сумою зображення $X_1 : s \to \widehat{X}(s)_{11}$, яке зіставляє одиничному елементу e одиничну матрицю $\widehat{X}(e)_{11}$, та зображення $X_2 : s \to \widehat{X}(s)_{22}$, для якого всі матриці $\widehat{X}(s)_{22}$ є нульовими.

2. Опис матричних зображень напівгрупи T_2. Скінченновимірні нерозкладні модулі над напівгруповою алгеброю KT_2 у немодулярному випадку описані (з точністю до ізоморфізму) в роботі [10]. Переформулюємо цей результат на мові матричних зображень самої напівгрупи T_2.

Теорема 1. *Нерозкладні матричні зображення напівгрупи T_2 над полем K характеристики $p \neq 2$ вичерпуються, з точністю до еквівалентності, наступними (попарно нееквівалентними) зображеннями:*

1) $a \to 1, \quad b \to 0$;

2) $a \to -1, \quad b \to 0$;

3) $a \to 1, \quad b \to 1$;

4) $a \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad b \to \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$

Нерозкладні матричні зображення напівгрупи T_2 у модулярному випадку описані в роботі [12].

Теорема 2. *Нерозкладні матричні зображення напівгрупи T_2 над полем K характеристики 2 вичерпуються, з точністю до еквівалентності, наступними (попарно нееквівалентними) зображеннями:*

1) $a \to 1, \quad b \to 0$;

2) $a \to 1, \quad b \to 1$;

3) $a \to \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b \to \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$;

4) $a \to \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$;

$$5) \quad a \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Формулювання основних теорем. Алгеброю Ауслендера алгебри скінченного зображувального типу (тобто, яка має скінченне число класів еквівалентності нерозкладних зображень) називається алгебра ендоморфізмів прямої суми всіх нерозкладних зображень (із кожного класу еквівалентності нерозкладних зображень треба взяти один представник). Якщо зображення розглядати в матричному вигляді, то алгебра Ауслендера буде реалізовуватись також в матричному вигляді і в цьому випадку природно називати її матричною алгеброю Ауслендера.

Нагадаємо, що ендоморфізм матричного зображення T алгебры Λ — це довільна матриця X така, що $T(y)X = XT(y)$ для будь-якого $y \in \Lambda$.

Очевидно, що матрична алгебра Ауслендера не залежить від вибору представників в классах еквівалентності у тому сенсі, що всі отримані таким чином алгебри будуть спряжені як підалгебри відповідної повної матричної алгебри.

Оскільки між зображеннями напівгрупи та зображеннями її напівгрупової алгебри існує природна взаємно однозначна відповідність, то можна говорити про алгебру Ауслендера напівгруп.

Сформулюємо основні результати цієї статті.

Теорема 3. *Якщо K — поле характеристики $p \neq 2$, то матрична алгебра Ауслендера для напівгрупи T_2 складається з усіх матриць вигляду*

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & 0 & x_{13} & 0 & 0 \\ 0 & x_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_{44} & 0 \\ 0 & x_{52} & 0 & 0 & x_{55} \end{pmatrix},$$

де x_{ij}— елементи поля K.

Теорема 4. *Якщо K — поле характеристики 2, то матрична алгебра Ауслендера для напівгрупи T_2 складається з усіх матриць вигляду*

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{18} & 0 \\ 0 & x_{11} & x_{23} & 0 & x_{25} & 0 & x_{27} & 0 & x_{29} \\ 0 & 0 & x_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_{41} & 0 & 0 & x_{44} & 0 & 0 & 0 & x_{48} & 0 \\ 0 & 0 & x_{41} & 0 & x_{44} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_{62} & x_{63} & 0 & x_{65} & x_{66} & x_{67} & 0 & x_{69} \\ 0 & 0 & x_{62} & 0 & 0 & 0 & x_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{88} & 0 \\ 0 & 0 & x_{93} & 0 & x_{95} & 0 & x_{97} & 0 & x_{99} \end{pmatrix},$$

де x_{ij}— елементи поля K.

4. Доведення теореми 3. Розглянемо наступну пряму суму нерозкладних зображень, вказаних в теоремі 1:

$$a \to A_0 = \left(\begin{array}{cc|c|c|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right),$$

$$b \to B_0 = \left(\begin{array}{cc|c|c|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Нехай $X-$ елемент матричної алгебри Ауслендера, тобто матриця

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} & x_{15} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} & x_{25} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} & x_{35} \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & x_{44} & x_{45} \\ x_{51} & x_{52} & x_{53} & x_{54} & x_{55} \end{pmatrix}$$

така, що $A_0X = XA_0$, $B_0X = XB_0$. Скалярні рівності вигляду $(A_0X)_{ij} = (XA_0)_{ij}$ і $(B_0X)_{ij} = (XB_0)_{ij}$ будемо позначати відповідно $(1; i, j)$ і $(2; i, j)$.

Розглянемо спочатку рівність $A_0X = XA_0$. Вона еквівалентна наступним скалярним рівностям:

$$\begin{array}{lll} (1;1,2): x_{12} = -x_{12}, & (1;2,4): -x_{24} = x_{24}, & (1;4,5): x_{45} = -x_{45}, \\ (1;1,5): x_{15} = -x_{15}, & (1;3,2): x_{32} = -x_{32}, & (1;5,1): -x_{51} = x_{51}, \\ (1;2,1): -x_{21} = x_{21}, & (1;3,5): x_{35} = -x_{35}, & (1;5,3): -x_{53} = x_{53}, \\ (1;2,3): -x_{23} = x_{23}, & (1;4,2): x_{42} = -x_{42}, & (1;5,4): -x_{54} = x_{54}. \end{array}$$

Отже, матриця X має вигляд

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & 0 & x_{13} & x_{14} & 0 \\ 0 & x_{22} & 0 & 0 & x_{25} \\ x_{31} & 0 & x_{33} & x_{34} & 0 \\ x_{41} & 0 & x_{43} & x_{44} & 0 \\ 0 & x_{52} & 0 & 0 & x_{55} \end{pmatrix}.$$

Тепер використаємо рівність $B_0X = XB_0$:

$$\begin{array}{lll} (2;1,2): x_{22} = x_{11}, & (2;3,2): 0 = x_{31}, & (2;4,1): 0 = x_{41}, \\ (2;1,4): x_{14} = 0, & (2;3,4): x_{34} = 0, & (2;4,3): 0 = x_{43}, \\ (2;1,5): x_{25} = 0. & & \end{array}$$

Звідси маємо, що

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & 0 & x_{13} & 0 & 0 \\ 0 & x_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_{44} & 0 \\ 0 & x_{52} & 0 & 0 & x_{55} \end{pmatrix}.$$

Теорема доведена.

5. Доведення теореми 4. Доведення проводиться по тій же схемі, що і доведення попередньої теореми.

Розглянемо наступну пряму суму нерозкладних зображень, вказаних в теоремі 2:

$$a \to A_0 = \left(\begin{array}{ccc|cc|cc|c|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right),$$

$$b \to B_0 = \left(\begin{array}{ccc|cc|cc|c|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Нехай $X-$ елемент матричної алгебри Ауслендера, тобто матриця

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} & x_{15} & x_{16} & x_{17} & x_{18} & x_{19} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} & x_{25} & x_{26} & x_{27} & x_{28} & x_{29} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} & x_{35} & x_{36} & x_{37} & x_{38} & x_{39} \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & x_{44} & x_{45} & x_{46} & x_{47} & x_{48} & x_{49} \\ x_{51} & x_{52} & x_{53} & x_{54} & x_{55} & x_{56} & x_{57} & x_{58} & x_{59} \\ x_{61} & x_{62} & x_{63} & x_{64} & x_{65} & x_{66} & x_{67} & x_{68} & x_{69} \\ x_{71} & x_{72} & x_{73} & x_{74} & x_{75} & x_{76} & x_{77} & x_{78} & x_{79} \\ x_{81} & x_{82} & x_{83} & x_{84} & x_{85} & x_{86} & x_{87} & x_{88} & x_{89} \\ x_{91} & x_{92} & x_{93} & x_{94} & x_{95} & x_{96} & x_{97} & x_{98} & x_{99} \end{pmatrix}$$

така, що $A_0X = XA_0$, $B_0X = XB_0$. Скалярні рівності вигляду $(A_0X)_{ij} = (XA_0)_{ij}$ і $(B_0X)_{ij} = (XB_0)_{ij}$ будемо позначати відповідно $(3; i, j)$ і $(4; i, j)$.

Розглянемо спочатку матричну рівність $B_0X = XB_0$. Вона еквівалентна наступним скалярним рівностям:

$$\begin{array}{llll}
(3;1,2): x_{12}=0, & (3;3,1): 0=x_{31}, & (3;5,1): 0=x_{31}, & (3;8,2): x_{82}=0,\\
(3;1,3): x_{13}=0, & (3;3,4): 0=x_{34}, & (3;5,4): 0=x_{34}, & (3;8,3): x_{83}=0,\\
(3;1,5): x_{15}=0, & (3;3,8): 0=x_{38}, & (3;5,8): 0=x_{38}, & (3;8,5): x_{85}=0,\\
(3;1,6): x_{16}=0, & (3;4,2): x_{42}=0, & (3;6,1): 0=x_{61}, & (3;8,6): x_{86}=0,\\
(3;1,7): x_{17}=0, & (3;4,3): x_{43}=0, & (3;6,4): 0=x_{64}, & (3;8,7): x_{87}=0,\\
(3;1,9): x_{19}=0, & (3;4,5): x_{45}=0, & (3;6,8): 0=x_{68}, & (3;8,9): x_{89}=0,\\
(3;2,1): 0=x_{21}, & (3;4,6): x_{46}=0, & (3;7,1): 0=x_{71}, & (3;9,1): 0=x_{91},\\
(3;2,4): 0=x_{24}, & (3;4,7): x_{47}=0, & (3;7,4): 0=x_{74}, & (3;9,4): 0=x_{94},\\
(3;2,8): 0=x_{28}, & (3;4,9): x_{49}=0, & (3;7,8): 0=x_{78}, & (3;9,8): 0=x_{98}.
\end{array}$$

Отже, матриця X має наступний вигляд:

$$X = \begin{pmatrix}
x_{11} & 0 & 0 & x_{14} & 0 & 0 & 0 & x_{18} & 0\\
0 & x_{22} & x_{23} & 0 & x_{25} & x_{26} & x_{27} & 0 & x_{29}\\
0 & x_{32} & x_{33} & 0 & x_{35} & x_{36} & x_{37} & 0 & x_{39}\\
x_{41} & 0 & 0 & x_{44} & 0 & 0 & 0 & x_{48} & 0\\
0 & x_{52} & x_{53} & 0 & x_{55} & x_{56} & x_{57} & 0 & x_{59}\\
0 & x_{62} & x_{63} & 0 & x_{65} & x_{66} & x_{67} & 0 & x_{69}\\
0 & x_{72} & x_{73} & 0 & x_{75} & x_{76} & x_{77} & 0 & x_{79}\\
x_{81} & 0 & 0 & x_{84} & 0 & 0 & 0 & x_{88} & 0\\
0 & x_{92} & x_{93} & 0 & x_{95} & x_{96} & x_{97} & 0 & x_{99}
\end{pmatrix}.$$

Тепер використаємо рівність $A_0X = XA_0$:

$$\begin{array}{lll}
(4;1,2): x_{32}=0, & (4;4,2): x_{52}=0, & (4;6,5): x_{75}=0,\\
(4;1,3): x_{33}=x_{11}, & (4;4,3): x_{53}=x_{41}, & (4;6,6): x_{76}=0,\\
(4;1,5): x_{35}=x_{14}, & (4;4,5): x_{55}=x_{44}, & (4;6,7): x_{77}=x_{66},\\
(4;1,6): x_{36}=0, & (4;4,6): x_{56}=0, & (4;6,9): x_{79}=0,\\
(4;1,7): x_{37}=0, & (4;4,7): x_{57}=0, & (4;8,3): 0=x_{81},\\
(4;1,9): x_{39}=0, & (4;4,9): x_{59}=0, & (4;8,5): 0=x_{84},\\
(4;2,3): x_{33}=x_{22}, & (4;6,2): x_{72}=0, & (4;9,3): 0=x_{92},\\
(4;2,5): x_{35}=0, & (4;6,3): x_{73}=x_{62}, & (4;9,7): 0=x_{96},\\
(4;2,7): x_{37}=x_{26}. & &
\end{array}$$

Звідси маємо, що

$$X = \begin{pmatrix}
x_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{18} & 0\\
0 & x_{11} & x_{23} & 0 & x_{25} & 0 & x_{27} & 0 & x_{29}\\
0 & 0 & x_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
x_{41} & 0 & 0 & x_{44} & 0 & 0 & 0 & x_{48} & 0\\
0 & 0 & x_{41} & 0 & x_{44} & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & x_{62} & x_{63} & 0 & x_{65} & x_{66} & x_{67} & 0 & x_{69}\\
0 & 0 & x_{62} & 0 & 0 & 0 & x_{66} & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{88} & 0\\
0 & 0 & x_{93} & 0 & x_{95} & 0 & x_{97} & 0 & x_{99}
\end{pmatrix}.$$

Теорема доведена.

Список використаної літератури

1. Дрозд Ю. А. О ручных и диких матричных задачах // Матричные задачи. – Киев: Ин-т математики АН УССР. – 1977. – С. 104–114.
2. Бондаренко В. М., Дрозд Ю. А. Представленческий тип конечных групп // Модули и представления : Записки науч. семинаров ЛОМИ. – 1977. – **71**. – С. 24–41.
3. Клиффорд А., Престон Г. Алгебраическая теория полугрупп. – Т. 1 – Москва: "Мир", 1972. – 285 с.
4. Okninski, J. Linear representations of semigroups. – World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1991.
5. Гельфанд И. М., Пономарьов В. А. Неразложимые представления группы Лоренца // Успехи мат. наук. – 1968 . – **23**, вып. 2. – С. 3–60.
6. Назарова Л. А., Ройтер А. В., Сергейчук В. В., Бондаренко В. М. Применение модулей над диадой для классификации конечных p-групп, обладающих абелевой подгруппой индекса p, и пар взаимно аннулирующих операторов // Зап. науч. семинаров ЛОМИ. – 1972. – **28**. – С. 69–92.
7. Бондаренко В. М. Представления диэдральных групп над полем характеристики 2 // Мат. сб. – 1975. – **96**, вып. 1. – С. 63–74.
8. Ringel C. The indecomposable representations of dihedral 2-groups // Math. Ann. – 1975. – **214**, № 1. – P. 19–34.
9. Понизовский И. С. О конечности типа полугрупповой алгебры конечной вполне простой полугруппы // Зап. науч. семинаров ЛОМИ. – 1972. – **28**. – С. 154–163.
10. Понизовский И. С. Некоторые примеры полугрупповых алгебр конечного типа // Зап. науч. семинаров ЛОМИ. – 1987. – **160**. – С. 229–238.
11. Ringel C. The representation type of the full transformation semigroup T_4 // Semigroup Forum. – 2000. – **61**, № 3. – P. 429–434.
12. Бондаренко В. М., Костишин Е. М., Модулярні зображення напівгрупи T_2 // Наук. вісник Ужгород. ун-ту (серія: математика і інформатика). – 2011. – **22**, № 1. – С. 26–34.

Одержано 02.03.2017