УДК 512.554.35

І. С. Клименко, С. В. Лисенко, А. П. Петравчук (Київський нац. ун-т ім. Т. Шевченка)

АЛГЕБРИ ЛІ ДИФЕРЕНЦІЮВАНЬ З АБЕЛЕВИМИ ІДЕАЛАМИ МАКСИМАЛЬНОГО РАНГУ

Let $\mathbb{K}$ be a field of characteristic zero, $\mathbb{A}$ an integral domain over $\mathbb{K}$ and $R = Frac(A)$, the fraction field of the algebra $\mathbb{A}$. The Lie algebra $Der_{\mathbb{K}}A$ of all $\mathbb{K}$-derivations of A can be isomorphically embedded in the Lie algebra $W(A) := RDer_{\mathbb{K}}A \subseteq Der_{\mathbb{K}}R.$ The rank of a subalgebra $L \subseteq W(A)$ is defined as the dimension of the vector space $\dim_R RL$. We study subalgebras $L \subseteq W(A)$ of rank n over R containing an abelian ideal of rank n over R. It is proved that if L contains an element D such that the linear operator $\mathrm{ad}D$ acts nonsingularly on the vector space FI, then the Lie algebra FL is isomorphic to a subalgebra of the general affine Lie algebra $ga_n(F)$, where F is the field of constants of the Lie algebra L. In case of subalgebras of rank 2 over R the above mentioned restriction on $\mathrm{ad}D$ can be omitted.

Нехай $\mathbb{K}$ – поле характеристики нуль, $\mathbb{A}$ – область цілісності над $\mathbb{K}$ і $R = Frac(A)$ – поле часток для $\mathbb{A}$. Алгебра Лі $Der_{\mathbb{K}}A$ всіх $\mathbb{K}$-диференціювань A ізоморфно вкладається в алгебру Лі $W(A) := RDer_{\mathbb{K}}A \subseteq Der_{\mathbb{K}}R$. Ранг довільної підалгебри $L \subseteq W(A)$ визначається як розмірність векторного простору $\dim_R RL$. В роботі вивчаються підалгебри $L \subseteq W(A)$ рангу n над R, які містять абелевий ідеал рангу n. Доведено, що якщо L містить елемент D такий, що лінійний оператор $\mathrm{ad}D$ діє невироджено на векторному просторі FI, то алгебра Лі FL ізоморфна підалгебрі повної афінної алгебри Лі $ga_n(F)$, де F – поле констант для алгебри Лі L. У випадку підалгебр рангу 2 над полем R обмеження на $\mathrm{ad}D$ може бути відкинуте.

Нехай $\mathbb{K}$ — довільне поле характеристики нуль і A — область цілісності над $\mathbb{K}$. Нагадаємо, що $\mathbb{K}$-диференціюванням алгебри A називається таке $\mathbb{K}$-лінійне відображення $D : A \to A$, для якого виконується правило Лейбніца $D(ab) = D(a)b + aD(b), \forall a, b \in A$. Кожне $\mathbb{K}$-диференціювання алгебри A однозначно продовжується до $\mathbb{K}$-диференціювання поля часток $R = Frac(A)$. Всі $\mathbb{K}$-диференціювання поля R утворюють алгебру Лі $Der_{\mathbb{K}}R$ відносно операції комутування $[D_1, D_2] = D_1D_2 - D_2D_1$. Оскільки для кожного елемента $r \in R$ і $D \in Der_{\mathbb{K}}R$ визначено диференціювання $r \cdot D$ поля R, то $Der_{\mathbb{K}}R$ є векторним простором над полем R (але не алгеброю Лі над полем R в загальному випадку). В алгебрі Лі $Der_{\mathbb{K}}R$ визначена підалгебра $RDer_{\mathbb{K}}A$, яку ми для зручності будемо позначати через $W(A)$.

Для довільної підалгебри $L \subseteq W(A)$ (тут алгебра Лі L розглядається над полем $\mathbb{K}$) визначений ранг $rk_RL = \dim_R RL$. В роботі [3] вивчалися нільпотентні і розв'язні підалгебри із алгебри Лі $W(A)$ скінченного рангу над полем R. Будова підалгебр алгебри Лі $W(A)$ представляє великий інтерес у зв'язку з тим, що у випадку, коли $A = \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ — кільце многочленів від n змінних і $R = \mathbb{K}(x_1, \ldots, x_n)$ — поле раціональних функцій, то підалгебра $L \subseteq W(A)$ може розглядатися як алгебра Лі векторних полів з з раціональними коефіцієнтами. Такі алгебри Лі з поліноміальними, раціональними коефіцієнтами, чи коефіцієнтами із кільця формальних степеневих рядів вивчалися багатьма авторами (див., наприклад, [1–3]).

В даній роботі вивчаються підалгебри рангу n із $W(A)$, які містять абелевий ідеал I рангу n над R (тобто максимального можливого рангу). При умові, що в L є елемент D такий що приєднане диференціювання $\mathrm{ad}D$ є невиродженим лінійним оператором на FI (F — поле констант алгебри Лі L) доведено, що алгебра Лі FL ізоморфна деякій підалгебрі із повної афінної алгебри Лі $ga_n(F)$ (Теорема 1). У випадку, коли алгебра Лі L має ранг 2 над полем R від обмеження на приєднане диференціювання можна відмовитися, як показує теорема 2 роботи.

Позначення в роботі стандартні. Основне поле $\mathbb{K}$ довільне характеристики нуль. Основні властивості диференціювань комутативних кілець можна знайти в [4]. Якщо L — підалгебра алгебри Лі $W(A)$, то підполе $F = F(L) \subset R$, яке складається з усіх елементів із R, які лежать в перетині $\cap KerD, D \in L$ називається полем констант для алгебри Лі L. Якщо $\mathbb{K}$ — поле, то алгебра Лі L, яка складається із усіх $\mathbb{K}$-диференціювань кільця многочленів $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ вигляду

$$D = f_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + f_n \frac{\partial}{\partial x_{(n)}},$$

де $f_i \in F[x_1, \ldots, x_n], \deg f_i \leq 1$ ізоморфна повній афінній алгебрі Лі $ga_n(\mathbb{K})$. Дійсно, алгебра Лі L містить абелевий ідеал $V = \mathbb{K}\langle \frac{\partial}{\partial x_1} \ldots \frac{\partial}{\partial x_n} \rangle$ розмірності n над $\mathbb{K}$, такий, що $L/V \simeq gl_n(\mathbb{K})$, де $gl_n(\mathbb{K})$ — повна матрична алгебра Лі над полем $\mathbb{K}$. Тому $L \simeq ga_n(\mathbb{K}) = gl_n(\mathbb{K}) \leftthreetimes V$ — напівпрямий добуток двох алгебр Лі.

Допоміжні результати про алгебри Лі диференціювань областей цілісності. Для зручності в наступних лемах зібрані деякі допоміжні факти, необхідні для доведення основних теорем роботи.

Лема 1 (див, наприклад, [3]). *Нехай $D_1, D_2 \in W(A)$ і a, b — елементи поля R. Тоді виконується рівність*

$$[aD_1, bD_2] = ab[D_1, D_2] + aD_1(b)D_2 - bD_2(a)D_1.$$

Зокрема, якщо D_1, D_2 комутують, то

$$[aD_1, bD_2] = aD_1(b)D_2 - bD_2(a)D_1.$$

Лема 2 ([3]). *Нехай L — підалгебра із алгебри Лі $W(A)$ і F — поле констант для алгебри L. Тоді FL — алгебра Лі над полем F і якщо L абелева, нільпотентна або розв'язна, то такою ж буде і алгебра Лі FL.*

Лема 3. *Нехай L — абелева підалгебра рангу n над R із алгебри Лі $W(A)$ і F — поле констант для L. Тоді FL — абелева алгебра Лі над полем F розмірності n над F.*

Доведення. Нехай $D_1, \ldots, D_n$ — який-небудь базис FL над полем R і

$$D = r_1 D_1 + \ldots + r_n D_n, \quad r_i \in R$$

— який-небудь елемент з алгебри FL. Тоді із рівності

$$[D_i, D] = D_i(r_1)D_1 + \ldots + D_i(r_n)D_n = 0, \text{ де } i = 1, \ldots, n,$$

випливає, що $D_i(r_j) = 0 \quad i, j = 1, \ldots, n$. Останнє означає, що $r_1, \ldots, r_n \in F$ і тому FL — абелева алгебра Лі розмірності n над полем F.

Лема 4. *Нехай $D_1, \ldots, D_n$ — лінійно незалежні над R елементи алгебри Лі $W(A)$ і $F = \bigcap_{i=1}^{n} KerD_i$. Якщо існують елементи $a_1, \ldots, a_n \in R$ такі, що*

$$D_i(a_j) = \delta_{ij}, i, j = 1, \ldots, n,$$

то для довільного елемента $b \in R$, який задовольняє умови $D_i(b) \in F, i = 1, \ldots, n$, виконується рівність $b = \lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_n a_n + \lambda_{n+1}$ для деяких $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1} \in F$.

Доведення. Позначимо $\lambda_i = D_i(b), i = 1, \ldots, n$. Тоді, як неважко переконатися, $D_i(b - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i) = 0, i = 1, \ldots, n$. Тому $b - \sum_{i=n}^{n} \lambda_i a_i \in F$. Позначимо цю різницю для зручності через λ_{n+1}. Але тоді елемент b записується у вигляді $b = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i + \lambda_{n+1}$, де елементи $\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \lambda_{n+1}$ належать полю F.

Зауваження 1. *Якщо L — підалгебра із алгебри Лі $W(A)$ рангу n над полем R і I — абелевий ідеал алгебри L з $\mathrm{rk}_R I = n$, то, як неважко переконатися, FI — максимальний абелевий ідеал алгебри FL, де F — поле констант для алгебри Лі L.*

Зауваження 2. *Нехай $r_1, \ldots, r_n$ — лінійно незалежні над полем F елементи поля R. Якщо $D_1, \ldots, D_n$ — такі елементи алгебри Лі $W(A)$, для яких виконуються рівності*

$$D_i(r_j) = \delta_{ij}, i, j = 1, \ldots, 1, \ldots, n,$$

то елементи $D_1, \ldots, D_n$, як неважко переконатися, лінійно незалежні над полем F.

Основна теорема.

Лема 5. *Нехай L — підалгебра рангу n над R із $W(A)$, яка містить абелевий ідеал I рангу n над R і F — поле констант для L. Якщо L містить елемент D, такий, що лінійний оператор adD діє невироджено на векторному просторі FI над полем F, то існують елементи $D_1, \ldots, D_n \in I$, $r_1, \ldots, r_n \in R$ такі, що $D_i(r_j) = \delta_{i,j}$, $i, j = 1, \ldots, n$ і кожен елемент S із L може бути записаний у вигляді*

$$S = f_1(r_1, \ldots, r_n)D_1 + \ldots + f_n(r_1, \ldots, r_n)D_n$$

для деяких лінійних многочленів $f_i \in F[x_1, \ldots, x_n]$.

Доведення. Нехай $T_1, \ldots, T_n$ — який-небудь базис ідеалу I над полем R. Тоді за лемою 3 $\dim_F FI = n$ і $T_1, \ldots, T_n$ — базис векторного простору FI над полем F. Запишемо елемент D із умови теореми у вигляді

$$D = r_1 T_1 + \ldots + r_n T_n,\ r_i \in R,\ i = 1, \ldots, n.$$

Оскільки $[T_i, D] = T_i(r_1)T_1 + \ldots + T_i(r_n)T_n \in I$, то, очевидно,

$$T_i(r_j) \in F\ , i, j = 1, \ldots, n.$$

За умовою теореми лінійний оператор $\mathrm{ad}D$ на векторному просторі FI діє невироджено і тому елементи $[T_1, D], \ldots, [T_n, D]$ утворюють базис простору FI над полем F. Останнє означає, що матриця

$$B = \begin{pmatrix} T_1(r_1) & \cdots & T_1(r_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ T_n(r_1) & \cdots & T_n(r_n) \end{pmatrix}$$

невироджена. Але тоді рядок

$$(1, 0, \ldots, 0) \in F^n$$

є деякою лінійною комбінацією рядків матриці B

$$(1, 0, \ldots, 0) = \gamma_{11}(T_1(r_1), \ldots, T_1(r_n)) + \ldots + \gamma_{1n}(T_n(r_1), \ldots, T_n(r_n))$$

для деяких $\gamma_{11}, \ldots, \gamma_{1n} \in F$. Позначимо

$$D_1 = \gamma_{11}T_1 + \ldots + \gamma_{1n}T_n \in FI.$$

Тоді, за побудовою, маємо

$$[D_1, D] = 1 \cdot T_1 + 0 \cdot T_2 + \ldots + 0 \cdot T_n$$

і, з урахуванням лінійної незалежності елементів $T_1, \ldots, T_n$ над полем F, отримаємо

$$D_1(r_1) = 1, D_1(r_2) = 0, \ldots, D_1(r_n) = 0.$$

Аналогічно можна знайти елемент $D_2 \in FI$ такий, що

$$D_2(r_1) = 0, D_2(r_2) = 1, \ldots, D_n(r_n) = 0.$$

Повторюючи ці міркування ми знайдемо елементи $D_1, \ldots, D_n$ векторного простору FI такі, що $D_i(r_j) = \delta_{ij}, i, j = 1, \ldots, n$. За Зауваженням 2 елементи $D_1, \ldots, D_n$ лінійно незалежні над полем F і тому утворюють базис векторного простору FI над полем F. Візьмемо тепер довільний елемент $S = s_1D_1 + \ldots + s_nD_n$ із підалгебри FL, $s_i \in R$. Тоді

$$[D_i, S] = D_i(s_1)D_1 + \ldots + D_i(s_n)D_n \in FI$$

і тому $D_i(s_j) \in F$, $i, j = 1, \ldots, n$. За лемою 4 виконуються рівності

$$s_i = \sum_{i=1}^{n} \beta_{ij} r_j + \beta_{i,n+1}$$

для деяких елементів $\beta_{i,j} \in F$. Останнє означає, що s_i лінійно виражається через елементи $r_1, \ldots, r_n$ з коефіцієнтами з поля F, тобто $s_i = f_i(r_1, \ldots, r_n)$, де f_i — лінійний многочлен з $F[x_1, \ldots, x_n]$.

Теорема 1. *Нехай L — підалгебра із алгебри Лі $W(A))$ рангу n над полем R, яка містить абелевий ідеал I рангу n над R і F — поле констант для алгебри Лі L. Якщо L містить елемент D такий, що $\mathrm{ad}D$ — невироджений лінійний оператор у векторному просторі FI над полем $\mathbb{F}$, то алгебра Лі FL ізоморфна деякій підалгебрі повної афінної алгебри Лі $ga_n(F)$. Зокрема, алгебра Лі FL скінченновимірна над полем $\mathbb{F}$.*

Доведення. За лемою 5 існують елементи $D_1, \ldots, D_n \in FI$, $r_1, \ldots, r_n \in R$ такі, що $D_i(r_j) = \delta_{i,j}$, $i, j = 1, \ldots, n$ і кожен елемент S із FL може бути записаний у вигляді

$$S = f_1(r_1, \ldots, r_n)D_1 + \ldots + f_n(r_1, \ldots, r_n)D_n$$

для деяких лінійних многочленів $f_i \in F[x_1, \ldots, x_n]$. Розглянемо в FL векторний підпростір V над полем F з базисом $D_1, \ldots, D_n$ (це підмножина елементів

$$D = f_1(r_1, \ldots, r_n)D_1 + \cdots + f_n(r_1, \ldots, r_n)D_n$$

із FL, в якій всі многочлени $f_i(x_1, \ldots, x_n)$ є сталими многочленами). Легко бачити, що V — абелевий ідеал алгебри Лі L розмірності n над полем F. Векторний підпростір W із алгебри Лі FL, який складається із елементів D, у яких коефіцієнти $f_i(r_1, \ldots, r_n)$ є однорідними лінійними многочленами від $r_1, \ldots, r_n$ утворює підалгебру W із L і, як неважко переконатися, $FL = W + V$ — пряма сума векторних підпросторів. Зауважимо також, що підалгебра W ізоморфна деякій підалгебрі повної лінійної алгебри Лі $gl_n(F)$. Дійсно, співставимо елементу

$$D = (\sum_{j=1}^{n} a_{1j}r_j)D_1 + \ldots + (\sum_{j=1}^{n} a_{nj}r_j)D_n, \quad a_{ij} \in F$$

матрицю $A = (a_{ij}) \in M_n(F)$ і елементу

$$D_1 = (\sum_{j=1}^{n} b_{1j}r_j)D_1 + \ldots + (\sum_{j=1}^{n} b_{nj}r_j)D_nF$$

матрицю $B = (b_{ij}), b_{ij} \in F$. Тоді безпосередньо перевіряється, що комутатору $[D, D_1]$ диференціювань відповідає матриця $[A, B] = AB - BA$, яка є комутатором матриць A і B в алгебрі Лі $gl_n(F)$. Таким чином підалгебра W із FL ізоморфна деякій підалгебрі алгебри Лі $gl_n(F)$. Неважко також переконатися, що алгебра Лі FL, яка є напівпрямою сумою підалгебри W і абелевого ідеалу V ізоморфна деякій підалгебрі повної афінної алгебри Лі $ga_n(F)$.

Підалгебри рангу 2 в алгебрі Лі W(A). Наступне твердження дає іншу достатню умову (порівняно з теоремою 1) ізоморфізму підалгебр рангу 2 із $W(A)$, які мають абелеві ідеали рангу 2 над R, і деяких підалгебр повної афінної алгебри Лі $ga_2(F)$,

Лема 6. *Нехай L — підалгебра рангу 2 над R із $W(A)$, яка містить абелевий ідеал рангу 2 над R і F — поле констант для алгебри L. Якщо центр алгебри L нульовий, то існують елементи $D_1, D_2 \in FI$ і $r_1, r_2 \in R$ такі, що $D_i(r_j) = \delta_{ij}$, $i, j = 1, 2$.*

Доведення. За лемою 3, маємо $\dim_F FI = 2$. Виберемо який-небудь базис $\{D_1, D_2\}$ ідеалу FI. Візьмемо довільний елемент $D \in FL \setminus FI$. Тоді

$$D = r_1D_1 + r_2D_2 \text{ для деяких } r_1, r_2 \in R,$$

при цьому хоча б один із коефіцієнтів r_1, r_2 не лежить в полі F. Оскільки

$$[D_i, D] = D_i(r_1)D_1 + D_i(r_2)D_2 \in FI,$$

то $D_i(r_j) \in F$, $i, j = 1, 2$. Якщо матриця

$$B = \begin{pmatrix} D_1(r_1) & D_2(r_1) \\ D_1(r_2) & D_2(r_2) \end{pmatrix}$$

невироджена, то лінійний оператор $\mathrm{ad}D$ діє невироджено на FI і тому за теоремою 1 елементи $r_1, r_2 \in R$ можна вибрати такими, щоб виконувалися рівності $D_i(a_j) = \delta_{ij}$, $i, j = 1, 2$.

Нехай тепер матриця B вироджена. Оскільки $D \in FL \setminus FI$, то хоча б один із рядків матриці B ненульовий, нехай це буде перший рядок. Не втрачаючи загальності можна вважати, що $D_1(r_1) = 1, D_2(r_1) = \gamma$ для деякого $\gamma \in F$. Оскільки другий рядок матриці B пропорційний першому рядку, то $r_2 = \alpha r_1 + \beta$ для деяких $\alpha, \beta \in F$. Тоді, очевидно, $D = r_1 D_1 + (\alpha r_1 + \beta) D_2$.

Випадок 1. $\gamma = 0$. Тоді

$$D_1(r_1) = 1, \quad D_2(r_1) = 0,$$

і тому, як неважко переконатися, виконується рівність $[D, D_2] = 0$. Оскільки $D_2 \notin Z(L)$, то в L існує елемент $S = s_1 D_1 + s_2 D_2$, $s_i \in R$ такий, що

$$[D_2, S] = D_2(s_1) D_1 + D_2(s_2) D_2 \neq 0.$$

Останнє означає, що хоча б один із коефіцієнтів $D_2(s_1)$, $D_2(s_2)$ ненульовий. Нехай, наприклад, $D_2(s_1) \neq 0$. Не втрачаючи загальності, можна вважати, що $D_2(s_1) = 1$. Тоді для елемента $\overline{s}_1 = s_1 - D_1(s_1) r_1$ маємо

$$D_2(\overline{s}_1) = 1 \ , \ D_1(\overline{s}_1) = D_1(s_1) - D_1(s_1) = 0$$

Позначивши $r_2 = \overline{s}_1$ отримаємо рівності $D_i(r_j) = \delta_{ij}$, $i, j = 1, 2$.

Випадок 2. $\gamma \neq 0$. Покладемо

$$D_1' = D_1, \quad D_2' = D_1 - \gamma^{-1} D_2.$$

Тоді отримаємо $D_1'(r_1) = 1$, $D_2'(r_1) = 0$. Оскільки $D_2' \notin Z(L)$, то існує елемент $T = t_1 D_1 + t_2 D_2$ такий, що $[D_2', T] \neq 0$ (зокрема, хоча б один з коефіцієнтів t_1, t_2 не належить полю F). Повторюючи міркування з випадку 1, неважко переконатися, що існують елементи $r_1, r_2 \in R$ такі, що $D_i'(r_j) = \delta_{ij}$.

Зауваження 3. *Нехай L — підалгебра рангу n над полем R із алгебри Лі $W(A)$ і I — її абелевий ідеал рангу n над R. Тоді центр алгебри Лі FL лежить в ідеалі FI алгебри FL. Дійсно, нехай $D \in Z(FL)$ і $D_1, \ldots, D_n$ — який-небудь базис ідеалу I над полем R. Тоді*

$$D = r_1 D_1 + \cdots , + r_n D_n, \quad \textit{для деяких} \ \ r_1, \ldots, r_n \in R$$

і

$$[D_i, D] = D_i(r_1) D_1 + \cdots + D_i(r_n) D_n = 0.$$

Звідси випливає, що виконуються рівності $D_i(r_j) = 0, i, j = 1, \ldots, n$. Але тоді, очевидно, $r_i \in F, i = 1, \ldots, n$ і тому $D \in Z(F(I))$.

Теорема 2. *Нехай L — підалгебра рангу 2 над R із алгебри Лі $W(A)$, яка містить абелевий ідеал I рангу 2 над R і F — поле констант для алгебри Лі L. Тоді алгебра Лі FL ізоморфна деякій підалгебрі повної афінної алгебри Лі $ga_2(F)$.*

Доведення. Очевидно, алгебру Лі L можна вважати неабелевою. Якщо $Z(FL) = 0$, то за лемою 6 в ідеалі FI існує базис D_1, D_2, а в полі R існують елементи r_1, r_2 такі, що $D_i(r_j) = \delta_{ij}$, $i, j = 1, 2$. Звідси, повторюючи міркування із доведення теореми 1, легко вивести, що кожен елемент із L має вигляд

$$S = f_1(r_1, r_2)D_1 + f_2(r_1, r_2)D_2$$

для деяких лінійних многочленів $f_1, f_2 \in F[t_1, t_2]$. Останнє означає, що алгебра Лі FL ізоморфна деякій підалгебрі повної афінної алгебри Лі $ga_2(F)$.

Нехай тепер $Z(FL) \neq 0$. Тоді, як неважко переконатися, враховуючи Зауваження 3, що $Z(FI) \neq 0$. Виберемо базис D_1, D_2 векторного простору FI над полем F так, щоб $D_2 \in Z(FI)$. Виберемо довільний елемент $D \in FL \setminus FI$. Тоді враховуючи Зауваження 3 маємо

$$D \notin Z(FL), \quad D = r_1D_1 + r_2D_2$$

для деяких $r_1, r_2 \in R$. Із співвідношення

$$[D_1, D] = D_1(r_1)D_1 + D_1(r_2)D_2 \neq 0$$

випливає, що хоча б один із елементів $D_1(r_1), D_1(r_2)$ ненульовий. Нехай, наприклад, $D_1(r_1) \neq 0$. Не втрачаючи загальності можемо вважати, що $D_1(r_1) = 1$. Крім того, $D_2(r_1) = 0$, бо $D_2 \in Z(FL)$. Якщо $D_1(r_2) = \gamma \neq 0$, то з умови $\gamma \in F$ легко випливає, що $r_2 = \gamma r_1 + \delta$ для деякого $\delta \in F$. Тоді для елемента D маємо запис $D = r_1D_1 + (\gamma r_1 + \delta)D_2$. Використовуючи доведені вище співвідношення можна показати, що довільний елемент $D \in FL \setminus FI$, має вигляд $D = f_1(r_1)D_1 + f_2(r_1)D_2$, де f_1, f_2 — деякі лінійні многочлени із $F[t]$. Але тоді підалгебра L, очевидно, ізоморфна деякій підалгебрі (розмірності ≤ 4) із повної афінної алгебри Лі $ga_2(F)$.

Список використаної літератури

1. *Bavula V.V.* Lie algebras of triangular polynomial derivations and an isomorphism criterion for their Lie factor algebras // Izv. RAN. Ser. Mat. – 2013. – **77**, Issue 6. – P.3–44.
2. *A. González-López A., N. Kamran N., Olver P.J.* Lie algebras of differential operators in two complex variables // Amer. J. Math. – 1992. – **114**. – P.1163–1185.
3. *Makedonskyi Ie. O., Petravchuk A.P.* On nilpotent and solvable Lie algebras of derivations // Journal of Algebra. – 2014. – **401**. – P.245–257.
4. *Nowicki A.* Polynomial Derivations and their Rings of Constants. – Torun: Uniwersytet Mikolaja Kopernika, 1994. – 170 p.

Одержано 07.08.2017