УДК 512.53

Ю. В. Жучок (Луганський нац. ун-т ім. Т. Шевченка, Старобільськ, Україна)

МОНОЇДИ ЕНДОМОРФІЗМІВ НАПІВРЕШІТОК НАПІВГРУП

We prove that the endomorphism monoid of a semilattice of semigroups, which are semilattice indecomposable, is isomorphically embedded into the wreath product of a transformation semigroup with a small category.

Доведено, що моноїд ендоморфізмів напіврешітки напівгруп, нерозкладних у напіврешітку, ізоморфно занурюється у вінцевий добуток напівгрупи перетворень з малою категорією.

Похідні структури алгебраїчних систем є одним з інструментів дослідження будови й класифікації самих систем. В багатьох випадках похідна структура містить суттєву інформацію про загальні властивості даної алгебраїчної системи. До найбільш поширених похідних структур належать решітки підалгебр, решітки конгруенцій, групи автоморфізмів, моноїди ендоморфізмів та ін. Особлива увага при вивченні моноїдів ендоморфізмів приділяється таким проблемам як опис абстрактних характеристик, дослідження алгебраїчних та комбінаторних властивостей, визначеність алгебраїчних систем їх ендоморфізмами, побудова точних зображень тощо (див., напр., [1–5]).

Останнім часом у теорії напівгруп для опису зображень моноїдів ендоморфізмів досить активно використовується конструкція вінцевого добутку та деякі її модифікації. Так, В. Флейшер [6] ввів конструкцію вінцевого добутку моноїда з малою категорією й використав її для опису точного зображення моноїда ендоморфізмів довільної дії [7]. У. Кнауер і М. Ніпорте [8] довели, що моноїд сильних ендоморфізмів неорієнтованого скінченного графу без кратних ребер є ізоморфним вінцевому добутку групи автоморфізмів канонічного сильного фактор-графа з деякою категорією. В [9] було доведено, що напівгрупа ендоморфізмів вільного добутку напівгруп заданого класу ізоморфна вінцевому добутку напівгрупи перетворень з малою категорією. Подібні результати для неорієнтованих незв'язних гіперграфів без кратних ребер і деяких відповідностей на напівгрупі ендоморфізмів відношення еквівалентності були отримані в [10] та [11] відповідно. В [12] було показано, що група автоморфізмів ортогональної суми напівгруп є ізоморфною прямому добутку вінцевих добутків груп. Для груп автоморфізмів довільної напівгрупи схожу характеристику наведено в [13]. Природньою в цьому напрямку є задача опису зображень моноїда ендоморфізмів довільної напівгрупи.

В цій роботі, використовуючи, що будь-яка напівгрупа є напіврешіткою нерозкладних у напіврешітку напівгруп, побудовано ізоморфне занурення моноїда ендоморфізмів напівгрупи у вінцевий добуток моноїда з малою категорією (теорема 1). Отриманий результат було анонсовано в [14]. Крім того, описується зображення моноїда ендоморфізмів напіврешітки напівгруп, які не розкладаються у напіврешітку, унарними відношеннями (теорема 2).

1. Попередні відомості. Нехай I — напіврешітка, тобто комутативна напівгрупа ідемпотентів. Напівгрупа S називається *напіврешіткою I напівгруп* $S_i, i \in I$, якщо виконуються наступні умови:

1) $S = \bigcup_{i\in I} S_i$;
2) $S_i \cap S_j = \emptyset$ для всіх відмінних $i, j \in I$;
3) $S_iS_j \subseteq S_{ij}$ для будь-яких $i, j \in I$.

Якщо S — напіврешітка I напівгруп $S_i, i \in I$, то сімейство $D = \{S_i|i \in I\}$ називають *декомпозицією* напівгрупи S у напіврешітку напівгруп, а напівгрупи $S_i, i \in I$, — *компонентами* в D.

Напівгрупа S називається *нерозкладною у напіврешітку*, якщо $D = \{S\}$ є єдиною її декомпозицією у напіврешітку напівгруп.

Добре відомо (див., напр., [15]), що будь-яка напівгрупа має найбільшу декомпозицію у напіврешітку своїх піднапівгруп, при цьому компоненти такої декомпозиції є нерозкладними у напіврешітку. Враховуючи цей результат, будемо позначати довільну напівгрупу S також через $\bigcup_{i\in I} S_i$, вважаючи, що $\{S_i|i \in I\}$ — це найбільша декомпозиція напівгрупи S у напіврешітку напівгруп.

Нехай S — довільна напівгрупа. Множину всіх гомоморфізмів напівгрупи S в напівгрупу T будемо позначати через $Hom(S;T)$.

Моноїд усіх ендоморфізмів напівгрупи S позначається через $End(S)$.

Для довільного відображення $\varphi : A \to B$ і непорожньої підмножини $Y \subseteq A$ через $\varphi|_Y$ позначається обмеження φ на Y.

Лема 1. *Нехай $D = \{S_i \mid i \in I\}$ — найбільша декомпозиція напівгрупи S у напіврешітку напівгруп, $\varphi \in End(S)$. Тоді для кожного $i \in I$ знайдеться $j \in I$, таке що $\varphi|_{S_i} \in Hom(S_i; S_j)$.*

Доведення. Припустимо, що існує $i \in I$, таке що $S_i\varphi \nsubseteq S_j$ для всіх $j \in I$, та покладемо $\Lambda_i = \{\alpha \in I|S_i\varphi \cap S_\alpha \neq \emptyset\}$. Зрозуміло, що $S_i\varphi$ є напіврешіткою Λ_i напівгруп $S^*_\alpha = S_i\varphi \cap S_\alpha, \alpha \in \Lambda_i$, при цьому $|\Lambda_i| \geq 2$. Але тоді, як неважко помітити, S_i є напіврешіткою Λ_i напівгруп $(S^*_\alpha)\varphi^{-1}, \alpha \in \Lambda_i$, що суперечить умові нерозкладності компонент з D у напіврешітку напівгруп. Отже, $\varphi|_{S_i} \in Hom(S_i; S_j)$ для деякого $j \in I$.

Лему доведено.

Відмітимо, що обернене твердження до цієї леми в загальному випадку невірне (див. приклади п. 2).

Далі визначимо вінцевий добуток моноїда з малою категорією. Для малої категорії $\mathscr{K}$ з множиною об'єктів $X = Ob\mathscr{K}$ покладемо

$$M = \bigcup_{a,b\in X} Mor_{\mathscr{K}}(a; b)$$

та позначимо через $Map(X; M)$ множину всіх відображень X в M.

Нехай T — моноїд з одиницею 1, який діє зліва на X, і

$$V = \{(t; f)|t \in T, f \in Map(X; M), xf \in Mor_{\mathscr{K}}(x; tx) \text{ для } x \in X\}.$$

Визначимо бінарну операцію на V за правилом:

$$(r; f)(p; g) = (rp; f_pg),$$

де $x(f_pg) = (px)f\,xg$ для всіх $x \in X$ і $(px)f\,xg$ — це композиція морфізмів в категорії $\mathscr{K}$.

Множина V з такою операцією є моноїдом з одиницею $(1; e)$, де $e \in Map(X; M)$ — таке відображення, що $xe \in Mor(x; x)$ є тотожнім морфізмом id_x для кожного об'єкту x в $\mathscr{K}$.

Моноїд V називається *вінцевим добутком* моноїда T з малою категорією $\mathscr{K}$ і позначається через $T\, wr\, \mathscr{K}$ (див., напр., [7]).

Відмітимо, що композиція відображень всюди в цій роботі визначається справа наліво.

2. Моноїди ендоморфізмів напіврешіток напівгруп. Нехай S — довільна напівгрупа, $D = \{S_i \mid i \in I\}$ — найбільша декомпозиція напівгрупи S у напіврешітку напівгруп.

Визначимо малу категорію $\mathscr{C}$, поклавши

$$Ob\mathscr{C} = D, \ \ Mor_{\mathscr{C}}(S_i; S_j) = Hom(S_i; S_j),$$

$$Mor\mathscr{C} = \bigcup_{i,j \in I} Mor_{\mathscr{C}}(S_i; S_j).$$

Моноїд всіх перетворень ζ множини I, таких що $Mor_{\mathscr{C}}(S_i; S_{i\zeta}) \neq \varnothing$ для всіх $i \in I$, позначимо через $T(I)$.

Неважко помітити, що напівгрупа $T(I)$ природньо діє зліва на об'єкти категорії $\mathscr{C}$ і ми отримуємо такий вінцевий добуток:

$$T(I)\, wr\, \mathscr{C} = \{(\varphi; f) | \varphi \in T(I)\,, f \in Map(Ob\mathscr{C}; Mor\mathscr{C}), S_i f \in Mor_{\mathscr{C}}(S_i; \varphi S_i)\}.$$

Якщо $\varphi \in End(S)$, то через φ^* позначимо перетворення множини I, яке індукується ендоморфізмом φ, тобто

$$\varphi^* : I \to I : i \mapsto i\varphi^* = j, \ \ \textit{якщо} \ \ S_i\varphi \subseteq S_j.$$

Згідно Леми 1 (див. п. 1) перетворення φ^* є коректно визначеним.

Основним результатом є наступна теорема.

Теорема 1. *Моноїд ендоморфізмів $End(\bigcup_{i \in I} S_i)$ напіврешітки I напівгруп $S_i, i \in I$, ізоморфно занурюється у вінцевий добуток $T(I)\, wr\, \mathscr{C}$ моноїда перетворень $T(I)$ з малою категорією $\mathscr{C}$.*

Доведення. Визначимо відображення ξ моноїда $End(\bigcup_{i \in I} S_i)$ у вінцевий добуток $T(I)\, wr\, \mathscr{C}$ за правилом:

$$\xi : \varphi \mapsto (\varphi^*; f), \textit{де} \ \ f : S_i \mapsto \varphi|_{S_i} \ \ (i \in I).$$

Очевидно, ξ є ін'єктивним відображенням.

Для будь-яких $\varphi, \psi \in End(\bigcup_{i \in I} S_i)$ маємо

$$(\varphi\psi)\xi = ((\varphi\psi)^*; \mu), \textit{де} \ \ \mu : S_i \mapsto (\varphi\psi)|_{S_i},$$

$$\varphi\xi = (\varphi^*; f), f : S_i \mapsto \varphi|_{S_i} \ \ \textit{та} \ \ \psi\xi = (\psi^*; g), g : S_i \mapsto \psi|_{S_i},$$

$$\varphi\xi\, \psi\xi = (\varphi^*; f)(\psi^*; g) = (\varphi^*\psi^*; f_{\psi^*}g).$$

Ясно, що $(\varphi\psi)^* = \varphi^*\psi^*$. Більш того, для всіх $S_i \in Ob\mathscr{C}$

$$S_i\, \mu = (\varphi\psi)|_{S_i} = \varphi|_{S_i\psi} \circ \psi|_{S_i} = \varphi|_{S_{i\psi^*}} \circ \psi|_{S_i} =$$

$$= S_{i\psi^*} f \circ S_i g = (\psi^* S_i) f \circ S_i g = S_i(f_{\psi^*} g),$$

де $\circ$ — композиція часткових перетворень на $S = \bigcup_{i \in I} S_i$.

Таким чином, $f_{\psi^*} g = \mu$, і отже, ξ — мономорфізм.

Теорему доведено.

Далі побудуємо інше зображення моноїда ендоморфізмів напіврешітки нерозкладних у напіврешітку напівгруп.

Нехай $\mathscr{C}$ — мала категорія, визначена вище. Покладемо $Mor^0\mathscr{C} = Mor\mathscr{C} \cup \{0\}$, $0 \notin Mor\mathscr{C}$, та визначимо операцію на цій множині в такий спосіб:

$$\varphi\psi = \begin{cases} \varphi \circ \psi, & \varphi \neq 0 \neq \psi \ \textit{ та } \ im(\psi) \subseteq dom(\varphi), \\ 0 & \textit{в інших випадках,} \end{cases}$$

де $\varphi \circ \psi$ — композиція гомоморфізмів.

Зрозуміло, що $Mor^0\mathscr{C}$ є напівгрупою відносно щойно визначеної операції. Крім того, з точністю до ізоморфізму $Mor^0\mathscr{C}$ міститься в напівгрупі всіх бінарних відношень на S.

Нагадаємо, що множина всіх підмножин напівгрупи S з операцією множення $XY = \{xy \,|\, x \in X, y \in Y\}$ для всіх $X, Y \subseteq S$, є напівгрупою, яка називається *глобальною наднапівгрупою* напівгрупи S і позначається через $Gl(S)$.

Для всіх $i \in I$ покладемо

$$M_{i*} = \bigcup_{j \in I} Mor_{\mathscr{C}}(S_i; S_j) \ \text{ і } \ L_{Mor^0\mathscr{C}} = \{M_{i*} | i \in I\} \cup \{\{0\}\}.$$

Множину всіх трансверсалей, що відповідають розбиттю $L_{Mor^0\mathscr{C}}$ напівгрупи $Mor^0\mathscr{C}$, позначимо через $Tr(L_{Mor^0\mathscr{C}})$.

Безпосередня перевірка свідчить, що $Tr(L_{Mor^0\mathscr{C}})$ є піднапівгрупою глобальної наднапівгрупи $Gl(Mor^0\mathscr{C})$.

Наступна теорема описує зображення моноїда ендоморфізмів напівгрупи унарними відношеннями.

Теорема 2. *Моноїд ендоморфізмів $End(\bigcup_{i \in I} S_i)$ напіврешітки I напівгруп $S_i, i \in I$, ізоморфно занурюється у напівгрупу $Tr(L_{Mor^0\mathscr{C}})$.*

Доведення. Неважко пересвідчитись, що відображення ζ моноїда ендоморфізмів $End(\bigcup_{i \in I} S_i)$ у напівгрупу $Tr(L_{Mor^0\mathscr{C}})$, яке визначається за правилом:

$$f\zeta = \{f|_{S_i} : i \in I\} \cup \{0\} \ \textit{ для всіх } \ f \in End(\bigcup_{i \in I} S_i),$$

є ін'єктивним гомоморфізмом.

Теорему доведено.

Наведемо далі приклади застосування Теореми 1.

Приклад 1. Нехай X — довільна множина з потужністю $|X| \geq 2$ та X^+ — вільна напівгрупа, породжена X. Розглянемо зображення напівгрупи ендоморфізмів $End(X^+)$.

Позначимо напіврешітку всіх непорожніх підмножин X відносно операції об'єднання множин через $U(X)$. Для всіх $A \in U(X)$ нехай

$$X_A = \{w \in X^+ | c(w) = A\},$$

де $c(w)$ — зміст слова w. Симетрична напівгрупа всіх перетворень множини X позначається через $\Im(X)$.

Відомо, що $\{X_A | A \in U(X)\}$ — найбільша декомпозиція вільної напівгрупи X^+ у напіврешітку $U(X)$ піднапівгруп $X_A, A \in U(X)$. Більш того, гомоморфізми напівгруп $X_A, A \in U(X)$, в $X_B, B \in U(X)$, визначаються відображеннями $f : A \to X^+$, такими що $\bigcup_{w \in Af} c(w) = B$. Це означає, що $T(U(X)) = \Im(U(X))$.

За Теоремою 1, $End(X^+)$ занурюється у вінцевий добуток $\Im(U(X))wr\mathscr{C}$ симетричної напівгрупи $\Im(U(X))$ з відповідною малою категорією $\mathscr{C}$. Відзначимо, що $End(U(X))$ є власною піднапівгрупою напівгрупи $T(U(X))$. Дійсно, для різних елементів $a, b \in X$ нехай $\psi : X_{\{a\}} \to X_{\{b\}}$ позначає ізоморфізм $X_{\{a\}}$ на $X_{\{b\}}$. Визначимо перетворення ξ напівгрупи X^+ за правилом:

$$w\xi = \begin{cases} w\psi, & w \in X_{\{a\}}, \\ w & \textit{в інших випадках} \end{cases}$$

для всіх $w \in X^+$. Тоді $\xi \notin End(X^+)$, оскільки

$$\xi(ab) = ab \neq b^2 = \xi(a)\xi(b).$$

Таким чином, перетворення напіврешітки $U(X)$, яке індукується відображенням ξ, не належить $End(U(X))$.

Приклад 2. Нехай $S(X)$ — симетрична група на скінченній множині X, де $|X| > 1$, та $I = \{0, 1\}$ — мультиплікативна напіврешітка. Тоді симетрична напівгрупа $\Im(X)$ є нетривіальною напіврешіткою I піднапівгруп $S_0 = \Im(X) \setminus S(X)$ і $S_1 = S(X)$.

Ясно, що

$$End(I) = \{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \}.$$

Опис всіх гомоморфізмів S_i на S_j, де $i, j \in I$, можна знайти в [1]. В цьому випадку, $End(\Im(X))$ занурюється у вінцевий добуток $End(I)wr\mathscr{C}$, де $\mathscr{C}$ — підходяща мала категорія.

Отже, в теоремі 1 замість напівгрупи перетворень $T(I)$ можна використовувати й моноїд ендоморфізмів $End(I)$.

Відмітимо, що отримані у роботі результати можна розглянути і в більш загальному випадку, для моноїдів ендоморфізмів сполуки напівгруп, нерозкладних у сполуку.

Список використаної літератури

1. *Schein B. M., Teclezghi B.* Endomorphisms of finite full transformation semigroups // Proc. Amer. Math. Soc. – 1998. – **126**. – P. 2579–2587.
2. *Mazorchuk V.* Endomorphisms of B_n, PB_n and C_n // Comm. Algebra. – 2002. – **30**. – P. 3489–3513.
3. *Araujo J., Konieczny J.* Automorphisms of endomorphism monoids of relatively free bands // Proc. Edinburgh Math. Soc. – 2007. – **50**. – P. 1–21.
4. *Fernandes V. H., Jesus M. M., Maltsev V., Mitchell J. D.* Endomorphisms of the semigroup of order-preserving mappings // Sem. Forum. – 2010. – **81**. – P. 277–285.
5. *Bondar E. A., Zhuchok Yu. V.* Semigroups of strong endomorphisms of infinite graphs and hypergraphs // Ukr. Math. J. – 2013. – **65**, no. 6. – P. 823–834.
6. *Флейшер В.* О сплетении моноидов с категориями // Тр. Акад. наук ЭССР. – 1986. – **35**. – С. 237–243.

7. *Fleischer V., Knauer U.* Endomorphism monoids of acts are wreath products of monoids with small categories. In.: LNM. – 1988. – **1320**, Berlin-Heidelberg-New York. – P. 84–96.
8. *Knauer U., Nieporte M.* Endomorphisms of graphs I. The monoid of strong endomorphisms // Arch. Math. – 1989. – **52**. – P. 607–614.
9. *Zhuchok Yu. V.* Endomorphism semigroups of some free products // Jour. of Math. Scien. – 2012. – **187**, no. 2. – P. 146–152.
10. *Zhuchok Yu. V.* The monoid of endomorphisms of disconnected hypergraphs // Alg. and Discr. Math. – 2013. – **1**, no. 16. – P. 134–150.
11. *Zhuchok Yu. V., Toichkina E. A.* Correspondences of the semigroup of endomorphisms of an equivalence relation // Math. Notes. – 2015. – **97**, no. 2. – P. 201–212.
12. *Жучок А. В.* Групи автоморфізмів ортогональних сум напівгруп // Доп. НАН України. – 2011. – **6**. – С. 12–16.
13. *Жучок А. В.* Група автоморфізмів напівгрупи // Доп. НАН України. – 2012. – **1**. – С. 7–10.
14. *Zhuchok Yu. V.* The endomorphism monoid of an arbitrary semigroup // Inter. Conf. on Algebra dedicated to 100th anniversary of S.M. Chernikov: Conference materials, Kyiv. – 2012. – P. 183.
15. *Tamura T.* Note on the greatest semilattice decomposition of semigroups // Sem. Forum. – 1972. – **4**. – P. 255–261.

Одержано 10.07.2017