УДК 519.21

Ю. В. Козаченко (Київський нац. ун-т ім. Т. Шевченка, Донецький нац. ун-т ім. Василя Стуса),
М. Ю. Петранова (Донецький нац. ун-т ім. Василя Стуса)

ДІЙСНІ СТАЦІОНАРНІ ГАУСОВІ ПРОЦЕСИ ЗІ СТІЙКИМИ КОРЕЛЯЦІЙНИМИ ФУНКЦІЯМИ[2]

The paper deals with real stationary processes with a stable correlation function, with the distribution of some functionalities from these processes and some of their properties.

В роботі розглянуті дійсні стаціонарні процеси зі стійкою корреляційною функцією, розподіли деяких функціоналів від цих процесів та деякі їх властивості.

Вступ. Дана робота продовжує дослідження роботи [1], де вивчались комплексні гауссові процеси зі стійкою кореляційною функцією. В цій роботі вивчаються дійсні стаціонарні процеси зі стійкою корреляційною функцією, зокрема розподіли деяких функціоналів від цих процесів та деякі їх властивості. Для інших процесів подібні задачі розглядались в роботах та книгах [2–6]

Моделі деяких гауссових стаціонарних процесів зі стійкими кореляційними функціями будувались в роботах [1, 7, 8].

Робота складається з чотирьох розділів. У першому розділі знаходяться оцінки розподілу супремуму гауссовських стаціонарних процесів зі стійкою коваріаційною функцією. В другому розділі вивчається поведінка цих процесів на нескінченності. В третьому розділі знаходяться оцінки розподілу норм цих процесів у просторі $L_p(T)$. В четвертому розділі досліджуються деякі аналітичні властивості цих процесів.

1. Розподіл супремуму дійсного гауссового випадкового процесу зі стійкими коваріаційними функціями.

Теорема 1. *Нехай* $T = [a, b]$, $X = \{X(t), t \in [a, b], -\infty < a < b < \infty\}$ *центрований сепарабельний гауссів процес та* $M = \sup_{t \in T} \left(E|X(t)|^2\right)^{1/2}$. *Припустимо, що існує неперервна строго зростаюча функція* $\sigma = \{\sigma(h), h \geq 0\}$ *така що* $\sigma(h) > 0$, $h > 0$, $\sigma(0) = 0$ *та*

$$\sup_{t,s \in [a,b]} \left(E|X(t) - X(s)|^2\right)^{1/2} < \sigma(h).$$

Крім того існує невід'ємна неспадна функція $r(u), u \geq 1$ *така що функція* $r(e^y), y \geq 0$ *— опукла та виконуєтьcя умова: для деякого* $v > 0$ *(а тому і для будь-якого* $0 < v < \infty$*)*

$$I_r(v) = \int_0^v r\big(\frac{b-a}{2 \cdot \sigma^{(-1)}(u)} + 1\big) du < \infty,$$

[2]Робота була виконана в рамках проекту Норвезько-українського співробітництва у галузі математичної освіти

де $\sigma^{(-1)}(u)$ *— обернена до* $\sigma(u)$ *функція. Тоді для будь-яких* $\theta \in (0,1)$ *та* $\lambda > 0$ *справджується нерівність:*

$$E \exp\left\{\lambda \sup_{t\in[a,b]} |X(t)|\right\} \le 2D(\lambda,\theta), \tag{1}$$

де $D(\lambda,\theta) = \exp\left\{\frac{\lambda^2 M^2}{2(1-\theta)^2}\right\} \cdot r^{(-1)}\left(\frac{I_r(\theta M)}{\theta M}\right)$, $r^{(-1)}(v)$ *— обернена до* $r(v)$ *функція.*

Доведення. Ця теорема випливає з теореми 3.4.4 книги [9], див. також роботу [10] та доведення в роботі [11].

Наслідок 1. *За умов теореми 1 при будь-якому* $\varepsilon > 0$ *справджується нерівність*

$$P\left\{\sup_{t\in[a,b]} |X(t)| > \varepsilon\right\} \le \exp\left\{-\frac{\varepsilon^2(1-\theta)^2}{2M^2}\right\} \cdot r^{(-1)}\left(\frac{I_r(\theta M)}{\theta M}\right). \tag{2}$$

Доведення. З нерівності Чебишева та нерівності (1) випливає, що при $\lambda > 0$

$$P\left\{\sup_{t\in[a,b]} |X(t)| > \varepsilon\right\} \le \frac{E\left\{\lambda \sup_{t\in[a,b]} |X(t)|\right\}}{\exp\{\lambda\varepsilon\}} \le$$
$$\exp\left\{\frac{\lambda^2 M^2}{2(1-\theta)^2}\right\} \cdot \exp\{-\lambda\varepsilon\} \cdot r^{(-1)}\left(\frac{I_r(\theta M)}{\theta M}\right). \tag{3}$$

Нерівність (2) випливає з нерівності (3), якщо покласти $\lambda = \frac{\varepsilon(1-\theta)^2}{M^2}$ (точка, в якій права частина в нерівності (3) набуває мінімуму за λ).

Означення 1. *Дійсний стаціонарний гауссів процес* $X_\alpha = \{X_\alpha(t), t \in \mathbf{R}\}$, $0 < \alpha \le 2$, *такий що* $EX_\alpha(t) = 0$, $\rho_\alpha(h) := EX_\alpha(t+h)X_\alpha(t) = B^2 exp\{-d|h|^\alpha\}$, $d > 0$ *називається дійсним гауссовим стаціонарним процесом зі стійкою кореляційною функцією.*

Теорема 2. *Нехай* X_α *— дійсний сепарабельний гауссовий стаціонарний процес зі стійкою кореляційною функцією. Тоді для будь-яких* $-\infty < a < b < +\infty$, $0 < \theta < 1$, $\beta < \min\left(1, \frac{\alpha}{2}\right)$, $\varepsilon > 0$ *справджується нерівність:*

$$P\left\{\sup_{t\in[a,b]} |X(t)| > \varepsilon\right\} \le \exp\left\{-\frac{\varepsilon^2(1-\theta)^2}{2B^2}\right\} \cdot 2^{1/\beta-1}\left(\frac{(b-a)(\sqrt{2d})^{2/\alpha}}{\theta^{2/\alpha}\left(1-\frac{2\beta}{\alpha}\right)^{1/\beta}} + 1\right).$$

Доведення. Теорема випливає з наслідку 1. Оцінимо за умов теореми таку величину $r^{(-1)}\left(\frac{I_r(\theta M)}{\theta M}\right)$. В нашому випадку

$$E|X_\alpha(t+h) - X_\alpha(t)|^2 = 2\big(\rho_\alpha(0) - \rho_\alpha(h)\big) = 2B^2\big(1 - exp\{-d|h|^\alpha\}\big).$$

Тобто $\sigma(h) = \sqrt{2}B\big(1 - exp\{-d|h|^\alpha\}\big)^{1/2}$. Зауважимо, що $\sigma(h) < \sqrt{2}B$. Отже, $\sigma^{(-1)}(h)$ визначена при $0 \le h < \sqrt{2}B$. Оскільки $\sigma(h) \le \sqrt{2}B\big(dh^\alpha\big)^{1/2} = \hat{\sigma}(h)$ тоді при $0 < s < B\sqrt{2}$

$$\sigma^{(-1)}(s) \ge \hat{\sigma}^{(-1)}(s) = \left(\frac{s}{B\sqrt{2d}}\right)^{2/\alpha}.$$

Отже,

$$I_r(v) \leq \int_0^{\min(v,B\sqrt{2})} r\Big(\frac{(b-a)}{s^{2/\alpha}}\big(B\sqrt{2d}\big)^{2/\alpha}+1\Big)ds.$$

Покладемо $r(u)=u^\beta-1$ при $u\geq 1$, де $0<\beta<\min(\alpha/2,1)$. Тоді

$$I_r(v) \leq \int_0^{\min(v,B\sqrt{2})} \left(\Big(\frac{(b-a)}{s^{2/\alpha}}\big(B\sqrt{2d}\big)^{2/\alpha}+1\Big)^\beta-1\right)ds \leq$$

$$\int_0^{\min(v,B\sqrt{2})} \Big(\frac{(b-a)}{s^{2/\alpha}}\big(B\sqrt{2d}\big)^{2/\alpha}\Big)^\beta ds =$$

$$\frac{1}{\Big(1-\frac{2\beta}{\alpha}\Big)}\Big((b-a)\big(B\sqrt{2d}\big)^{2/\alpha}\Big)^\beta\cdot\Big(\min(v,B\sqrt{2})\Big)^{\left(1-\frac{2\beta}{\alpha}\right)}.$$

Тому

$$I_r(\theta B)\leq\Big((b-a)\big(B\sqrt{2d}\big)^{2/\alpha}\Big)^\beta\frac{1}{\Big(1-\frac{2\beta}{\alpha}\Big)}\big(\theta B\big)^{1-\frac{2\beta}{\alpha}}.$$

Оскільки $r^{(-1)}(u)=(u+1)^{1/\beta}$, тоді

$$r^{(-1)}\Big(\frac{I_r(\theta B)}{\theta B}\Big)\leq\Big((b-a)^\beta\Big(B\sqrt{2d}\Big)^{2\beta/\alpha}\frac{1}{\Big(1-\frac{2\beta}{\alpha}\Big)}(\theta B)^{-\frac{2\beta}{\alpha}}+1\Big)^{1/\beta}. \tag{4}$$

Оскільки при $z\geq 1$ справджується нерівність $(b+a)^z\geq 2^{z-1}\big(a^z+b^z\big)$, тоді

$$r^{(-1)}\Big(\frac{I_r(\theta B)}{\theta B}\Big)\leq 2^{1/\beta-1}\left(\frac{(b-a)\big(\sqrt{2d}\big)^{2/\alpha}}{\theta^{2/\alpha}}\Big(1-\frac{2\beta}{\alpha}\Big)^{-1/\beta}+1\right). \tag{5}$$

Тепер твердження теореми випливає з нерівностей (2) та (3).

Наслідок 2. *Нехай виконуються умови теореми 2, тоді при $\varepsilon>\sqrt{2}B$ справджується нерівність*

$$P\left\{\sup_{t\in[a,b]}|X_\alpha(t)|>\varepsilon\right\}\leq$$

$$\exp\left\{-\frac{\varepsilon^2}{2B^2}\right\}\cdot e\cdot 2^{1/\beta-1}\left(\frac{(b-a)\big(\sqrt{2d}\big)^{2/\alpha}}{\Big(1-\big(1-\frac{2B^2}{\varepsilon^2}\big)^{1/2}\Big)^{2/\alpha}}\Big(1-\frac{2\beta}{\alpha}\Big)^{-1/\beta}+1\right).$$

Доведення. Нерівність (5) випливає з нерівності (4), якщо покласти $\big(1-\theta\big)^2=\Big(1-\frac{2B^2}{\varepsilon^2}\Big)$ при $\varepsilon>\sqrt{2}B$, тобто при $\theta=1-\Big(1-\frac{2\beta^2}{\varepsilon^2}\Big)^{1/2}$.

Наслідок 3. *Нехай виконуються умови теореми 2, тоді при $\varepsilon>\sqrt{2}B$ справджується нерівність*

$$P\left\{\sup_{t\in[a,b]}|X_\alpha(t)|>\varepsilon\right\}\leq exp\left\{-\frac{\varepsilon^2}{2B^2}\right\}\cdot$$

$$e\cdot 2^{4/\alpha-1}\Big(\frac{(b-a)\cdot d^{1/\alpha}\cdot 2^{5/\alpha}\cdot\varepsilon^{4/\alpha}}{B^{4/\alpha}}+1\Big). \tag{6}$$

Доведення. При $0 \leq x \leq 1$ справджується нерівність $1-(1-x)^{1/2} = \frac{1-(1-x)}{1+(1-x)^{1/2}} \geq \frac{x}{2}$. Отже, $\left(1-\left(1-\frac{2B^2}{\varepsilon^2}\right)^{1/2}\right)^{2/\alpha} \geq \left(\frac{B}{\varepsilon}\right)^{4/\alpha}$. Тепер нерівність (6) випливає з нерівності (5), якщо покласти $\beta = \frac{\alpha}{4}$.

2. Поведінка дійсного гауссового стаціонарного процесу зі стійкими коваріаційними функціями $X_\alpha(t)$ при прямуванні t до нескінченності.

Теорема 3. *Нехай $X_\alpha = \{X_\alpha(t), t \in \mathbf{R}\}$ — дійсний гаусовий стаціонарний процес зі стійкою кореляційною функцією* (див. означення 1), $C = \{C(t), t \geq 0\}$ *— монотонно зростаюча функція, така що $C(t) \geq 1, t \geq 0$ та $C(t) \to \infty$ при $t \to \infty$; $b_0, b_1, b_2, ..., b_k$, така послідовність, що $b_0 = 0, b_k < b_{k+1}$, та $b_k \to \infty$ при $k \to \infty$, $r_0, r_1, r_2, ..., r_k$ така послідовність, що $r_k > 1$ та $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{r_k} = 1$, $C_k = C(b_k), k = 0, 1, 2...$ і виконуються умови*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{r_k}{C_k^2} < \infty, \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{r_k}(b_{k+1}-b_k)^\gamma < \infty,$$

де γ — деяке число, що $0 < \gamma < 1$. Тоді при будь-якому $0 < \theta < 1$ та $\varepsilon > 0$ справджується нерівність

$$P\left\{\sup_{t\geq 0} \frac{|X_\alpha(t)|}{C(t)} > \varepsilon\right\} \leq 2^{\frac{4}{\alpha}-1} \exp\left\{-\frac{\varepsilon^2(1-\theta)^2}{2B^2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{r_k}{C_k^2}}\right\} \cdot$$
$$\exp\left\{\frac{1}{\theta^{\gamma/2}\cdot\gamma^\gamma} \cdot (\sqrt{2d})^{\frac{2\gamma}{\alpha}} \cdot 2^{\frac{4\gamma}{\alpha}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{r_k}(b_{k+1}-b_k)^\gamma\right\}. \tag{7}$$

Доведення. Нехай $\lambda > 0$, $S(\lambda) := E\exp\left\{\lambda \sup_{t\geq 0}\frac{|X_\alpha(t)|}{C(t)}\right\}$ тоді з нерівності Гельдера отримаємо, що

$$S(\lambda) \leq E\exp\left\{\lambda \sup_{t\in[b_k,b_{k+1}]} \frac{|X_\alpha(t)|}{C(t)}\right\} \leq \prod_{k=0}^{\infty}\left(E\exp\left\{\lambda r_k \sup_{t\in[b_k,b_{k+1}]}\frac{|X_\alpha(t)|}{C(t)}\Big)\right\}\right)^{1/r_k} \leq$$
$$\prod_{k=0}^{\infty}\left(E\exp\left\{\frac{\lambda r_k}{C_k}\sup_{t\in[b_k,b_{k+1}]}|X_\alpha(t)|\right\}\right)^{1/r_k}.$$

З нерівності (1) випливає, що

$$E\exp\left\{\frac{\lambda r_k}{C_k}\sup_{t\in[b_k,b_{k+1}]}|X_\alpha(t)|\right\} \leq 2D(\lambda,\theta) \leq$$

$$\exp\left\{\Big(\frac{\lambda r_k}{C_k}\Big)^2\frac{B^2}{2(1-\theta)^2}\right\} r^{(-1)}\Big(\frac{I_{r_k}(\theta B)}{\theta B}\Big),$$

де

$$I_{r_k}(v) = \int_0^v r\Big(\frac{(b_{k+1}-b_k)}{2\sigma^{(-1)}(v)}+1\Big)dv,$$

θ — будь-яке число, таке що $0 < \theta < 1$, $r(u), u \geq 1$ — монотонно зростаюча функція, така що при $u > 0$ функція $r(e^u)$ — опукла. Зауважимо, що $\frac{\alpha}{2} \leq 1$. Покладемо $r(u) = u^{\frac{\alpha}{4}-1}$ при $u \geq 1$. Тоді з нерівності (5) випливає, що

$$r^{(-1)}\Big(\frac{I_{r_k}(\theta B)}{\theta B}\Big) \leq 2^{4/\alpha-1}\Big(\frac{(b_{k+1}-b_k)(\sqrt{2d})^{2/\alpha}}{\theta^{2/\alpha}} \cdot 2^{4/\alpha}+1\Big).$$

З нерівності (1) отримаємо, що

$$S(\lambda) \leq$$

$$\prod_{k=0}^{\infty}\left(\exp\left\{\Big(\frac{\lambda \cdot r_k}{C_k}\Big)^2 \cdot \frac{B^2}{2(1-\theta)^2}\right\} \cdot 2^{\frac{4}{\alpha}-1}\Big(\frac{(b_{k+1}-b_k)\sqrt{2d}^{\frac{2}{\alpha}}}{\theta^{2/\alpha}} \cdot 2^{4/\alpha}+1\Big)\right)^{1/r_k} =$$

$$= \exp\left\{\frac{\lambda^2 B^2 \sum_{k=0}^{\infty}\frac{r_k}{C_k^2}}{2(1-\theta)^2}\right\} \cdot$$

$$\exp\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{r_k}\ln\Big(2^{4/\alpha-1}\Big((b_{k+1}-b_k)\cdot\frac{\sqrt{2d}^{2/\alpha}\cdot 2^{4/\alpha}}{\theta^{2/\alpha}}+1\Big)\Big)\right\} =$$

$$= \exp\left\{\frac{\lambda^2 B^2 \sum_{k=0}^{\infty}\frac{r_k}{C_k^2}}{2(1-\theta)^2}\right\} \cdot \exp\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{r_k}\ln\Big(2^{4/\alpha-1}\Big)\right\} \cdot$$

$$\cdot \exp\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{r_k}\ln\Big(1+\frac{\sqrt{2d}^{2/\alpha}}{\theta^{2/\alpha}}(b_{k+1}-b_k)\cdot 2^{4/\alpha}\Big)\right\}. \quad (8)$$

Оскільки при $0 < \gamma < 1$, $x > 0$ справджується нерівність $\ln(1+x) \leq \frac{1}{\gamma}\ln(1+x)^\gamma \leq \frac{1}{\gamma}\ln(1+x^\gamma) \leq \frac{x^\gamma}{\gamma}$ тоді з нерівності (8) випливає, що

$$S(\lambda) \leq 2^{4/\alpha-1} \cdot \exp\left\{\frac{\lambda^2 B^2 \sum_{k=0}^{\infty}\frac{r_k}{C_k^2}}{2(1-\theta)^2}\right\} \cdot \exp\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^{4/\alpha}}{r_k\gamma}\left(\frac{(\sqrt{2d})^{2/\alpha}(b_{k+1}-b_k)}{\theta^{2/\alpha}}\right)^\gamma\right\}.$$

Отже,

$$S(\lambda) \leq 2^{4/\alpha-1} \cdot \exp\left\{\frac{\lambda^2 B^2}{2(1-\theta)^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{r_k}{C_k^2}\right\} \cdot \exp\left\{\frac{w(\gamma)}{\theta^{\gamma/2}}\right\},$$

де

$$w(\gamma) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{r_k\gamma}\Big((b_{k+1}-b_k)(\sqrt{2d})^{\alpha/2}\cdot 2^{4/\alpha}\Big)^\gamma.$$

Тоді з нерівності Чебишева випливає, що при $\varepsilon > 0$, $\lambda > 0$

$$P\left\{\sup_{t\geq 0}\frac{|X_\alpha(t)|}{C(t)} > \varepsilon\right\} \leq$$

$$2^{4/\alpha-1}\exp\left\{\frac{\lambda^2 B^2 \sum_{k=0}^{\infty}\frac{r_k}{C_k^2}}{2(1-\theta)^2}\right\} \cdot \exp\{-\lambda\varepsilon\} \cdot \exp\left\{\frac{w(\gamma)}{\theta^{\gamma/2}}\right\}. \quad (9)$$

Якщо в нерівність (9) підставити

$$\lambda = \frac{\varepsilon(1-\theta)^2}{B^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{r_k}{C_k^2}},$$

тоді отримаємо твердження теореми.

Наслідок 4. *Нехай виконуються умови теореми 3, тоді при* $\varepsilon \geq \sqrt{2}B\Big(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{r_k}{C_k^2}\Big)^{1/2}$ *справджується нерівність*

$$P\left\{\sup_{t\geq 0} \frac{|X_\alpha(t)|}{C(t)} > \varepsilon\right\} \leq$$

$$\exp\left\{-\frac{\varepsilon^2}{2B^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{r_k}{C_k^2}}\right\} \cdot 2^{4/\alpha-1} \cdot e \cdot \exp\left\{\frac{d^{\gamma/2} \cdot 2^{6\gamma/\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{r_k}(b_{k+1}-b_k)^\gamma}{\left(1-(1-2B^2\sum_{k=0}^{\infty} \frac{r_k}{C_k^2})^{1/2}\right)^{\gamma/2}}\right\}. \quad (10)$$

Доведення. Нерівність (10) випливає з нерівності (7), якщо покласти $\Big(1-\theta\Big)^2 = \Big(1-\frac{2B^2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{r_k}{C_k^2}}{\varepsilon^2}\Big)$, тобто $\theta = 1-\Big(1-\frac{2B^2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{r_k}{C_k^2}}{\varepsilon^2}\Big)^{1/2}$.

Наслідок 5. *Нехай виконуються умови теореми 3, тоді при* $\varepsilon > \sqrt{2}B\Big(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{r_k}{C_k^2}\Big)^{1/2}$ *справджується нерівність*

$$P\left\{\sup_{t\geq 0} \frac{|X_\alpha(t)|}{C(t)} > \varepsilon\right\} \leq \exp\left\{-\frac{\varepsilon^2}{2B^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{r_k}{C_k^2}}\right\} \cdot 2^{4/\alpha-1} \cdot$$

$$\exp\left\{-\frac{d^{\gamma/2} \cdot 2^{3\gamma/\alpha} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{r_k}\big(b_{k+1}-b_k\big)^\gamma \varepsilon^{2/\alpha}}{\Big(B\big(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{r_k}{C_k^2}\big)^{1/2}\Big)^{2/\alpha}}\right\}. \quad (11)$$

Доведення. Нерівність (11) випливає з нерівність (10), оскільки, як і в наслідку 3

$$\Big((1-\frac{2B^2}{\varepsilon^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{r_k}{C_k^2})\Big) \geq \frac{B^2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{r_k}{C_k^2}}{\varepsilon^2}.$$

Теорема 4. *Нехай виконуються умови теореми 3, тоді з ймовірностю одиниця для всіх* $t > 0$ *виконується умова*

$$|X_\alpha(t)| < \xi_\alpha \cdot C(t),$$

де ξ_α *— така випадкова величина, що при будь-якому* $0 < \theta < 1$

$$P\{\xi_\alpha > \varepsilon\} \leq 2^{\frac{4}{\alpha}-1} \exp\left\{-\frac{\varepsilon^2(1-\theta)^2}{2B^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{r_k}{C_k^2}}\right\} \cdot$$

$$\exp\left\{\frac{1}{\theta^{\gamma/2} \cdot \gamma^\gamma} \cdot (\sqrt{2d})^{\frac{2\gamma}{\alpha}} \cdot 2^{\frac{4\gamma}{\alpha}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{r_k}(b_{k+1}-b_k)^\gamma\right\},$$

або при $\varepsilon \geq \sqrt{2}B\big(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{r_k}{C_k^2}\big)^{1/2}$ *справджується нерівність*

$$P\left\{\xi_\alpha > \varepsilon\right\} \leq \exp\left\{-\frac{\varepsilon^2}{2B^2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{r_k}{C_k^2}}\right\}\cdot 2^{4/\alpha-1}.$$

$$\exp\left\{-\frac{d^{\gamma/2}\cdot 2^{3\gamma/\alpha}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{r_k}\big(b_{k+1}-b_k\big)^{\gamma}\varepsilon^{2/\alpha}}{\Big(B\big(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{r_k}{C_k^2}\big)^{1/2}\Big)^{2/\alpha}}\right\}.$$

Доведення. Теорема випливає з теореми 3 та нерівностей (7) і (3), оскільки при всіх $t > 0$ з імовірністю одиниця

$$\frac{X_\alpha(t)}{C(t)} \leq \sup_{t\geq 0}\frac{|X_\alpha(t)|}{C(t)} < \infty.$$

Приклад 1. *Якщо в умовах теореми 3 покласти* $b_k = e^k$, $k = 1, 2, \ldots$ *та* $\frac{1}{r_k} = e^{-k}\cdot\frac{e}{(e-1)}$, *тоді умови теореми виконуються, якщо збігається ряд* $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{e^k}{c(e^k)^2}$, *а цей ряд збігається, якщо* $C(t) = t^{1/2+\beta}$, $\beta > 0$, *або* $C(t) = t^{1/2}(\ln t)^{1/2+\delta}$ *при* $\delta > 0$.

При цих b_k *та* e^k *збігається ряд при будь-яких* $\gamma < 1$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{r_k}(b_{k+1}-b_k)^{\gamma} = \sum_{k=0}^{\infty}e^{-k}\frac{e}{(e-1)}(e^{k+1}-e^k)^{\gamma} = (e-1)^{\gamma-1}\cdot e\sum_{k=0}^{\infty}e^{-k}\cdot e^{\gamma k} < \infty.$$

3. Розподіл норми в просторі $L_p(T)$ дійсного гауссового випадкового процесу зі стійкою коваріайційною функцією

Теорема 5. *Нехай* $\{\mathbb{T}, \Lambda, \mu\}$ *— вимірний простір,* $X = \{X(t), t \in \mathbb{T}\}$ *вимірний гауссовий випадковий процес. Нехай існує інтеграл Лебега* $\int_{\mathbb{T}}\big(E|X(t)|^2\big)^{p/2}d\mu(t)$, $p \geq 1$. *Тоді з ймовірністю одиниця існує* $\int_{\mathbb{T}}E|X(t)|^p d\mu(t)$, *та для всіх* ε, *таких що* $\varepsilon > C\cdot p^{p/2}$, *де* $c = \int_{\mathbb{T}}\big(E|X(t)|^2\big)^{p/2}d\mu(t)$ *має місце нерівність*

$$P\left\{\Big(\int_{\mathbb{T}}|X(t)|^p d\mu(t)\Big)^{1/p} > \varepsilon\right\} \leq 2^{\frac{4}{\alpha}-1}\exp\left\{-\frac{\varepsilon^2(1-\theta)^2}{2B^2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{r_k}{C_k^2}}\right\}.$$

$$\exp\left\{\frac{1}{\theta^{\gamma/2}\cdot\gamma^{\gamma}}\cdot(\sqrt{2d})^{\frac{2\gamma}{\alpha}}\cdot 2^{\frac{4\gamma}{\alpha}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{r_k}(b_{k+1}-b_k)^{\gamma}\right\}.$$

Доведення. *Ця теорема є простим наслідком теореми 2.1 роботи [12].*

Теорема 6. *Нехай* $X_\alpha(t)$, $t \in [a, b]$ *— вимірний дійсний гауссовий процес зі стійкою коваріаційною функцією. Тоді для* $\varepsilon > \hat{c}^{1/p}\sqrt{p}$, *де* $\hat{c} = B^p(b-a)$ *справджується нерівність*

$$P\left\{\Big(\int_a^b|X_\alpha(t)|^p\Big)^{1/p}dt > \varepsilon\right\} \leq 2\exp\left\{-\frac{\varepsilon^2}{2\hat{c}^{2/p}}\right\}.$$

Доведення. Ця теорема випливає з попередньої теореми. Тут простір $\{\mathbb{T}, \Lambda, \mu\}$ це інтервал $[a, b]$ з борелевською σ-алгеброю та мірою Лебега $E|X(t)|^2 = B^2$.

Теорема 7. *Нехай $X_\alpha(t)$, $t \in \mathbf{R}$ — вимірний дійсний гауссовий процес зі стійкою коваріаційною функцією, $C(t) > 1$ деяка функція, така що $\int_0^\infty \frac{1}{\left(C(t)\right)^p} dt < \infty$. Тоді для $\varepsilon > \hat{c}^{1/p} \cdot \sqrt{p}$, де $\hat{c} = B^p \int_0^\infty \frac{1}{C(t)} dt$ справджується нерівність*

$$P\left\{ \left(\int_0^\infty |X_\alpha|(t)^p \right)^{1/p} > \varepsilon \right\}.$$

Доведення. Ця теорема також випливає з теореми 5. Тут простір $\{\mathbb{T}, \Lambda, \mu\}$ — це $[0, \infty)$ з борелевською σ-алгеброю, процес $X(t)$ це $\frac{|X_\alpha(t)|}{C(t)}$:

$$\int_0^\infty \left(E|X(t)|^2 \right)^{p/2} dt = B \int_0^\infty \frac{1}{\left(C(t)\right)^p} dt.$$

Прикладом $C(t)$ може бути функція така, що при $t > 1$ $C(t) = t^{1/p+\varepsilon}$, де $\varepsilon > 0$

4. Аналітичні властивості гауссових випадкових процесів зі стійкими кореляційними функціями.

Наступна теорема — це простий наслідок теореми 2.2.9 з книги [[2], с. 79].

Теорема 8. *Нехай $X = \{X(t), t \in [a, b]\}$ — сепарабельний гауссів процес, такий що існує монотонно зростаюча неперервна функція $\sigma(h), h \geq 0$, така що $\sigma(0) = 0$, для якої справджується*

$$\sup_{|t-s| \leq h} \left(E\big(X(t) - X(s)\big)^2 \right)^{1/2} \leq \sigma(h)$$

та збігається інтеграл

$$\int_0^{\sigma(\varepsilon)} \ln \Big(\frac{b-a}{2\sigma^{-(1)}(u)} \Big)^{1/2} du \leq \infty.$$

Тоді $X(t)$, $t \in [a, b]$ є вибірково неперервний з імовірністю одиниця та для довільних $\varepsilon > 0$, $0 < p < 1$, $x > B(p, \varepsilon)$, де

$$B(p, \varepsilon) = \frac{4(3-p)}{3p(1-p)^2} \int_0^{\sigma(\varepsilon)} \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\ln \Big(\frac{b-a}{2\sigma^{(-1)}(u)} + 1 \Big) \right)^{1/2} du$$

справджується нерівність

$$P\left\{ \sup_{|t-s| \leq \varepsilon} |X(t) - X(s)| > x \right\} \leq 2exp\left\{ -\frac{1}{2} \Big(\frac{x - B(p, \varepsilon)}{A(p, \varepsilon)} \Big)^2 \right\},$$

де $A(p, \varepsilon) = \frac{\sigma(\varepsilon)(3-p)}{(1-p)^2}$.

З теореми 8 випливає така теорема

Теорема 9. *Нехай* $X_\alpha = \{X_\alpha(t), t \in [a,b]\}$ *сепарабельний центрований гаусcовий процес зі стійкою кореляційною функцією. Тоді при всіх* $0 < \alpha < 2$ $X_\alpha(t)$, $t \in [a,b]$ *вибірково неперервний з імовірністю одиниця та для довільних* $\varepsilon > 0$, $0 < p < 1$, $0 < \beta < \min(1,\alpha)$, $x > \hat{B}(p,\varepsilon)$, *де*

$$\hat{B}(p,\varepsilon) = \frac{4(3-p)}{3p(1-p)^2} \cdot \frac{1}{2^{(1+\beta)/2}} (b-a)^{\beta/2} (\sqrt{2}d)^{\beta/\alpha} \cdot B^{\beta/\alpha} \cdot \frac{1}{(1-\beta/\alpha)} \Big(\sqrt{2}dB\varepsilon^{\alpha/2}\Big)^{1-\beta/\alpha}$$

справджується нерівність

$$P\left\{\sup_{|t-s|\le\varepsilon} |X(t) - X(s)| > x\right\} \le 2\exp\left\{-\frac{1}{2}\Big(\frac{x-\hat{B}(p,\varepsilon)}{A(p,\varepsilon)}\Big)^2\right\}, \qquad (12)$$

де $A(p,\varepsilon) = \frac{(3-p)\sqrt{2}dB\varepsilon^{\alpha/2}}{(1-p)^2}$.

Доведення. В нашому випадку можна покласти $\sigma(h) = \sqrt{2}dB|h|^{\alpha/2}$, тоді $\sigma^{(-1)}(u) = \frac{u}{\sqrt{2}dB}^{2/\alpha}$ та

$$\int_0^{\sigma(\varepsilon)} \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\ln\Big(\frac{(b-a)\Big(\sqrt{2}dB\Big)^{2/\alpha}}{2u^{2/\alpha}} + 1\Big)\right)^{1/2} du \le$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}\beta^{1/2}} (b-a)^{\beta/2} (\sqrt{2}d)^{\beta/\alpha} B^{\beta/\alpha} \frac{1}{2^{\beta/\alpha}} \int_0^{\sigma(\varepsilon)} \frac{1}{u^{\beta/\alpha}} du =$$

$$\frac{1}{2^{(1+\beta/2)}} (b-a)^{\beta/2} (\sqrt{2}d)^{\beta/\alpha} B^{\beta/\alpha} \frac{1}{\big(1-\frac{\beta}{\alpha}\big)} \Big(\sqrt{2}dB\varepsilon^{\alpha/2}\Big)^{1-\frac{\beta}{\alpha}}.$$

Зауваження 1. *Щоб знайти більш точну оцінку, треба знайти мінімум по* β *правої частини в нерівності* (12).

Означення 2. *Випадковий процес* $X(t)$, $t \in [a,b]$ *називають диференційованим в середньоквадратичному, коли існує границя (в середньоквадратичному)*

$$l.i.m._{h\to 0} \frac{X(t+h) - X(t)}{h} = X'(t).$$

Якщо існує $X'(t)$ — *тоді її називають середньоквадратичною похідною процесу* $X(t)$.

Теорема 10 (див. [13], с. 300)**.** *Для того, щоб у процесу* $X(t)$, $EX(t) = 0$ *існувала середньоквадратична похідна* $X'(t)$ *необхідно та достатньо, щоб існувала границя*

$$\lim_{t'\to t, t''\to t} \frac{1}{(t'-t)(t''-t)} \Big(B(t',t'') - B(t',t) - B(t'',t) + B(t,t)\Big),$$

де $B(t,s) = EX(t)X(s)$. *При цьому, якщо існує похідна* $\frac{\partial^2 B(t,s)}{\partial t \partial s}$, *тоді* $EX'(t)X'(s) = \frac{\partial^2 B(t,s)}{\partial t \partial s}$.

З цієї теореми випливає наступна теорема.

Теорема 11. *Нехай $X_\alpha(t)$, $t \in [a,b]$ стаціонарний процес зі стійкою кореляційною функцією (не обов'язково гауссовою). Тоді при $0 < \alpha < 2$ середньоквадратичні похідні не існують, а при $\alpha = 2$ похідна існує та*

$$EX_2'(t)X_2'(s) = B^2 exp\left\{-d(t-s)\right\} \cdot \Big(4d^2 \cdot (t-s)^2 + 2d\Big),$$

тобто $X_2'(t)$ стаціонарний процес з кореляційною функцією

$$EX_2'(t+\tau)X_2'(t) = B^2 exp\left\{-d|\tau|^2\right\} \cdot \Big(4d^2 \cdot \tau^2 + 2d\Big). \tag{13}$$

Доведення. В нашому випадку

$$\frac{1}{(t'-t)(t''-t)}\Big(B(t',t'') - B(t',t) - B(t'',t) + B(t,t)\Big) =$$

$$\frac{1}{(t'-t)(t''-t)}\Big(B^2 exp\left\{-d|t'-t''|^\alpha\right\} - B^2 exp\left\{-d|t'-t|^\alpha\right\} -$$

$$B^2 exp\left\{-d|t''-t|^\alpha\right\} + B^2\Big).$$

Легко побачити, що границя цього виразу існує тоді і лише тоді, коли $\alpha = 2$. Крім того, очевидно, що

$$EX_2'(t)X_2'(s) = \frac{\partial^2 B(t,s)}{\partial t \partial s} = B^2 exp\left\{-d|\tau|^\alpha\right\} \cdot \Big(4d^2 \cdot \tau^2 + 2d\Big).$$

Зауваження 2. *Коли $X_\alpha(t)$ — гауссів процес, то $X_\alpha'(t)$ також гауссів процес.*

Тепер покажемо, що середньоквадратична похідна від $X_\alpha(t)$ є звичайною неперервною похідною з імовірністю одиниця, якщо $X_\alpha(t)$ — гауссів та сепарабельний процес.

Теорема 12 (див. [14]). *Нехай $X(t)$, $t \in [a,b]$ неперервний з імовірністю одиниця випадковий процес з $EX(t) = 0$, $EX(t)X(s) = B(t,s)$ та нехай існує неперервна з імовірністю одиниця середньоквадратична похідна процесу $X(t)$, така що $EX'(t)X'(s) = \frac{\partial^2 B(t,s)}{\partial t \partial s}$, тоді з імовірністю одиниця $X'(t)$ є звичайною похідною процесу $X(t)$.*

Наслідок 6. *У процесу $X_2(t)$ існує вибіркова неперервна похідна $X_2'(t)$ з кореляційною функцією (13) та $X_2'(t)$ — гауссів процес.*

Доведення. Щоб довести твердження наслідку досить довести, що процес $X_2'(t)$ вибірково неперервний з імовірністю одиниця. Легко побачити, що

$$E\Big(X_2'(t) - X_2'(s)\Big)^2 = 4B^2 d - 4B^2 exp\left\{-d|\tau|^\alpha\right\}(2d\tau^2 + d) =$$

$$4B^2 d\Big(1 - exp\left\{-d|\tau|^\alpha\right\}\Big)(2d\tau^2 + d) =$$

$$4B^2 d\Big(1 - 2d\tau^2 \cdot exp\left\{-d|\tau|^\alpha\right\}\Big) + \Big(1 - exp\left\{-d|\tau|^\alpha\right\}\Big) \geq$$

$$4B^2 d\Big(2d^2\tau^4 + d\tau^2\Big) = 4B^2 d\Big(2d^2\tau^2 + d\Big) \cdot \tau^2 \geq Z\tau^2.$$

де $Z = 4B^2 d\Big(2d^2\tau^2 + d\Big)$ та така константа, що $|\tau| < s$. Тобто $\sigma(\tau) = \sqrt{Z}\tau$, далі доведення теореми аналогічне доведенню теореми 9.

Висновки. У роботі знайдено розподіл супремуму дійсного гауссового випадкового процесу зі стійкими коваріаційними функціями. Описана поведінка дійсного гауссового стаціонарного процесу зі стійкими коваріаційними функціями $X_\alpha(t)$ при прямуванні t до нескінченності. Також, знайдено розподіл норми в просторі $L_p(T)$ дійсного гауссового випадкового процесу зі стійкою коваріайційною функцією та описано аналітичні властивості гауссових випадкових процесів зі стійкими корелляційними функціями.

Список використаної літератури

1. *Kozachenko Y. V.,Petranova M. Y.* Proper complex random processes //Stat. Optim. and Inf. Comput. – 2017. – Vol. 5, No. 2. – P. 137–146.
2. *Kozachenko Yu. V., Vasilic O. I.* On the distribution of suprema of $Sub_\varphi(\Omega)$ random processes // Theory Stoch. Processes – 1998. – Vol. 4(20), No. 1-2. – P. 147–160.
3. *Kozachenko Yu. V.* Random processes in Orlicz spaces I // Theory Probab. and Math. Stat. – 1985. – Vol. 30. – P. 103–117.
4. *Buldygin V.V., Kozachenko Yu.V.* On local properties of sample functions of some stochastic processes and fields // Teor. Veroyatn. Mat. Stat. – 1974. – Vol. 10. – p. 39–47.
5. *Kozachenko Yu., Pogoriliak O., Rozora I. and Tegza A.* Simulation of Stochastic Processes with Given Accuracy and Reliability. – London: ISTE Press Ltd and Elsevier Ltd, 2016. – 346 p.
6. *Козаченко Ю.В., Кучінка К.Й., Сливка–Тилищак Г.І.* Випадкові процеси в задачах математичної фізики. – Ужгород: ТОВ "РІК–У", 2017. – 256 с.
7. *Petranova M.* Simulation of Gaussian Stationary Quasi Ornstein–Uhlenbeck Process with Given Reliability and Accuracy in Spaces $C([0,T])$ and $L_p([0,T])$ // Journal of Applied Mathematics and Statistics – 2016. – Vol. 3(1). – P.44–58.
8. *Kozachenko Yu., Petranova M.* Simulation of Gaussian stationary Ornstein–Uhlenbeck process with given reliability and accuracy in space C([0, T]) // Monte Carlo Methods Appl. – 2017. – Vol. 23, No. 4. – p. 277–286.
9. *Buldygin V.V., Kozachenko Yu.V.* Metric characterization of random variables and random processes. – Providence, RI: American Mathematical Society, 2000. – 257 p.
10. *Kozachenko Yu. V., Olenko A.* Aliasing-Truncation errors in sampling approximations on Sub-Gaussian signals // IEEE Transactions on Information Theory – 2016. – Vol. 62, No. 10. – p. 5831–5838.
11. *Dozzi M., Kozachenko Y., Mishura Y. and Ralchenko K.* Asymptotic growth of trajectories of multifractional Brownian motion with statistical applications to drift parameter estimation // Statistical Inference for Stochastic processes. – 2016. – DOI: 10.1007/s11203-016-9147-z. – P. 1–32.
12. *Kozachenko Y., Kamenschikova O.* On an expansion of random processes in the space $L_p(T)$ // Theory Probab. And Math. Statist. – 2009. – Vol. 79. – P. 83–88.
13. *Гихман И.И., Скороход А.В., Ядренко М.И.* Теория вероятностей и математическая статистика. – Киев: Вища школа, 1988. – 440 с.
14. *Gladkaya O. N.* On condition of differentiability in direction of sample function of random fields // Theory Probab. and Math Statistics. – 1978. – Vol. 17. – P. 33–41.

Одержано 10.09.2017