УДК 512.643.8

Я. В. Варга (ДВНЗ «Ужгородський нац. ун-т»)

ПРО ОДНУ НЕЛІНІЙНУ ІНТЕГРАЛЬНУ КРАЙОВУ ЗАДАЧУ

We give a new approach for the investigation of existence and construction of an approximate solutions of nonlinear non-autonomous systems of ordinary differential equations under nonlinear integral boundary conditions. The constructivity of a suggested technique is shown on the example of non-linear integral boundary value problem with two solutions.

Застосовано новий підхід для дослідження існування та побудови наближених розв'язків нелінійних систем звичайних диференціальних рівнянь, підпорядкованих нелінійним інтегральним крайовим умовам. Доцільність запропонованої техніки показано на прикладі нелінійної інтегральної крайової задачі з двома розв'язками.

Вступ. У науковій літературі вивчення розв'язків систем нелінійних звичайних диференціальних рівнянь підпорядкованих різного вигляду інтегральним крайовим умовам звертають досить багато уваги [1], [2], [3], [13], [8].

У даній роботі досліджується нелінійна інтегральна крайова задача загального вигляду

$$\frac{dx(t)}{dt} = f\left(t, x(t)\right), t \in [a, b]\,, \tag{1}$$

$$\int_a^b p(s, x(s), x'(s))ds = \int_a^b p(s, x(s),\ f(s, x(s)))ds = d. \tag{2}$$

де $f : [a, b] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ і $p : [a, b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ задані неперервні функції у деякій обмеженій області $D \subset \mathbb{R}^n$, конкретний вигляд якої буде показано нижче в (8), а $d \in \mathbb{R}^n-$ заданий вектор. Зауважимо, що в (2) підінтегральна функція може нелінійно залежати як від невідомої функції $x(\cdot)$ так і від її похідної $x'(\cdot) = f(\cdot, x(\cdot))$.

Крім того, припускається локальна ліпшицевість в області D функції f і p для всіх $t \in [a, b]$ і $\{u, v\} \in D$ у наступному вигляді:

$$|f(t, u) - f(t, v)| \leq K_f\, |u - v|\,, \tag{3}$$

$$|p(t, u(t),\ f(t, u(t))) - p(t, v(t),\ f(t, v(t)))| \leq K_p\, |u - v| + K^{'}\, |f(t, u) - f(t, v)|$$

$$\leq K_p\, |u - v| + K^{'} K_f\, |u - v| = (K_p + K^{'} K_f)\, |u - v| = K\, |u - v|\,, \tag{4}$$

де $K_f, K_p, K^{'}, K = K_p + K^{'} K_f$ невід'ємні матриці розмірності $n \times n$.

Для дослідження існування і наближеного розв'язку задачі (1)-(2) застосуємо техніку, запропоновану в [5], [11–14], [6], [9].

На основі цього підходу замість інтегральних крайових умов (2) вводяться в розгляд параметризовані „модельні умови“ простого вигляду

$$x(a) = z,\ x(b) = \eta, \tag{5}$$

де $z := col(z_1, ..., z_n)$, $\eta := col(\eta_1, ..., \eta_n)$ є невідомими параметрами і спочатку замість інтегральної крайової задачі (1)-(2) досліджуються розв'язки наступної системи параметризованих двоточкових крайових задач „модельного типу“

$$\frac{dx(t)}{dt} = f\left(t, x(t)\right), t \in [a, b]\,, \quad x(a) = z, \quad x(b) = \eta. \tag{6}$$

1. Дослідження модельної задачі. Вихідними є дві обмежені області $D_a, D_b \subset \mathbb{R}^n$ і цікавимося такими розв'язками, значення яких в точках $t = a$ і $t = b$ належить відповідно множинам D_a і D_b. Будується множина точок

$$D_{a,b} = (1 - \theta)\, z + \theta\eta \tag{7}$$

і для невід'ємного вектора $\rho \in \mathbb{R}^n$ визначимо покомпонентний векторний $\rho-$окіл множини $D_{a,b}$ наступним чином

$$D = B\left(D_{a,b}, \rho\right) = \bigcup_{y \in D_{a,b}} B\left(y, \rho\right), \tag{8}$$

де під векторним $\rho-$околом точки $y \in \mathbb{R}^n$ розуміємо множину

$$B\left(y, \rho\right) = \{\xi \in \mathbb{R}^n : |\xi - y| \leq \rho\}$$

і надалі нерівності між векторами, а також операції max і min розуміємо покомпонентно. Звернемо увагу на те, що множина $D_{a,b}$ утворена усіма прямими, що з'єднують точки множини D_a і точки множини D_b.

На основі множини D, функції f і правої частини системи диференціальних рівнянь (1) побудуємо вектор

$$\delta_{[a,b],D}(f) = \frac{1}{2}\left[\max_{(t,x)\in[a,b]\times D} f(t,x) - \min_{(t,x)\in[a,b]\times D} f(t,x)\right]. \tag{9}$$

Умова 1. Існує невід'ємний вектор $\rho \in \mathbb{R}^n$ такий, що

$$\rho \geq \delta_{[a,b],D}(f).$$

Умова 2. Існують невід'ємні матриці $K_f, K_p, K', K = K_p + K'K_f$ для яких локально в області D для функцій f і p виконуються умови Ліпшиця (3), (4).

Умова 3. Найбільше власне значення матриці

$$Q = \frac{3\,(b-a)}{10} K_f \tag{10}$$

менше за одиницю

$$r(Q) < 1. \tag{11}$$

Для вивчення розв'язків модельної параметризованої задачі (6) введемо в розгляд параметризовану послідовність функцій

$$x_0\left(t, z, \eta\right) := z + \frac{t-a}{b-a}\left[\eta - z\right] = \left[1 - \frac{t-a}{b-a}\right]\, z + \frac{t-a}{b-a}\eta, \tag{12}$$

$$x_m\left(t, z, \eta\right) := z + \int_a^t f\left(s, x_{m-1}\left(s, z, \eta\right)\right) ds - \tag{13}$$

$$-\frac{t-a}{b-a}\int\limits_a^b f\left(s,x_{m-1}\left(s,z,\eta\right)\right)ds+\frac{t-a}{b-a}\left[\eta-z\right],t\in\left[a,b\right],\ m=1,2,...,$$

де $z\in D_a$, $\eta\in D_b$ є параметрами. Зауважимо, що всі функції $x_m\left(t,z,\eta\right)$ задовольняють „модельні крайові умови“ (5) для будь-яких значень параметрів $z,\eta\ \in\mathbb{R}^n$.

Наступне твердження встановлює рівномірну збіжність послідовності (13) до деякої параметризованої граничної функції.

Теорема 1. *Припустимо, що виконуються* ***Умова 1-Умова 3****.*

Тоді, для будь-яких фіксованих $(z,\eta)\in D\times D_b$:

1.Всі функції послідовності (13) є неперервно диференційовні на відрізку $t\in[a,b]$*, мають значення в область* D *і задовольняють умовам (5).*

2. Послідовність функцій (13) рівномірно збігається відносно $t\in[a,b]$ *при* $m\to\infty$ *до граничної функції*

$$x_\infty(t,z,\eta)=\lim_{m\to\infty}x_m(t,z,\eta).$$

3. Гранична функція задовольняє „модельні умови“

$$x_\infty(a,z,\eta)=z,\ \ x_\infty(b,z,\eta)=\eta.$$

4. Функція $x_\infty\left(t,z,\eta\right)$ *є единим неперервно диферкнційовним розв'язком інтегрального рівняння*

$$x(t)=z+\int\limits_a^t f(s,x(s))ds-\frac{t-a}{b-a}\int\limits_a^b f(s,x(s))ds+\frac{t-a}{b-a}\left[\eta-z\right],\ t\in\left[a,b\right],$$

в області D.

Іншими словами, $x_\infty\left(t,z,\eta\right)$ *задовольняє задачу Коші для модифікованої системи диференціальних рівнянь:*

$$\frac{dx}{dt}=f(t,x)\ +\frac{1}{b-a}\Delta(z,\eta),\ \ x\left(a\right)=z,\ \ t\in\left[a,b\right],$$

де $\Delta(z,\eta):D_a\times D_b\to\mathbb{R}^n$ *це відображення, яке визначене формулою:*

$$\Delta(z,\eta)=\eta-z-\int\limits_a^b f(s,x_\infty(s,z,\eta))ds.$$

5.Справедлива оцінка

$$\left|x_\infty(\cdot,z,\eta)-x_m(\cdot,z,\eta)\right|\leqslant\frac{10}{9}\alpha_1(t,a,b-a)Q^m\left(1_n-Q\right)^{-1}\delta_{[a,b],D}(f),\qquad(14)$$

для всіх $t\in[a,b]$ *і* $m\geq0$*, де* $\delta_{[a,b],D}(f)$ *задається формулою (9),*

$$\alpha_1(t,a,b-a)=2\left(t-a\right)\left(1-\frac{t-a}{b-a}\right),$$

причому

$$\alpha_1(t,a,b-a)\leq\frac{b-a}{2},$$

а матриця Q *має вигляд (10).*

Доведення. Доведення може бути проведено аналогічно, як у Теоремі 1 [4]. А саме, на основі Лем, що доведені у [10], встановлюється, що при умовах теореми для фіксованих $z \in D_a$, $\eta \in D_b$ і всіх $t \in [a, b]$ послідовність функцій (13) належить області D і є послідовністю Коші, тобто рівномірно збіжною, у Банаховому просторі неперервних вектор-функцій $C([a,b], \mathbb{R}^n)$ з стандартною рівномірною нормою.

2. Зв'язок граничної функції $x_\infty(\cdot, z, \eta)$ з розв'язком вихідної інтегральної крайової задачі.

Теорема 2. *В умовах Теореми 1 гранична функція*

$$x_\infty(t, z^*, \eta^*) = \lim_{m\to\infty} x_m(t, z^*, \eta^*)$$

послідовності (13) є неперервно диференцыйовним розв'язком інтегральної крайової задачі (1)-(2) тоді і тільки тоді, коли пара (z^*, η^*) задовольняє систему $2n$ алгебраїчних чи трансцендентних, так званих „визначальних рівнянь“:

$$\begin{aligned} \Delta(z,\eta) &= \eta - z - \int_a^b f(s, x_\infty(s,z,\eta))ds = 0, \\ \Lambda(z,\eta) &= \int_a^b p(s, x_\infty(s,z,\eta),\ f(s, x_\infty(s,z,\eta)))ds - d = 0. \end{aligned} \tag{15}$$

Доведення. Доведення може бути проведено аналогічно, як у Теоремах 2,3 [4].

Наступне твердження показує, що система „визначальних рівнянь“ (15) виявляє всі можливі розв'язки інтегральної крайової задачі (1)-(2), які належать області D і значення яких в точках $t = a$ і $t = b$ належать відповідно множинам D_a і D_b.

Теорема 3. *Нехай виконуються усі умови Теореми 1.*

1. Якщо, існують вектори $(z^0, \eta^0) \in D_a \times D_b$, які задовольняють систему визначальних рівнянь (15), тоді інтегральна крайова задача (1)-(2) має неперервно диференційовний розв'язок $x^0(\cdot)$ такий, що

$$x^0(a) = z^0,\ x^0(b) = \eta^0.$$

Крім того, цей розв'язок є граничною функцією послідовності (13)

$$x^0(t) = x_\infty(t, z^0, \eta^0) = \lim_{m\to\infty} x_m(t, z^0, \eta^0),\ t \in [a,b].$$

2. І навпаки, якщо інтегральна крайова задача (1)-(2) має розв'язок $x^0(\cdot) \in D$, то система „визначальних рівнянь“ (15) задовольняється при

$$z = x^0(a),\ \eta = x^0(b).$$

Зауважимо, що розв'язність системи „визначальних рівнянь“ (15) може бути встановлена на основі властивостей „наближеної системи визначальних рівнянь“

$$\Delta_m(z,\eta) = \eta - z - \int_a^b f(s, x_m(s,z,\eta))ds,$$

$$\Lambda_m(z,\eta) = \int_a^b p(s, x_m(s,z,\eta),\ f(s, x_m(s,z,\eta)))ds - d = 0, \qquad (16)$$

яка може бути побудована явно.

На основі нерівностей (3), (4) і (14), врахувавши що

$$\int_a^b \alpha_1(t,a,b-a)dt = \frac{(b-a)^2}{3},$$

прямим обчисленням можна довести справедливість наступного твердження.

Лема 1. *Припустимо, що мають місце умови Теореми 1 і крім того виконуються умови Ліпшиця (3), (4).*

Тоді для точної і наближеної визначальних функцій (15) і (16) мають місце наступні оцінки для будь-яких пар векторів $(z,\eta)\ \in D_a \times D_b$ *і* $m \geq 1$:

$$|\Delta(z,\eta) - \Delta_m(z,\eta)| \leq \frac{10(b-a)^2}{27} K_f\ Q^m\,(1_n - Q)^{-1}\,\delta_{[a,b],D}(f),$$
$$|\Lambda(z,\eta) - \Lambda_m(z,\eta)| \leq \frac{10(b-a)^2}{27} K\ Q^m\,(1_n - Q)^{-1}\,\delta_{[a,b],D}(f). \qquad (17)$$

Наступна теорема дає конструктивні достатні умови розв'язності інтегральної крайової задачі (1)-(2) на основі властивостей „наближеної системи визначальних рівнянь“(16).

Нам потрібно наступне означення для одного спеціального співвідношення між двома вектор-функціями.

Означення 1. *([7] , Означення 3) Нехай* $H \subset \mathbb{R}^p$ *є деяка непорожня множина. Для будь-якої пари вектор-функцій*

$$f_j(x) = col(f_{j,1}(x), ..., f_{j,k}(x)) : H \to \mathbb{R}^p,\ j = 1,2$$

будемо писати, що має місце співвідношення

$$f_1 \rhd_H f_2 \qquad (18)$$

тоді і тільки тоді, коли існує функція $k : H \to \{1,2,...,p\}$, *така що*

$$f_{1,k(x)} > f_{2,k(x)},$$

для всіх $x \in H$.

Зауважимо, що (18) означає, що в кожній точці $x \in H$ принаймні одна із компонент вектора $f_1(x)$, а саме $k(x)-$ва компонента, більша ніж відповідна компонента вектора $f_2(x)$. Бачимо, що цей номер компоненти залежить від точки x.

Теорема 4. *Припустимо, що виконуються умови Леми 1. Крім того можна вказати таке* $m \geq 1$ *і множину* $\Omega \subset \mathbb{R}^{2n}$ *вигляду*

$$\Omega := D_1 \times D_2,$$

де $D_1 \subset D_a$, $D_2 \subset D_b$ є певні обмежені відкриті множини, такі що відображення

$$H_m(z,\eta) = \begin{pmatrix} \eta - z - \int\limits_a^b f(s, x_m(s,z,\eta))ds \\ \int\limits_a^b p(s, x_m(s,z,\eta),\ f(s, x_m(s,z,\eta)))ds - d \end{pmatrix} \tag{19}$$

задовольняє співвідношення

$$|H_m(z,\eta)| \rhd_{\partial\Omega} \begin{bmatrix} \frac{10(b-a)^2}{27} K_f\ Q^m\,(1_n - Q)^{-1}\,\delta_{[a,b],D}(f) \\ \frac{10(b-a)^2}{27} K\ Q^m\,(1_n - Q)^{-1}\,\delta_{[a,b],D}(f) \end{bmatrix}$$

на границі $\partial\Omega$ області Ω.

Якщо крім того, топологічний степінь Брауера відображення H_m відносно множини Ω (і відносно 0) не дорівнює нулю

$$\deg(H_m, \Omega, 0) \neq 0,$$

тоді існує пара $(z^*, \eta^*) \in D_1 \times D_2$ така, що функція

$$x^*(\cdot) = \ x_\infty(\cdot, z^*, \eta^*) = \lim_{m\to\infty} x_m(t, z^*, \eta^*)$$

на відрізку $[a,b]$ є неперервно диференційовним розв'язком інтегральної крайової задачі (1)-(2).

Доведення. Доведення можна провести по аналогії як у Теоремі 4 [12].

Приклад 1. *Застосуємо чисельно-аналітичний підхід, що описаний вище на відрізку $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ до системи диференціальних рівнянь*

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = x_2^2(t) - \frac{t}{5}x_1(t) + \frac{t^3}{100} - \frac{t^2}{25} := f_1(t, x_1, x_2),$$

$$\frac{dx_2(t)}{dt} = \frac{t^2}{10}x_2(t) + \frac{t}{8}x_1(t) - \frac{21}{800}t^3 + \frac{1}{16}t + \frac{1}{5} := f_2(t, x_1, x_2), \tag{20}$$

з інтегральними крайовими умовами

$$\int\limits_0^{\frac{1}{2}} s^2 x^2(s) ds = \frac{1}{4000} = d_1$$

$$\int\limits_0^{\frac{1}{2}} x_1'(s)ds = \int\limits_0^{\frac{1}{2}} f_1(s, x_1(s), x_2(s))ds = d_2 = \frac{1}{80} \tag{21}$$

Можна перевірити, що одним з розвязків крайової задачі (20)-(21) є пара функцій

$$x_1^*(t) = \frac{t^2}{20} - \frac{1}{2},\ x_2^*(t) = \frac{t}{5}. \tag{22}$$

Введемо наступні параметри:

$$z := x(0) = col(x_1(0), x_2(0)) = col(z_1, z_2),$$
$$\eta := x\left(\frac{1}{2}\right) = col\left(x_1\left(\frac{1}{2}\right), x_2\left(\frac{1}{2}\right)\right) = col\left(\eta_1, \eta_2\right).$$

Виберемо області D_a і D_b:

$$D_a = D_b = \{(x_1, x_2) : -0.6 \le x_1 \le 0.1,\ -1 \le x_2 \le 0\}.$$

У цьому випадку, множина $D_{a,b}$ має вигляд

$$D_{a,b} = D_a = D_b.$$

Виберемо вектор

$$\rho := col\left(0.2;\ 0.2\right),$$

тоді область D буде наступною:

$$D = \{(x_1, x_2) : -0.8 \le x_1 \le 0.3,\ -1.2 \le x_2 \le 0.2\}.$$

Прямі обчислення показують, що умови Ліпшиця (3), (4) для правої частини (20) в області D виконується з матрицею

$$K = \begin{bmatrix} 1/10 & 2/10 \\ 1/16 & 1/40 \end{bmatrix}$$

і маємо $$Q = \tfrac{3}{20}\begin{bmatrix} 1/10 & 2/5 \\ 1/16 & 1/40 \end{bmatrix},\ r(Q) = 0.03375 < 1,$$

$$\delta_{[a,b],D}(f) := \frac{1}{2}\left[\max_{(t,x)\in\left[0,\frac{1}{2}\right]\times D} f(t,x) - \min_{(t,x)\in\left[0,\frac{1}{2}\right]\times D} f(t,x)\right] = \begin{bmatrix} 0.535 \\ 0.036875 \end{bmatrix},$$

$$\rho = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.2 \end{bmatrix} \ge \frac{b-a}{2}\delta_{[a,b],D}(f) = \begin{bmatrix} 0.19375 \\ 0.01359375 \end{bmatrix}.$$

Так, перевірили, що всі умови Теореми 1 виконуються і тому послідовність функцій (13) для цього прикладу є збіжною.

Чисельні розрахунки показують, що розв'язком наближеної системи визначальних рівнянь вигляду (16), при $m = 1, 2, 3$ є числові значення, що представлені в Табл. 1.

Похибка третьої апроксимації ($m = 3$) наступна:

$$\max_{t\in[0,\frac{1}{2}]} |x_1^*(t) - x_{31}(t)| \le 9.7 \cdot 10^{-9}, \qquad \max_{t\in[0,\frac{1}{2}]} |x_2^*(t) - x_{32}(t)| \le 3 \cdot 10^{-10}.$$

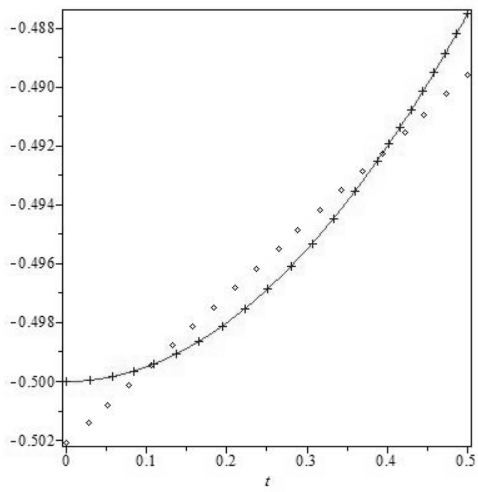
Згідно Теореми 3 число розв'язків алгебраїчної визначальної системи (16), співпадає з числом розв'язків даної інтегральної крайової задачі.

Розрахунки показують, що система наближених визначальних алгебраїчних рівнянь (16), при $m = 0, 1, 2, 3$, окрім розв'язків представлених в Табл. 1., має ще інші розв'язки, які наведено в Табл. 2.

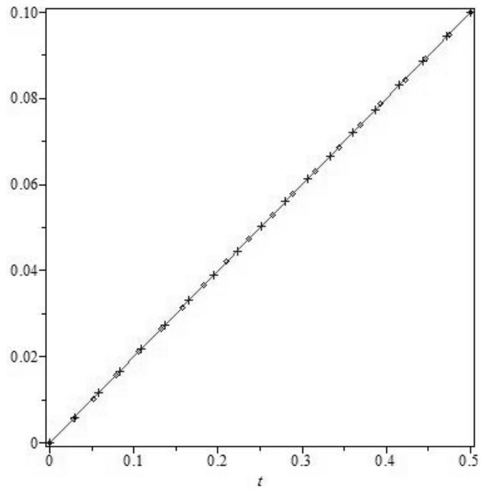
	m=0	m=1	m=2	m=3
z_1	-0.5020833332	-0.5000068237	-0.4999999633	-0.5000000089
z_2	$-1.444245992 \cdot 10^{-12}$	$4.95780167 \cdot 10^{-7}$	$-1.14252226 \cdot 10^{-8}$	$-1.919575672 \cdot 10^{-10}$
η_1	-0.4895833332	-0.4875068237	-0.4874999633	-0.4875000089
η_2	0.1	0.10000044	0.09999998849	0.09999999963

Таблиця 1.

Наближені значення параметрів для першого (22) розв'язку



а) перша компонента



б) друга компонента

Рис. 1. Перший розв'язок (22) (лінія) та його нульове ($\diamond$) і третє наближення ($\times$).

Підставивши третє наближення $\widetilde{x}_3(t) = col(\widetilde{x}_{31}(t), \widetilde{x}_{32}(t))$ до другого розв'язку в систему диференціальних рівнянь (20) отримаємо наступну нев'язку:

$$\max_{t\in\left[0,\frac{1}{2}\right]} \left| \widetilde{x}'_{31}(t) - \widetilde{x}^2_{32}(t) + \tfrac{t}{5}\widetilde{x}_{31}(t) - \tfrac{t^3}{100} + \tfrac{t^2}{25} \right| \approx 1.5 \cdot 10^{-9},$$

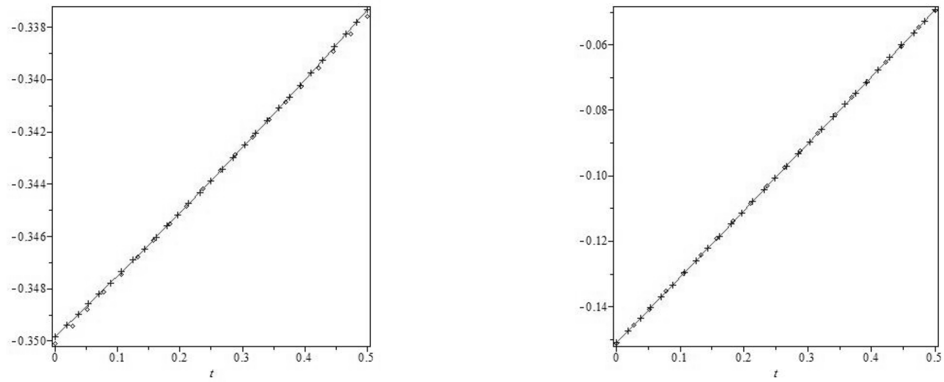
$$\max_{t\in\left[0,\frac{1}{2}\right]} \left| \widetilde{x}'_{32}(t) - \tfrac{t^2}{10}\widetilde{x}_{32}(t) - \tfrac{t}{8}\widetilde{x}_{31}(t) + \tfrac{21}{800}t^3 - \tfrac{1}{16}t - \tfrac{1}{5} \right| \approx 5 \cdot 10^{-10}.$$

На Рис.2 показано графіки нульового, першого та третього наближення до другого розв'язку інтегральної КЗ.

	m=0	m=1	m=2	m=3
$\widetilde{z}_1$	-0.3500955256	-0.3498246512	-0.349827723	-0.3498277249
$\widetilde{z}_2$	-0.1512243065	-0.1510006429	-0.1510009307	-0.1510009229
$\widetilde{\eta}_1$	-0.3375955256	-0.3373246512	-0.337327723	-0.3373277249
$\widetilde{\eta}_2$	-0.0494741289	-0.0492490804	-0.4924938195e-1	-0.04924937409

Таблиця 2.

Наближені значення параметрів для другого розв'язку ІКЗ



а) перша компонента б) друга компонента

Рис. 2. Нульове ($\diamond$) , перше ($\times$) та третє (лінія) наближення другого розв'язку.

Список використаної літератури

1. *Benchohra M., Nieto J.J. and Qahab A.* Second- order boundary value proble with integral boundary conditions, *Boundary Value Problems* 2011, 2011:260309, doi:10.1155/2011/260309, 9 pages
2. *Mao Jinxiu, Zhao Zengqin and Xu Naiwei*, On existence and uniqueness of positive solutions for integral boundary value problems, *Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ.,* 2010, No.16, 1-8
3. Rontó M. and Marynets. K., On numerical-analytic method for nonlinear boundary value problem with integral conditions, *Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ.,* No. 99 (2012, p.1-23), http.//www.math. u-szeged.hu/ejqtde/
4. *Rontó M., Varha Y. and Marynets K.,* Further results on the investigation of solutions of integral boundary value problems, *Tatra Mountains Mathematical Publications, **63** (2015),* 247-267, DOI:10.1515/tmmp-2015-0035
5. *Ronto A., Ronto M. and Varha J.,* A new approach to non-local boundary value problems for ordinary differential systems, *Applied Mathematics and Computation,* (2015), **250,** 689-700
6. *Ronto A. and Ronto M.*, Periodic successive approximations and interval halving, *Miskolc Mathematical Notes,* **13,** No.2 (2012), 459-482
7. *Ronto A. and Ronto M.,* On a Cauchy-Nicoletti type three-point boundary value problem for linear differential equations with argument deviation, *Miskolc Mathematical Notes,* **10,** No.2 (2009), 173-205
8. *Варга Я.В.* Дослідження розв'язків деяких нелінійних функціональних та інтегральних крайових задач на основі параметризації: автореф. на здобуття наук. ступеня канд. фіз.-мат. наук: спец. 01.01.02 "Диференціальні рівняння"/Я.В. Варга – Ужгород, 2017.–22 с.
9. *Ronto A., Ronto M. and Shchobak N,* Constructive analysis of periodic solutions with interval halving, *Boundary Value Problems* 2013 2013:57, doi:10.1186/1687-2770-2013-57, 34 pages
10. *M. Rontó and J. Mészáros,* "Some remarks on the convergence of the numerical-analytical method of successive approximations," Ukrainian Math. J., vol. 48, no. 1, pp. 101–107, 1996. [Online]. Available: http://dx.doi.org/10.1007/BF02390987
11. *Ronto A., Ronto M. and Shchobak N,* Notes on interval halving procedure for periodic and two-point problems, *Boundary Value Problems* 2014 2014:164, doi:10.1186/s13661-014-0164-9, 20 pages
12. *Rontó M. and Varha Y.,* Constructive existence analysis of solutions of non-linear integral boundary value problems, *Miskolc Mathematical Notes,* **15,** No.2 (2014), 725-742
13. *Rontó M. and Varha Y.,* Successive approximations and interval halving for integral boundary value problems, *Miskolc Mathematical Notes*, vol. 16 , No.2 (2015), 1129-1152
14. *Ronto A., Ronto M. and Varha, J.,* On non-linear boundary value problems and parametrisation at multiple nodes, *Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ.,* 2016, No. 80, 1–18; doi: 10.14232/ejqtde.2016.1.80 http://www.math.u-szeged.hu/ejqtde/

Одержано 04.07.2017