УДК 512.53

Я. В. Заціха (Ін-т математики НАН України)

ОПИС ПІДНАПІВГРУП НАПІВГРУП МАЛОГО ПОРЯДКУ

The subsemigroups of the semigroups of order $n = 3$ are described.

Описано піднапівгрупи напівгруп порядку $n = 3$.

Групи малих порядків вивчені досить добре (див., напр., [1]). Напівгруп малих порядків набагато більше, ніж груп, і тому вивчені вони не в такій мірі, як групи. Зокрема, число напівгрупп порядків 5, 6, 7 дорівнює відповідно 1160, 15973, 836021. Зауважимо при цьому, що більшість задач про опис напівгруп фіксованого порядку отримано з використанням комп'ютерних програм. За традицією опис у таких випадках проводиться з точністю до ізоморфізму та дуальності. Напівгрупи, що розглядаються з такою точністю, називаються різними.

Напівгрупи порядку $n < 4$ вивчені досить детально. Випадки $n = 1, 2$ тривіальні (число різних напівгруп відповідно 1 і 4). Напівгрупи порядку $n = 3$ описав Т. Тамура, у вигляді таблиць Келі, ще в 1953 р. [2]. Вони вивчалися, зокрема, в [3–5]. У цій статті розглядається задача про опис всіх піднапівгруп напівгруп третього порядку.

Автор висловлює щиру подяку професору В. М. Бондаренку за корисні поради.

1. Попередні відомості. У цьому розділі ми у вигляді таблиць Келі випишемо повний список попарно різних напівгруп 3-го порядку в такому вигляді (і в такій же послідовності), як у [3]:

	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$
$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$
$\langle 1\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$
$\langle 2\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$

	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$
$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$
$\langle 1\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$
$\langle 2\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$

	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$
$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$
$\langle 1\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$
$\langle 2\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 2\rangle$

	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$
$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$
$\langle 1\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$
$\langle 2\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$

	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$
$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$
$\langle 1\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$
$\langle 2\rangle$	$\langle 2\rangle$	$\langle 2\rangle$	$\langle 2\rangle$

	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$
$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$
$\langle 1\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$
$\langle 2\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$

	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$
$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$
$\langle 1\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 0\rangle$
$\langle 2\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 2\rangle$

	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$
$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$
$\langle 1\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 0\rangle$
$\langle 2\rangle$	$\langle 2\rangle$	$\langle 2\rangle$	$\langle 2\rangle$

	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$
$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$
$\langle 1\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 1\rangle$
$\langle 2\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 1\rangle$

	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$
$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$
$\langle 1\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 1\rangle$
$\langle 2\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$

	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$
$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$
$\langle 1\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 1\rangle$
$\langle 2\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 2\rangle$	$\langle 2\rangle$

	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$
$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$
$\langle 1\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$
$\langle 2\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 2\rangle$	$\langle 1\rangle$

	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$
$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$
$\langle 1\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$
$\langle 2\rangle$	$\langle 2\rangle$	$\langle 2\rangle$	$\langle 2\rangle$

	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$
$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$
$\langle 1\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 1\rangle$
$\langle 2\rangle$	$\langle 2\rangle$	$\langle 2\rangle$	$\langle 2\rangle$

	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$
$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 2\rangle$
$\langle 1\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 2\rangle$
$\langle 2\rangle$	$\langle 2\rangle$	$\langle 2\rangle$	$\langle 0\rangle$

	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$
$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 2\rangle$
$\langle 1\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$
$\langle 2\rangle$	$\langle 2\rangle$	$\langle 2\rangle$	$\langle 0\rangle$

	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$
$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 1\rangle$
$\langle 1\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$
$\langle 2\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$

	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$
$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$
$\langle 1\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$	$\langle 0\rangle$
$\langle 2\rangle$	$\langle 2\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$

2. Опис піднапівгруп. Наша мета — виписати для кожної із напівгруп третього порядку, що вказані в розділі 1, всі її піднапівгрупи, що породжуються одним чи двома елементами. При цьому напівгрупи нумеруються в такому порядку, як вони виписані в попередньому розділі.

1) $$\begin{aligned}\{\langle 0\rangle\} &= (\langle 0\rangle)\\ \{\langle 1\rangle\} &= (\langle 0\rangle,\langle 1\rangle)\\ \{\langle 2\rangle\} &= (\langle 0\rangle,\langle 2\rangle)\\ \{\langle 0\rangle,\langle 1\rangle\} &= (\langle 0\rangle,\langle 1\rangle)\\ \{\langle 0\rangle,\langle 2\rangle\} &= (\langle 0\rangle,\langle 2\rangle)\\ \{\langle 1\rangle,\langle 2\rangle\} &= (\langle 0\rangle,\langle 1\rangle,\langle 2\rangle)\end{aligned}$$

2) $$\begin{aligned}\{\langle 0\rangle\} &= (\langle 0\rangle)\\ \{\langle 1\rangle\} &= (\langle 0\rangle,\langle 1\rangle)\\ \{\langle 2\rangle\} &= (\langle 0\rangle,\langle 1\rangle,\langle 2\rangle)\\ \{\langle 0\rangle,\langle 1\rangle\} &= (\langle 0\rangle,\langle 1\rangle)\\ \{\langle 0\rangle,\langle 2\rangle\} &= (\langle 0\rangle,\langle 1\rangle,\langle 2\rangle)\\ \{\langle 1\rangle,\langle 2\rangle\} &= (\langle 0\rangle,\langle 1\rangle,\langle 2\rangle)\end{aligned}$$

3) $$\begin{aligned}\{\langle 0\rangle\} &= (\langle 0\rangle)\\ \{\langle 1\rangle\} &= (\langle 0\rangle,\langle 1\rangle)\\ \{\langle 2\rangle\} &= (\langle 2\rangle)\\ \{\langle 0\rangle,\langle 1\rangle\} &= (\langle 0\rangle,\langle 1\rangle)\\ \{\langle 0\rangle,\langle 2\rangle\} &= (\langle 0\rangle,\langle 2\rangle)\\ \{\langle 1\rangle,\langle 2\rangle\} &= (\langle 0\rangle,\langle 1\rangle,\langle 2\rangle)\end{aligned}$$

4) $$\begin{aligned}\{\langle 0\rangle\} &= (\langle 0\rangle)\\ \{\langle 1\rangle\} &= (\langle 0\rangle,\langle 1\rangle)\\ \{\langle 2\rangle\} &= (\langle 2\rangle)\\ \{\langle 0\rangle,\langle 1\rangle\} &= (\langle 0\rangle,\langle 1\rangle)\\ \{\langle 0\rangle,\langle 2\rangle\} &= (\langle 0\rangle,\langle 2\rangle)\\ \{\langle 1\rangle,\langle 2\rangle\} &= (\langle 0\rangle,\langle 1\rangle,\langle 2\rangle)\end{aligned}$$

5) $$\begin{aligned}\{\langle 0\rangle\} &= (\langle 0\rangle)\\ \{\langle 1\rangle\} &= (\langle 0\rangle,\langle 1\rangle)\\ \{\langle 2\rangle\} &= (\langle 2\rangle)\\ \{\langle 0\rangle,\langle 1\rangle\} &= (\langle 0\rangle,\langle 1\rangle)\\ \{\langle 0\rangle,\langle 2\rangle\} &= (\langle 0\rangle,\langle 2\rangle)\\ \{\langle 1\rangle,\langle 2\rangle\} &= (\langle 0\rangle,\langle 1\rangle,\langle 2\rangle)\end{aligned}$$

6) $$\begin{aligned}\{\langle 0\rangle\} &= (\langle 0\rangle)\\ \{\langle 1\rangle\} &= (\langle 0\rangle,\langle 1\rangle)\\ \{\langle 2\rangle\} &= (\langle 2\rangle)\\ \{\langle 0\rangle,\langle 1\rangle\} &= (\langle 0\rangle,\langle 1\rangle)\\ \{\langle 0\rangle,\langle 2\rangle\} &= (\langle 0\rangle,\langle 2\rangle)\\ \{\langle 1\rangle,\langle 2\rangle\} &= (\langle 0\rangle,\langle 1\rangle,\langle 2\rangle)\end{aligned}$$

7) $$\begin{aligned}\{\langle 0\rangle\} &= (\langle 0\rangle)\\ \{\langle 1\rangle\} &= (\langle 1\rangle)\\ \{\langle 2\rangle\} &= (\langle 2\rangle)\\ \{\langle 0\rangle,\langle 1\rangle\} &= (\langle 0\rangle,\langle 1\rangle)\\ \{\langle 0\rangle,\langle 2\rangle\} &= (\langle 0\rangle,\langle 2\rangle)\\ \{\langle 1\rangle,\langle 2\rangle\} &= (\langle 0\rangle,\langle 1\rangle,\langle 2\rangle)\end{aligned}$$

8) $$\begin{aligned}\{\langle 0\rangle\} &= (\langle 0\rangle)\\ \{\langle 1\rangle\} &= (\langle 1\rangle)\\ \{\langle 2\rangle\} &= (\langle 2\rangle)\\ \{\langle 0\rangle,\langle 1\rangle\} &= (\langle 0\rangle,\langle 1\rangle)\\ \{\langle 0\rangle,\langle 2\rangle\} &= (\langle 0\rangle,\langle 2\rangle)\\ \{\langle 1\rangle,\langle 2\rangle\} &= (\langle 0\rangle,\langle 1\rangle,\langle 2\rangle)\end{aligned}$$

9) $\begin{array}{lcl} \{\langle 0\rangle\} & = & (\langle 0\rangle) \\ \{\langle 1\rangle\} & = & (\langle 1\rangle) \\ \{\langle 2\rangle\} & = & (\langle 1\rangle, \langle 2\rangle) \\ \{\langle 0\rangle, \langle 1\rangle\} & = & (\langle 0\rangle, \langle 1\rangle) \\ \{\langle 0\rangle, \langle 2\rangle\} & = & (\langle 0\rangle, \langle 1\rangle, \langle 2\rangle) \\ \{\langle 1\rangle, \langle 2\rangle\} & = & (\langle 1\rangle, \langle 2\rangle) \end{array}$
10) $\begin{array}{lcl} \{\langle 0\rangle\} & = & (\langle 0\rangle) \\ \{\langle 1\rangle\} & = & (\langle 1\rangle) \\ \{\langle 2\rangle\} & = & (\langle 2\rangle) \\ \{\langle 0\rangle, \langle 1\rangle\} & = & (\langle 0\rangle, \langle 1\rangle) \\ \{\langle 0\rangle, \langle 2\rangle\} & = & (\langle 0\rangle, \langle 2\rangle) \\ \{\langle 1\rangle, \langle 2\rangle\} & = & (\langle 1\rangle, \langle 2\rangle) \end{array}$

11) $\begin{array}{lcl} \{\langle 0\rangle\} & = & (\langle 0\rangle) \\ \{\langle 1\rangle\} & = & (\langle 1\rangle) \\ \{\langle 2\rangle\} & = & (\langle 2\rangle) \\ \{\langle 0\rangle, \langle 1\rangle\} & = & (\langle 0\rangle, \langle 1\rangle) \\ \{\langle 0\rangle, \langle 2\rangle\} & = & (\langle 0\rangle, \langle 2\rangle) \\ \{\langle 1\rangle, \langle 2\rangle\} & = & (\langle 1\rangle, \langle 2\rangle) \end{array}$
12) $\begin{array}{lcl} \{\langle 0\rangle\} & = & (\langle 0\rangle) \\ \{\langle 1\rangle\} & = & (\langle 1\rangle) \\ \{\langle 2\rangle\} & = & (\langle 1\rangle, \langle 2\rangle) \\ \{\langle 0\rangle, \langle 1\rangle\} & = & (\langle 0\rangle, \langle 1\rangle) \\ \{\langle 0\rangle, \langle 2\rangle\} & = & (\langle 0\rangle, \langle 1\rangle, \langle 2\rangle) \\ \{\langle 1\rangle, \langle 2\rangle\} & = & (\langle 1\rangle, \langle 2\rangle) \end{array}$

13) $\begin{array}{lcl} \{\langle 0\rangle\} & = & (\langle 0\rangle) \\ \{\langle 1\rangle\} & = & (\langle 1\rangle) \\ \{\langle 2\rangle\} & = & (\langle 2\rangle) \\ \{\langle 0\rangle, \langle 1\rangle\} & = & (\langle 0\rangle, \langle 1\rangle) \\ \{\langle 0\rangle, \langle 2\rangle\} & = & (\langle 0\rangle, \langle 2\rangle) \\ \{\langle 1\rangle, \langle 2\rangle\} & = & (\langle 1\rangle, \langle 2\rangle) \end{array}$
14) $\begin{array}{lcl} \{\langle 0\rangle\} & = & (\langle 0\rangle) \\ \{\langle 1\rangle\} & = & (\langle 1\rangle) \\ \{\langle 2\rangle\} & = & (\langle 2\rangle) \\ \{\langle 0\rangle, \langle 1\rangle\} & = & (\langle 0\rangle, \langle 1\rangle) \\ \{\langle 0\rangle, \langle 2\rangle\} & = & (\langle 0\rangle, \langle 2\rangle) \\ \{\langle 1\rangle, \langle 2\rangle\} & = & (\langle 1\rangle, \langle 2\rangle) \end{array}$

15) $\begin{array}{lcl} \{\langle 0\rangle\} & = & (\langle 0\rangle) \\ \{\langle 1\rangle\} & = & (\langle 0\rangle, \langle 1\rangle) \\ \{\langle 2\rangle\} & = & (\langle 0\rangle, \langle 2\rangle) \\ \{\langle 0\rangle, \langle 1\rangle\} & = & (\langle 0\rangle, \langle 1\rangle) \\ \{\langle 0\rangle, \langle 2\rangle\} & = & (\langle 0\rangle, \langle 2\rangle) \\ \{\langle 1\rangle, \langle 2\rangle\} & = & (\langle 0\rangle, \langle 1\rangle, \langle 2\rangle) \end{array}$
16) $\begin{array}{lcl} \{\langle 0\rangle\} & = & (\langle 0\rangle) \\ \{\langle 1\rangle\} & = & (\langle 1\rangle) \\ \{\langle 2\rangle\} & = & (\langle 0\rangle, \langle 2\rangle) \\ \{\langle 0\rangle, \langle 1\rangle\} & = & (\langle 0\rangle, \langle 1\rangle) \\ \{\langle 0\rangle, \langle 2\rangle\} & = & (\langle 0\rangle, \langle 2\rangle) \\ \{\langle 1\rangle, \langle 2\rangle\} & = & (\langle 0\rangle, \langle 1\rangle, \langle 2\rangle) \end{array}$

17) $\begin{array}{lcl} \{\langle 0\rangle\} & = & (\langle 0\rangle) \\ \{\langle 1\rangle\} & = & (\langle 0\rangle, \langle 1\rangle) \\ \{\langle 2\rangle\} & = & (\langle 0\rangle, \langle 1\rangle, \langle 2\rangle) \\ \{\langle 0\rangle, \langle 1\rangle\} & = & (\langle 0\rangle, \langle 1\rangle) \\ \{\langle 0\rangle, \langle 2\rangle\} & = & (\langle 0\rangle, \langle 1\rangle, \langle 2\rangle) \\ \{\langle 1\rangle, \langle 2\rangle\} & = & (\langle 0\rangle, \langle 1\rangle, \langle 2\rangle) \end{array}$
18) $\begin{array}{lcl} \{\langle 0\rangle\} & = & (\langle 0\rangle) \\ \{\langle 1\rangle\} & = & (\langle 0\rangle, \langle 1\rangle, \langle 2\rangle) \\ \{\langle 2\rangle\} & = & (\langle 0\rangle, \langle 1\rangle, \langle 2\rangle) \\ \{\langle 0\rangle, \langle 1\rangle\} & = & (\langle 0\rangle, \langle 1\rangle, \langle 2\rangle) \\ \{\langle 0\rangle, \langle 2\rangle\} & = & (\langle 0\rangle, \langle 1\rangle, \langle 2\rangle) \\ \{\langle 1\rangle, \langle 2\rangle\} & = & (\langle 0\rangle, \langle 1\rangle, \langle 2\rangle) \end{array}$

Список використаної літератури

1. *Холл М.* Теория групп. М.: Иност. лит., 1962. – 468 с.
2. *Tamura T.* Some remarks on semi-groups and all types of semi-groups of order 2, 3 // J. Gakugei Tokushima Univ. – 1953. – **3**, – P. 1–11.
3. *Бондаренко В. М., Заціха Я. В.* Про визначальні співвідношення для мінімальних систем твірних напівгруп третього порядку // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова (Серія 1. Фізико-математичні науки). – 2013. – №14. – С. 62–67.
4. *Chotchaisthit S.* Simple proofs determining all nonisomorphic semigroups of order 3 // Appl. Math. Sci. (Ruse). – 2014. – **8**. – P. 1261–1269.
5. *Bondarenko V. M., Zaciha Ya. V.* On characteristic properties of semigroups // Algebra Discrete Math. – 2015 – **20**, no. 1. – P. 32–39.

Одержано 18.10.2017