УДК 517.925

К. С. Корепанова (Одеський нац. ун-т імені І. І. Мечникова)

АСИМПТОТИЧНА ПОВЕДІНКА РОЗВ'ЯЗКІВ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ n-ГО ПОРЯДКУ З ПРАВИЛЬНО ЗМІННИМИ НЕЛІНІЙНОСТЯМИ

In the paper the question of existence and asymptotic behaviour of $\mathcal{P}^k_{+\infty}(\lambda_0)$–solutions, $k \in \{3, \dots, n\}$ and $\lambda_0 \in \{1, \pm\infty\}$, of a binomial non-autonomous n-th order ordinary differential equation with regularly varying nonlinearities was investigated. The asymptotic formulas of their derivatives of order up to $n-1$ were obtained too.

У роботі вивчено питання про існування та асимптотичну поведінку $\mathcal{P}^k_{+\infty}(\lambda_0)$–розв'язків при $k \in \{3, \dots, n\}$ і $\lambda_0 \in \{1, \pm\infty\}$ у двочленного неавтономного звичайного диференціального рівняння n-го порядку з правильно змінними нелінійностями. Отримані також асимптотичні формули для їх похідних до порядку $n-1$ включно.

1. Вступ. Розглянемо диференціальне рівняння

$$y^{(n)} = \alpha p(t) \prod_{j=0}^{n-1} \varphi_j(y^{(j)}), \tag{1}$$

в якому $n \geq 2$, $\alpha \in \{-1, 1\}$, $p : [a, \omega[\to]0, +\infty[$ — неперервна функція, $-\infty < a < \omega \leq +\infty$, $\varphi_j : \Delta Y_j \to]0; +\infty[$ — неперервна та правильно змінна при $y^{(j)} \to Y_j$ функція порядку σ_j, $j = \overline{0, n-1}$, ΔY_j — деякий односторонній окіл точки Y_j, $Y_j \in \{0, \pm\infty\}$[3].

Важливим окремим випадком рівняння (1) є узагальнене рівняння типу Емдена-Фаулера

$$y^{(n)} = \alpha p(t) \prod_{j=0}^{n-1} |y^{(j)}|^{\sigma_j} \text{sign } y, \tag{2}$$

де $n \geq 2$, $\alpha \in \{-1, 1\}$, $\sigma_j \in \mathbb{R}$ ($j = \overline{0, n-1}$), $p : [a, \omega[\to]0, +\infty[$ — неперервна функція, $-\infty < a < \omega \leq +\infty$, яке має безліч застосувань на практиці: у ядерній фізиці, газовій динаміці, механіці рідини та інших галузях природознавства.

У роботі [1] В. М. Євтухов з множини розв'язків рівняння (2) виділив достатньо широкий клас, так званих, $\mathcal{P}_\omega(\lambda_0)$–розв'язків ($\lambda_0 \in \mathbb{R}$). Досліджуючи апріорні асимптотичні властивості $\mathcal{P}_\omega(\lambda_0)$–розв'язків, у роботі [2] було встановлено, що їх множина розпадається на $n+2$ неперетинних підмножин в залежності від значень λ_0. При виконанні нерівності $\sigma_0 + \ldots + \sigma_{n-1} \neq 1$ були отримані необхідні та достатні умови існування у диференціального рівняння (2) кожного з $n+2$ можливих типів $\mathcal{P}_\omega(\lambda_0)$–розв'язків та встановлені асимптотичні при $t \uparrow \omega$ зображення для таких розв'язків та їх похідних до порядку $n-1$ включно.

У зв'язку зі стрімким розвитком теорії правильно та повільно змінних функцій та регулярним їх використанням у багатьох наукових дослідженнях не згасав інтерес до їх застосування в асимптотичній теорії диференціальних рівнянь.

[3]При $Y_j = \pm\infty$ тут і далі будемо вважати, що всі числа з околу ΔY_j одного знаку.

У роботі [3] клас $\mathcal{P}_\omega(\lambda_0)$–розв'язків був уперше конкретизований для рівнянь n–го порядку з правильно змінною нелінійністю. Пізніше в роботах В. М. Євтухова та О. М. Клопота [4–6], О. М. Клопота [7, 8] були розглянуті рівняння виду

$$y^{(n)} = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k p_k(t) \prod_{j=0}^{n-1} \varphi_{kj}(y^{(j)}),$$

де $n \geq 2$, $\alpha_k \in \{-1, 1\}$ $(k = \overline{1, m})$, $p_k : [a, \omega[\to]0, +\infty[$ $(k = \overline{1, m})$ — неперервні функції, $-\infty < a < \omega \leq +\infty$, $\varphi_{kj} : \Delta Y_j \to]0; +\infty[$ $(k = \overline{1, m}, j = \overline{0, n-1})$ — неперервні та правильно змінні при $y^{(j)} \to Y_j$ функції порядку σ_j, ΔY_j — деякий односторонній окіл точки Y_j, Y_j дорівнює або 0, або $\pm\infty$. Для цих рівнянь був введений клас $\mathcal{P}_\omega(Y_0, \ldots, Y_{n-1}, \lambda_0)$–розв'язків, для яких, зважаючи на їх означення, виконуються такі умови

$$\lim_{t \uparrow \omega} y^{(j)}(t) = Y_j \ (j = \overline{0, n-1}), \quad \lim_{t \uparrow \omega} \frac{[y^{(n-1)}(t)]^2}{y^{(n-2)}(t) y^{(n)}(t)} = \lambda_0,$$

були встановлені необхідні та достатні умови їх існування.

2. Постановка задачі та допоміжні результати. У цій роботі розглядається диференціальне рівняння (1) при $\omega = +\infty$ та $n \geq 3$, тобто диференціальне рівняння

$$y^{(n)} = \alpha p(t) \prod_{j=0}^{n-1} \varphi_j(y^{(j)}), \tag{3}$$

в якому $\alpha \in \{-1, 1\}$, $p : [a, +\infty[\to]0, +\infty[$ — неперервна функція, $a \in \mathbb{R}$, $\varphi_j : \Delta Y_j \to]0; +\infty[$ — неперервна та правильно змінна при $y^{(j)} \to Y_j$ функція порядку σ_j, $j = \overline{0, n-1}$, ΔY_j — деякий односторонній окіл точки Y_j, $Y_j \in \{0, \pm\infty\}$.

Окрім зазначених вище розв'язків, для яких $\lim\limits_{t \to +\infty} y^{(n-k)}(t)$ $(k = \overline{1, n})$ дорівнює або 0, або $\pm\infty$, у рівняння (3) можуть бути також розв'язки, для кожного з яких існує $k \in \{1, \ldots, n\}$ таке, що

$$y^{(n-k)}(t) = c + o(1) \quad (c \neq 0) \quad \text{при } t \to +\infty. \tag{4}$$

Для рівнянь загального виду були отримані деякі результати про існування розв'язків з такими зображеннями в наслідках 8.2, 8.6, 8.12 (див. [9], гл. II, §8, с. 207, 214, 223) та наслідках 9.3, 9.7 (див. [9], гл. II, §9, с. 230, 233), для диференціальних рівнянь типу Емдена-Фаулера — в теоремі 16.9 (див. [9], гл. IV, §16, с. 321). Але ці результати забезпечують досить жорстке обмеження на $(n-k+1)$–у та наступні похідні розв'язку.

У цій роботі досліджується питання про отримання нових результатів з менш жорсткими обмеженнями. При $k = 1, 2$ або у випадку, коли границі $\varphi_i(y^{(i)})$ $(i = \overline{n-k+1, n-2})$ при $y^{(i)} \to Y_i$ дорівнюють додатнім сталим, в роботах [10] та [11] для рівняння (3) були отримані необхідні та достатні умови існування розв'язків виду (4) та описана їх асимптотична поведінка без додаткових обмежень на ці розв'язки. У всіх інших випадках з розв'язків виду (4) був виділений (див. [12]) досить широкий підклас, так званих, $\mathcal{P}_{+\infty}^k(\lambda_0)$–розв'язків рівняння (3) таким чином.

Означення 1. *Розв'язок y диференціального рівняння* (3) *будемо при* $k \in \{3,\dots,n\}$ *називати* $\mathcal{P}^k_{+\infty}(\lambda_0)$*–розв'язком, де* $-\infty \le \lambda_0 \le +\infty$*, якщо він визначений на проміжку* $[t_{0k},+\infty[\subset [a,+\infty[$ *та задовольняє такі умови*

$$\lim_{t\to+\infty} y^{(n-k)}(t)=c \ \ (c\neq 0), \quad \lim_{t\to+\infty}\frac{[y^{(n-1)}(t)]^2}{y^{(n-2)}(t)y^{(n)}(t)}=\lambda_0. \tag{5}$$

За своїми асимптотичними властивостями множина всіх $\mathcal{P}^k_{+\infty}(\lambda_0)$–розв'язків рівняння (3) розпадається на $k+1$ ($k\in\{3,\dots,n\}$) неперетинних підмножин (див. [2]), які відповідають таким значенням параметру λ_0:

$$\lambda_0\in\mathbb{R}\setminus\left\{0,\tfrac{1}{2},\dots,\tfrac{k-3}{k-2},1\right\}, \quad \lambda_0=\pm\infty, \quad \lambda_0=1,$$

$$\lambda_0=\tfrac{n-j-1}{n-j}, \quad j\in\{n-k+2,\dots,n-1\}.$$

Випадок $\lambda_0\in\mathbb{R}\setminus\left\{0,\tfrac{1}{2},\dots,\tfrac{k-3}{k-2},1\right\}$ вивчений у роботі [12]. Метою цієї роботи є дослідження питання про умови існування та асимптотичну поведінку $\mathcal{P}^k_{+\infty}(\lambda_0)$–розв'язків ($k\in\{3,\dots,n\}$) рівняння (3) в особливому випадку, коли $\lambda_0\in\{1,\pm\infty\}$, а також про кількість таких розв'язків.

Згідно з роботою [2] досліджувані розв'язки рівняння (3) мають такі апріорні асимптотичні властивості.

Лема 1. *Нехай* $k\in\{3,\dots,n\}$ *та* $y:[t_{0k},+\infty[\to\mathbb{R}$ *– довільний* $\mathcal{P}^k_{+\infty}(\lambda_0)$*–розв'язок рівняння* (3)*. Тоді:*
1) *якщо* $\lambda_0=\pm\infty$*, то мають місце асимптотичні при* $t\to+\infty$ *співвідношення*

$$y^{(l-1)}(t)\sim\tfrac{t^{n-l}}{(n-l)!}y^{(n-1)}(t) \quad (l=\overline{n-k+2,n-1}), \quad y^{(n)}(t)=o\left(\tfrac{y^{(n-1)}(t)}{t}\right); \tag{6}$$

2) *якщо* $\lambda_0=1$*, то при* $t\to+\infty$

$$\tfrac{y^{(n-k+2)}(t)}{y^{(n-k+1)}(t)}\sim\tfrac{y^{(n-k+3)}(t)}{y^{(n-k+2)}(t)}\sim\dots\sim\tfrac{y^{(n)}(t)}{y^{(n-1)}(t)} \ \text{та} \ \lim_{t\to+\infty}\tfrac{ty^{(n-k+2)}(t)}{y^{(n-k+1)}(t)}=+\infty. \tag{7}$$

З вигляду рівняння (3) зрозуміло, що $y^{(n)}(t)$ зберігає знак у деякому околі $+\infty$. Тоді $y^{(n-l)}(t)$ ($l=\overline{1,k-1}$) є строго монотонними функціями в околі $+\infty$ та з огляду на (4) можуть прямувати лише до нуля при $t\to+\infty$. Тому

$$Y_{j-1}=0 \quad \text{при} \ \ j=\overline{n-k+2,n}. \tag{8}$$

Тут і далі будемо вважати, що числа μ_j ($j=\overline{0,n-1}$), які визначені таким чином:

$$\mu_j=\begin{cases} \ \ 1, & \text{якщо } Y_j=+\infty,\\ & \text{або } Y_j=0 \text{ та } \Delta Y_j \ - \text{ правий окіл } 0,\\ -1, & \text{якщо } Y_j=-\infty,\\ & \text{або } Y_j=0 \text{ та } \Delta Y_j \ - \text{ лівий окіл } 0,\end{cases}$$

такі, що

$$\mu_j\mu_{j+1}>0 \text{ при } j=\overline{0,n-k-1}, \ \ \mu_j\mu_{j+1}<0 \text{ при } j=\overline{n-k+1,n-2}, \tag{9}$$

$$\alpha\mu_{n-1} < 0. \tag{10}$$

Ці умови на μ_j $(j = \overline{0, n-1})$ та α є необхідними для існування у рівняння (3) $\mathcal{P}^k_{+\infty}(\lambda_0)$–розв'язків, оскільки для кожного з них в деякому околі $+\infty$

$$\operatorname{sign}\, y^{(j)}(t) = \mu_j \ \ (j = \overline{0, n-1}), \ \ \operatorname{sign}\, y^{(n)}(t) = \alpha.$$

Крім того, очевидно, що враховуючи перше зі співвідношень (5) для таких розв'язків мають місце такі асимптотичні зображення

$$y^{(l-1)}(t) = \frac{ct^{n-l-k+1}}{(n-l-k+1)!}\,[1+o(1)] \quad (l = \overline{1, n-k}) \quad \text{при } t \to +\infty, \tag{11}$$

$c \in \Delta Y_{n-k}$ і тоді

$$Y_{j-1} = \begin{cases} +\infty, & \text{якщо } \ \mu_{n-k} > 0, \\ -\infty, & \text{якщо } \ \mu_{n-k} < 0 \end{cases} \quad \text{при } \ j = \overline{1, n-k}. \tag{12}$$

У рівнянні (3) кожна з правильно змінних при $y^{(j)} \to Y_j$ функцій φ_j $(j = \overline{0, n-1})$ порядку σ_j може бути представлена (див. [13], гл.I, §1, с.10) у вигляді

$$\varphi_j(y^{(j)}) = |y^{(j)}|^{\sigma_j} L_j(y^{(j)}) \quad (j = \overline{0, n-1}), \tag{13}$$

де $L_j : \Delta Y_j \to]0, +\infty[$ $(j = \overline{0, n-1})$ — повільно змінна при $y^{(j)} \to Y_j$ функція. Згідно з означенням та властивостями повільно змінних функцій

$$\lim_{\substack{y^{(j)} \to Y_j \\ y^{(j)} \in \Delta Y_j}} \frac{L_j(\lambda y^{(j)})}{L_j(y^{(j)})} = 1 \quad \text{для будь-якого} \quad \lambda > 0 \quad (j = \overline{0, n-1}). \tag{14}$$

У якості прикладів повільно змінних при $y \to Y_0$ функцій можна навести такі:

$$|\ln|y||^{\gamma_1}, \quad \ln^{\gamma_2}|\ln|y||, \quad \gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R},$$
$$\exp(|\ln|y||^{\gamma_3}), \quad 0 < \gamma_3 < 1, \quad \exp\left(\frac{\ln|y|}{\ln|\ln|y||}\right),$$

функції, що мають відмінну від нуля границю при $y \to Y_0$.

Будемо також говорити, що повільно змінна при $y \to Y_0$ функція $L : \Delta Y_0 \to]0, +\infty[$ задовольняє умову S_0, якщо

$$L\left(\mu e^{[1+o(1)]\ln|y|}\right) = L(y)[1+o(1)] \quad \text{при} \quad y \to Y_0 \ \ (y \in \Delta Y_0),$$

де $\mu = \operatorname{sign} y$.

Умову S_0 напевне задовольняють функції L, які мають скінченну границю при $y \to Y_0$, а також функції виду

$$L(y) = |\ln|y||^{\gamma_1}, \quad L(y) = |\ln|y||^{\gamma_1}|\ln|\ln|y|||^{\gamma_2},$$

де $\gamma_1, \gamma_2 \neq 0$, та багато інших.

Зауваження 1. *Якщо повільно змінна при $y \to Y_0$ функція $L : \Delta Y_0 \to]0, +\infty[$ задовольняє умову S_0, то для будь-якої повільно змінної при $y \to Y_0$ функції $l : \Delta Y_0 \to]0, +\infty[$*

$$L(yl(y)) = L(y)[1+o(1)] \ \ \textit{при} \ \ y \to Y_0 \ \ (y \in \Delta Y_0).$$

Справедливість цього твердження безпосередньо випливає з теореми 1.1 про рівномірну збіжність та теореми 1.2 про представлення повільно змінних функцій (див. [13], гл.I, §1, с.10).

Зауваження 2 (див. [3]). *Якщо повільно змінна при $y \to Y_0$ функція $L : \Delta Y_0 \to]0, +\infty[$ задовольняє умову S_0, а функція $y : [t_{0k}, +\infty[\longrightarrow \Delta Y_0$ — неперервно диференційовна і така, що*

$$\lim_{t \to +\infty} y(t) = Y_0, \quad \frac{y'(t)}{y(t)} = \frac{\xi'(t)}{\xi(t)} [r + o(1)] \quad \textit{при} \quad t \to +\infty,$$

де r — відмінна від нуля дійсна стала, ξ — неперервно диференційовна в деякому околі $+\infty$ дійсна функція, для якої $\xi'(t) \neq 0$, тоді

$$L(y(t)) = L(\mu |\xi(t)|^r) [1 + o(1)] \quad \textit{при} \quad t \to +\infty,$$

де $\mu = \operatorname{sign} y(t)$ в деякому околі $+\infty$.

Зауваження 3 (див. [5]). *Якщо повільно змінна при $y \to Y_0$ функція $L : \Delta Y_0 \to]0, +\infty[$ задовольняє умову S_0, а функція $r : \Delta Y_0 \times K \to \mathbb{R}$, де K — компакт в $\mathbb{R}^n$, така, що*

$$\lim_{\substack{y \to \Delta Y_0 \\ y \in \Delta Y_0}} r(z, v) = 0 \quad \textit{рівномірно по } v \in K,$$

тоді

$$\lim_{\substack{y \to \Delta Y_0 \\ y \in \Delta Y_0}} \frac{L(ve^{[1+r(z,v)] \ln |z|})}{L(z)} = 1 \quad \textit{рівномірно по } v \in K, \ \textit{де } v = \operatorname{sign} z.$$

3. Основні результати. Розглянемо випадок $\lambda_0 = \pm\infty$. Для рівняння (3) справедливе таке твердження.

Теорема 1. *При $k \in \{3, \dots, n\}$ рівняння (3) не має $\mathcal{P}^k_{+\infty}(\pm\infty)$–розв'язків.*

Доведення. Дійсно, якщо $y : [t_{0k}, +\infty[\to \Delta Y_0$ — довільний $\mathcal{P}^k_{+\infty}(\pm\infty)$–розв'язок рівняння (3), то з останнього співвідношення (6) безпосередньо випливає, що

$$y^{(n-1)}(t) \sim t^{o(1)} \quad \text{при } t \to +\infty,$$

а це разом з іншими співвідношеннями (6) суперечить умові (8). Отже, справедливим є твердження теореми.

Далі для вивчення випадку $\lambda_0 = 1$ окрім фактів, зазначених у параграфі 2, про правильно та повільно змінні при $y^{(j)} \to Y_j$ $(j = \overline{0, n-1})$ функції, будуть використовуватися при $k \in \{3, \dots, n\}$ такі допоміжні позначення:

$$\gamma_k = 1 - \sum_{j=n-k+1}^{n-1} \sigma_j, \quad \nu_k = \sum_{j=n-k+1}^{n-2} \sigma_j (n-j-1), \quad M_k(c) = \prod_{j=1}^{n-k} \left| \tfrac{c}{(n-j-k+1)!} \right|^{\sigma_{j-1}},$$

$$I_k(t) = \varphi_{n-k}(c) M_k(c) \int_{A_{0k}}^{t} p(\tau) \prod_{j=0}^{n-k-1} \varphi_j \left(\mu_j \tau^{n-k-j} \right) d\tau, \quad I_{1k}(t) = \int_{A_{1k}}^{t} I_k(\tau) d\tau,$$

де A_{0k} (A_{1k}) вибирається рівним числу $a_{0k} \ge a$ ($a_{1k} \ge a_{0k}$) (справа від якого підінтегральна функція неперервна), якщо при цьому значенні границі інтегрування відповідний інтеграл прямує до $+\infty$ при $t \to +\infty$, та рівним $+\infty$, якщо при такому значенні границі інтегрування він прямує до нуля при $t \to +\infty$.

Перш за все встановимо для рівняння (3) справедливість наступних двох теорем.

Теорема 2. *Нехай $k \in \{3, \dots, n\}$ та $\gamma_k \ne 0$. Для існування у рівняння (3) $\mathcal{P}^k_{+\infty}(1)$–розв'язків необхідно, щоб $c \in \Delta Y_{n-k}$, разом з (8) – (10) та (12) виконувались умови*

$$\frac{I_k'(t)}{I_k(t)} \sim \frac{I_k(t)}{I_{1k}(t)} \text{ при } t \to +\infty, \quad \lim_{t\to+\infty} |I_k(t)|^{\frac{1}{\gamma_k}} = 0 \; (j = \overline{n-k+1, n-1}), \tag{15}$$

та були справедливі при $t \in]a, +\infty[$ нерівності

$$\gamma_k I_k(t) < 0, \quad I_{1k}(t) > 0, \quad (-1)^{n-j-1}\mu_j\mu_{n-1} > 0 \; (j = \overline{n-k+1, n-3}). \tag{16}$$

Більш того, для кожного такого розв'язку, окрім (4) та (11), мають місце при $t \to +\infty$ асимптотичні зображення

$$y^{(j)}(t) = \left(\frac{\gamma_k I_{1k}(t)}{I_k(t)}\right)^{n-j-1} y^{(n-1)}(t)[1+o(1)] \quad (j = \overline{n-k+1, n-2}), \tag{17}$$

$$\frac{\left|y^{(n-1)}(t)\right|^{\gamma_k}}{\prod\limits_{j=n-k+1}^{n-1} L_j\left(\left(\frac{\gamma_k I_{1k}(t)}{I_k(t)}\right)^{n-j-1} y^{(n-1)}(t)\right)} = \alpha\mu_{n-1}\gamma_k I_k(t) \left|\frac{\gamma_k I_{1k}(t)}{I_k(t)}\right|^{\nu_k} [1+o(1)]^4. \tag{18}$$

Теорема 3. *Нехай $k \in \{3, \dots, n\}$, $\gamma_k \ne 0$ та повільно змінні при $y^{(j)} \to Y_j$ функції L_j ($j = \overline{n-k+1, n-1}$) задовольняють умову S_0. Тоді, у разі наявності у рівняння (3) $\mathcal{P}^k_{+\infty}(1)$–розв'язків, виконується умова*

$$\int\limits_{a_{2k}}^{+\infty} \left(\frac{I_{1k}(\tau)}{I_k(\tau)}\right)^{k-2} \left|\gamma_k I_k(\tau) \left|\frac{\gamma_k I_{1k}(\tau)}{I_k(\tau)}\right|^{\nu_k} \prod_{j=n-k+1}^{n-1} L_j\left(\mu_j |I_k(\tau)|^{\frac{1}{\gamma_k}}\right)\right|^{\frac{1}{\gamma_k}} d\tau < +\infty, \tag{19}$$

де $a_{2k} \ge a_{1k}$ таке, що $\mu_{j-1} |I_k(t)|^{\frac{1}{\gamma_k}} \in \Delta Y_{j-1}$ ($j = \overline{n-k+2, n}$) при $t \ge a_{2k}$, та для кожного з таких розв'язків мають місце окрім (11) асимптотичні при $t \to +\infty$ зображення

$$y^{(n-k)}(t) = c + \mu_{n-1}\gamma_k^{k-2} W_k(t)\,[1+o(1)], \tag{20}$$

$$y^{(l-1)}(t) = \mu_{n-1}\gamma_k^{n-l} \left(\frac{I_{1k}(t)}{I_k(t)}\right)^{n-l-k+2} W_k'(t)[1+o(1)] \;\; (l = \overline{n-k+2, n}), \tag{21}$$

де

$$W_k(t) = \int\limits_{+\infty}^{t} \left(\frac{I_{1k}(\tau)}{I_k(\tau)}\right)^{k-2} \left|\gamma_k I_k(\tau) \left|\frac{\gamma_k I_{1k}(\tau)}{I_k(\tau)}\right|^{\nu_k} \prod_{j=n-k+1}^{n-1} L_j\left(\mu_j |I_k(\tau)|^{\frac{1}{\gamma_k}}\right)\right|^{\frac{1}{\gamma_k}} d\tau.$$

[4] Тут і далі будемо вважати, що $\prod\limits_{m}^{l} = 1$, якщо $m > l$.

Доведення теорем 2–3. Нехай $y : [t_{0k}, +\infty[\to \Delta Y_0$ – довільний $\mathcal{P}^k_{+\infty}(1)$–розв'язок рівняння (3). Тоді, як було встановлено перед формулюваннями теорем, $c \in \Delta Y_{n-k}$, виконуються (8) – (10), (12) та мають місце асимптотичні при $t \to +\infty$ зображення (4) та (11). З (11) також випливає, що

$$\frac{y^{(j+1)}(t)}{y^{(j)}(t)} = \frac{n-j-k}{t}\,[1+o(1)] \quad (j = \overline{0, n-k-1}) \quad \text{при } t \to +\infty.$$

Враховуючи представлення (13) правильно змінних при $t \to +\infty$ функцій $\varphi_j(y^{(j)})$ при $j = \overline{0, n-k-1}$ та справедливість виконання співвідношень (14) рівномірно по λ на будь-якому відрізку $[d_1, d_2] \subset]0, +\infty[$, маємо

$$\varphi_{j-1}\left(\tfrac{ct^{n-j-k+1}}{(n-j-k+1)!}[1+o(1)]\right) = \left|\tfrac{ct^{n-j-k+1}}{(n-j-k+1)!}[1+o(1)]\right|^{\sigma_{j-1}} L_{j-1}\left(\tfrac{ct^{n-j-k+1}}{(n-j-k+1)!}[1+o(1)]\right) =$$
$$= \left|\tfrac{c}{(n-j-k+1)!}\right|^{\sigma_{j-1}} t^{(n-j-k+1)\sigma_{j-1}} L_{j-1}\left(\mu_{j-1}t^{n-j-k+1}\right)[1+o(1)] =$$
$$= \left|\tfrac{c}{(n-j-k+1)!}\right|^{\sigma_{j-1}} \varphi_{j-1}(\mu_{j-1}t^{n-j-k+1})[1+o(1)] \quad (j = \overline{1, n-k}) \quad \text{при } t \to +\infty.$$

Тоді, підставивши розв'язок разом з похідними до порядку $n-k$ включно в (3), при $t \to +\infty$ отримаємо

$$\frac{y^{(n)}(t)}{\varphi_{n-1}(y^{(n-1)}(t))\ldots\varphi_{n-k+1}(y^{(n-k+1)}(t))} =$$
$$= \alpha M_k(c)p(t)\varphi_0\left(\mu_0 t^{n-k}\right)\varphi_1\left(\mu_1 t^{n-k-1}\right)\ldots\varphi_{n-k}(c)\,[1+o(1)].$$

Перепишемо його у вигляді

$$\frac{y^{(n)}(t)}{\prod\limits_{j=n-k+1}^{n-1}\varphi_j(y^{(j)}(t))} = \alpha I_k'(t)\,[1+o(1)]. \tag{22}$$

Згідно з (13) та теоремою 1.2 про представлення ([13], гл.I, §1, с.10) існують неперервно диференційовні правильно змінні при $y^{(j)} \to Y_j$ функції $\varphi_{0j} : \Delta Y_j \to]0; +\infty[$ порядків σ_j $(j = \overline{0, n-1})$ такі, що

$$\lim_{\substack{y^{(j)} \to Y_j \\ y^{(j)} \in \Delta Y_j}} \frac{\varphi_j(y^{(j)})}{\varphi_{0j}(y^{(j)})} = 1, \qquad \lim_{\substack{y^{(j)} \to Y_j \\ y^{(j)} \in \Delta Y_j}} \frac{y^{(j)}\varphi_{0j}'(y^{(j)})}{\varphi_{0j}(y^{(j)})} = \sigma_j. \tag{23}$$

Зважаючи на (23) та перше зі співвідношень (7), маємо

$$\left(\frac{y^{(s-1)}(t)}{\prod\limits_{j=n-k+1}^{n-1}\varphi_{0j}(y^{(j)}(t))}\right)' =$$
$$= \frac{y^{(s)}(t)}{\prod\limits_{j=n-k+1}^{n-1}\varphi_{0j}(y^{(j)}(t))}\left[1 - \sum_{j=n-k+1}^{n-1}\left(\frac{y^{(s-1)}(t)y^{(j+1)}(t)}{y^{(s)}(t)y^{(j)}(t)}\;\frac{y^{(j)}(t)\varphi_{0j}'(y^{(j)}(t))}{\varphi_{0j}(y^{(j)}(t))}\right)\right] = \tag{24}$$
$$= \frac{y^{(s)}(t)}{\prod\limits_{j=n-k+1}^{n-1}\varphi_{0j}(y^{(j)}(t))}[\gamma_k + o(1)] \ \text{ при } t \to +\infty \ \ (s = \overline{n-k+2, n}).$$

Звідси при $s = n$ випливає, що (22) може бути переписане у вигляді

$$\left(\frac{y^{(n-1)}(t)}{\prod\limits_{j=n-k+1}^{n-1}\varphi_{0j}(y^{(j)}(t))}\right)' = \alpha\gamma_k I_k'(t)[1+o(1)] \text{ при } t \to +\infty.$$

Інтегруючи це співвідношення на проміжку від t_{0k} до t та враховуючи правило вибору границі інтегрування A_{0k} у функції $I_k(t)$, отримаємо

$$\frac{y^{(n-1)}(t)}{\prod\limits_{j=n-k+1}^{n-1}\varphi_{0j}(y^{(j)}(t))} = \alpha\gamma_k I_k(t)[1+o(1)] \text{ при } t \to +\infty. \tag{25}$$

Аналогічно з (25) з використанням (24) при $s = n-1$ отримаємо

$$\frac{y^{(n-2)}(t)}{\prod\limits_{j=n-k+1}^{n-1}\varphi_{0j}(y^{(j)}(t))} = \alpha\gamma_k^2 I_{1k}(t)[1+o(1)] \text{ при } t \to +\infty. \tag{26}$$

З (22), (25) та (26) з урахуванням першої з умов (23) маємо

$$\frac{y^{(n)}(t)}{y^{(n-1)}(t)} \sim \frac{I_k'(t)}{\gamma_k I_k(t)}, \ \frac{y^{(n-1)}(t)}{y^{(n-2)}(t)} \sim \frac{I_k(t)}{\gamma_k I_{1k}(t)} \text{ при } t \to +\infty \tag{27}$$

та, зважаючи на (9), отримуємо справедливість перших двох нерівностей з (16). Також з (27) з огляду на лему 1 випливає, що справедливі умови (15), з урахуванням тотожностей

$$y^{(j)}(t) = \frac{y^{j}(t)}{y^{(j+1)}(t)} \cdots \frac{y^{(n-2)}(t)}{y^{(n-1)}(t)} y^{(n-1)}(t) \quad (j = \overline{n-k+1, n-2})$$

мають місце асимптотичні зображення (17) та, в результаті, виконується остання з нерівностей (16).

Використовуючи наведені вище тотожності, зображення (17) та властивості, що випливають з теореми 1.2 ([13], гл.I, §1, с.10) для повільно змінних при $y^{(j)} \to Y_j$ функцій $L_{0j}(y^{(j)}) = \frac{\varphi_{0j}(y^{(j)})}{|y^{(j)}|^{\sigma_j}}$ $(j = \overline{n-k+1, n-1})$, знаходимо

$$\varphi_{0j}(y^{(j)}(t)) = |y^{(j)}|^{\sigma_j} L_{0j}(y^{(j)}(t)) \sim \left|\left(\frac{\gamma_k I_{1k}(t)}{I_k(t)}\right)^{n-j-1} y^{(n-1)}(t)\right|^{\sigma_j} \times$$
$$\times L_{0j}\left(\left(\frac{\gamma_k I_{1k}(t)}{I_k(t)}\right)^{n-j-1} y^{(n-1)}(t)[1+o(1)]\right) \sim$$
$$\sim \left|\frac{\gamma_k I_{1k}(t)}{I_k(t)}\right|^{(n-j-1)\sigma_j} |y^{(n-1)}(t)|^{\sigma_j} L_{0j}\left(\left(\frac{\gamma_k I_{1k}(t)}{I_k(t)}\right)^{n-j-1} y^{(n-1)}(t)\right)$$
$$(j = \overline{n-k+1, n-1}) \text{ при } t \to +\infty.$$

З огляду на ці співвідношення з (25) отримуємо при $t \to +\infty$ зображення

$$\frac{|y^{(n-1)}(t)|^{\gamma_k} \left|\frac{I_k(t)}{\gamma_k I_{1k}(t)}\right|^{\nu_k}}{\prod\limits_{j=n-k+1}^{n-1} L_{0j}\left(\left(\frac{\gamma_k I_{1k}(t)}{I_k(t)}\right)^{n-j-1} y^{(n-1)}(t)\right)} = \alpha\mu_{n-1}\gamma_k I_k(t)[1+o(1)],$$

з якого випливає справедливість (18). Таким чином, доведені твердження теореми 2.

Припустимо тепер додатково, що повільно змінні при $t \to +\infty$ функції L_j $(j = \overline{n-k+1, n-1})$ задовольняють умову S_0. Тоді зважаючи на перше співвідношення (15) та (25) при $t \to +\infty$ маємо

$$\frac{\left(\left(\frac{\gamma_k I_{1k}(t)}{I_k(t)}\right)^{n-j-1} y^{(n-1)}\right)'}{\left(\left(\frac{\gamma_k I_{1k}(t)}{I_k(t)}\right)^{n-j-1} y^{(n-1)}\right)} = (n-j-1)\left[\frac{I_k(t)}{I_{1k}(t)} - \frac{I_k'(t)}{I_k(t)}\right] + \frac{y^{(n)}(t)}{y^{(n-1)}(t)} =$$
$$= (n-j-1)\frac{I_k(t)}{I_{1k}(t)}[1-h(t)] + \frac{I_k(t)}{\gamma_k I_{1k}(t)}[1+o(1)] = \frac{I_k(t)}{I_{1k}(t)}\left[\frac{1}{\gamma_k} + o(1)\right] = \frac{I_k'(t)}{I_k(t)}\left[\frac{1}{\gamma_k} + o(1)\right],$$

де $h(t) = \frac{I_{1k}(t) I_k'(t)}{I^2(t)}$, $\lim\limits_{t\to+\infty} h(t) = 1$. Отже, згідно із зауваженням 2 справедливі такі асимптотичні при $t \to +\infty$ зображення

$$L_j\left(\left(\frac{\gamma_k I_{1k}(t)}{I_k(t)}\right)^{n-j-1} y^{(n-1)}\right) = L_j\left(\mu_j |I_k(t)|^{\frac{1}{\gamma_k}}\right)[1+o(1)] \quad (j = \overline{n-k+1, n-1}).$$

З огляду на отримані співвідношення з (18) випливає, що при $t \to +\infty$

$$y^{(n-1)}(t) = \mu_{n-1}\left|\gamma_k I_k(t)\left|\frac{\gamma_k I_{1k}(t)}{I_k(t)}\right|^{\nu_k} \prod_{j=n-k+1}^{n-1} L_j\left(\mu_j |I_k(t)|^{\frac{1}{\gamma_k}}\right)\right|^{\frac{1}{\gamma_k}} [1+o(1)].$$

Зважаючи на це перепишемо (17) у вигляді

$$y^{(l-1)}(t) = \mu_{n-1}\left(\frac{\gamma_k I_{1k}(t)}{I_k(t)}\right)^{n-l}\left|\gamma_k I_k(t)\left|\frac{\gamma_k I_{1k}(t)}{I_k(t)}\right|^{\nu_k} \prod_{j=n-k+1}^{n-1} L_j\left(\mu_j |I_k(t)|^{\frac{1}{\gamma_k}}\right)\right|^{\frac{1}{\gamma_k}} \times$$
$$\times[1+o(1)] \quad (l = \overline{n-k+2, n-1}) \text{ при } t \to +\infty, \tag{28}$$

тобто мають місце асимптотичні співвідношення (21).

Проінтегрувавши (28) при $l = n-k+2$ на $[t_{*k}, t]$, де $t_{*k} = \max\{a_{2k}, t_{0k}\}$, маємо

$$y^{(n-k)}(t) = y^{(n-k)}(t_{*k}) +$$
$$+\mu_{n-1}\gamma_k^{k-2}\int\limits_{t_{*k}}^{t}\left(\frac{I_{1k}(t)}{I_k(t)}\right)^{k-2}\left|\gamma_k I_k(t)\left|\frac{\gamma_k I_{1k}(t)}{I_k(t)}\right|^{\nu_k} \prod_{j=n-k+1}^{n-1} L_j\left(\mu_j |I_k(t)|^{\frac{1}{\gamma_k}}\right)\right|^{\frac{1}{\gamma_k}}[1+o(1)]d\tau.$$

Враховуючи першу з умов (5),

$$\lim_{t\to+\infty}\int\limits_{t_*}^{t}\left(\frac{I_{1k}(t)}{I_k(t)}\right)^{k-2}\left|\gamma_k I_k(t)\left|\frac{\gamma_k I_{1k}(t)}{I_k(t)}\right|^{\nu_k} \prod_{j=n-k+1}^{n-1} L_j\left(\mu_j |I_k(t)|^{\frac{1}{\gamma_k}}\right)\right|^{\frac{1}{\gamma_k}}[1+o(1)]d\tau = \mathrm{const}$$

і тоді за ознакою порівняння вірно (19). Використовуючи твердження 6 з монографії [14] (гл.V, §3, с.293) про асимптотичне обчислення інтегралів, для $(n-k)$–ї похідної розв'язку одержимо зображення (20).

Таким чином, асимптотичні при $t \to +\infty$ співвідношення (4), (17), (18) прийняли явний вигляд (20), (21). Теореми 2 та 3 повністю доведені.

У наступній теоремі наведемо достатні умови наявності у рівняння (3) $\mathcal{P}^k_{+\infty}(1)$–розв'язків із зазначеними в теоремі 3 асимптотичними зображеннями.

Теорема 4. *Нехай* $k \in \{3,\ldots,n\}$, $\gamma_k \neq 0$, $c \in \Delta Y_{n-k}$, *виконуються умови* (8) – (10), (12), (15), (16), (19) *та повільно змінні при* $y^{(j)} \to Y_j$ *функції* L_j $(j = \overline{n-k+1, n-1})$ *задовольняють умову* S_0. *Нехай, крім того, виконується нерівність* $\sigma_{n-1} \neq 1$ *та алгебраїчне відносно* ρ *рівняння*

$$\sum_{l=2}^{k-1} \sigma_{n-l}(\rho+1)^{k-l-1} - (1-\sigma_{n-1}+\rho)(\rho+1)^{k-2} = 0 \tag{29}$$

не має коренів з нульовою дійсною частиною. Тоді у рівняння (3) *існує* $(n-k+m)$*–параметричне сімейство* $\mathcal{P}^k_{+\infty}(1)$*–розв'язків з асимптотичними при* $t \to +\infty$ *зображеннями* (11), (20), (21), *де* m *— число коренів (з урахуванням кратних) алгебраїчного рівняння* (29) *з додатніми дійсними частинами.*

Зауваження 4. *Неважко перевірити, що алгебраїчне відносно* ρ *рівняння* (29) *напевне не має коренів з нульовою дійсною частиною, якщо виконується нерівність*

$$\sum_{l=2}^{k-1} |\sigma_{n-l}| < |1-\sigma_{n-1}|.$$

Доведення теореми 4. Покажемо, що для даного c з умови теореми у рівняння (3) існує принаймні один $\mathcal{P}^k_{+\infty}(1)$–розв'язок, заданий на деякому проміжку $[t_{0k}, +\infty[\subset [a, +\infty[$, який допускає при $t \to +\infty$ асимптотичні зображення (11), (20) та (21), а також з'ясуємо питання про кількість таких розв'язків.

Застосовуючи до рівняння (3) перетворення

$$\begin{aligned}
&y^{(l-1)}(t) = \tfrac{ct^{n-l-k+1}}{(n-l-k+1)!}[1+v_l(t)] \quad (l = \overline{1, n-k}),\\
&y^{(n-k)}(t) = c + \mu_{n-1}\gamma_k^{k-2} W(t)[1+v_{n-k+1}(t)],\\
&y^{(l-1)}(t) = \mu_{n-1}\gamma_k^{n-l}\left(\tfrac{I_{1k}(t)}{I_k(t)}\right)^{n-l-k+2} W'(t)[1+v_l(t)] \quad (l = \overline{n-k+2, n}),
\end{aligned} \tag{30}$$

отримаємо систему диференціальних рівнянь

$$\begin{cases}
v_l' = \frac{n-l-k+1}{t}\,[-v_l + v_{l+1}] \quad (l = \overline{1, n-k-1}),\\
v_{n-k}' = \frac{1}{t}\left[\frac{\mu_{n-1}\gamma_k^{k-2}}{c} W(t)\,[1+v_{n-k+1}] - v_{n-k}\right],\\
v_{n-k+1}' = \frac{W'(t)}{W(t)}\,[-v_{n-k+1} + v_{n-k+2}],\\
v_l' = \frac{I_k(t)}{\gamma_k I_{1k}(t)}\,[1 + v_{l+1} - \gamma(n-l-k+2)(1-h(t))[1+v_l]] - \frac{W''(t)}{W'(t)}\,[1+v_l]\\
(l = \overline{n-k+2, n-1}),\\
v_n' = \frac{I_k(t)}{I_{1k}(t)}\left[\left((-2+k)(1-h(t)) - \frac{W''(t)I_{1k}(t)}{W'(t)I_k(t)}\right)[1+v_n] + \right.\\
\left. + \frac{\alpha p(t)\varphi_0\left(\frac{ct^{n-k}}{(n-k)!}[1+v_1]\right)\ldots\varphi_{n-1}\left(\mu_{n-1}\left(\frac{I_{1k}(t)}{I_k(t)}\right)^{2-k} W'(t)[1+v_n]\right)}{\mu_{n-1}\left(\frac{I_{1k}(t)}{I_k(t)}\right)^{1-k} W'(t)}\right].
\end{cases} \tag{31}$$

Розглянемо її на множині $\Omega^n = [t_{0k}, +\infty[\times \mathbb{R}^n_{\frac{1}{2}}$, де $\mathbb{R}^n_{\frac{1}{2}} = \{(v_1,\ldots,v_n) \in \mathbb{R}^n : |v_j| \le \frac{1}{2},\ j = \overline{1,n}\}$ та $t_{0k} \ge a_{2k}$ вибране з урахуванням (19) таким чином, щоб при $t > t_{0k}$ та $(v_1,\ldots,v_n) \in \mathbb{R}^n_{\frac{1}{2}}$ виконувалися умови:

$$\begin{aligned}
&\tfrac{ct^{n-j-k+1}}{(n-j-k+1)!}\,[1+v_j(t)] \in \Delta Y_{j-1} \quad (j = \overline{1, n-k}),\\
&c + \mu_{n-1}\gamma_k^{k-2} W(t)\,[1+v_{n-k+1}(t)] \in \Delta Y_{n-k},\\
&\mu_{n-1}\gamma_k^{n-j}\left(\tfrac{I_{1k}(t)}{I_k(t)}\right)^{n-j-k+2} W'(t)\,[1+v_j(t)] \in \Delta Y_{j-1} \quad (j = \overline{n-k+2, n}).
\end{aligned}$$

Оскільки функції $\varphi_j(y^{(j)})$ $(j \in \{0,\dots,n-1\} \setminus \{n-k\})$ можуть бути представлені у вигляді (13) та співвідношення (14) виконуються рівномірно по λ на будь-якому відрізку $[d_1, d_2] \subset]0,+\infty[$, а також зважаючи на неперевність функції $\varphi_{n-k}(y^{(n-k)})$, (19) і те, що повільно змінні при $t \to +\infty$ функції L_j $(j = \overline{n-k+1, n-1})$ задовольняють умову S_0, маємо

$$\varphi_j\left(\tfrac{ct^{n-k-j}}{(n-k-j)!}\left[1+v_{j+1}\right]\right) = \varphi_j\left(\tfrac{ct^{n-k-j}}{(n-k-j)!}\right)(1+v_{j+1})^{\sigma_j}(1+R_j(t,v_{j+1})) =$$
$$= \left|\tfrac{c}{(n-k-j)!}\right|^{\sigma_j}\varphi_j(\mu_j t^{n-k-j})(1+v_{j+1})^{\sigma_j}(1+R_j(t,v_{j+1})) \quad (j=\overline{0,n-k-1}),$$
$$\varphi_j\left(\mu_{n-1}\gamma_k^{n-j-1}\left(\tfrac{I_{1k}(t)}{I_k(t)}\right)^{n-k-j+1} W'(t)\left[1+v_{j+1}\right]\right) =$$
$$= |\gamma_k|^{(n-j-1)\sigma_j}\varphi_j\left(\mu_j\left(\tfrac{I_{1k}(t)}{I_k(t)}\right)^{n-k-j+1} W'(t)\right)(1+v_{j+1})^{\sigma_j}(1+R_j(t,v_{j+1})) =$$
$$= |\gamma_k|^{(n-j-1)\sigma_j}\varphi_j(\mu_j|I_k(t)|^{\frac{1}{\gamma_k}})(1+v_{j+1})^{\sigma_j}(1+R_j(t,v_{j+1}))\ (j=\overline{n-k+1,n-1}),$$
$$\varphi_{n-k}\left(c+\mu_{n-1}\gamma_k^{k-2}\,W(t)\left[1+v_{n-k+1}(t)\right]\right) = \varphi_{n-k}(c)(1+R_{n-k}(t,v_{n-k+1})),$$

де функції $R_j(t,v_{j+1})$ $(j=\overline{0,n-1})$ прямують до нуля при $t\to+\infty$ рівномірно по $v_{j+1} \in \left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$.

З огляду на вигляд $W(t)$, (7), (19) та (27)

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{I_k(t)t}{I_{1k}(t)} = +\infty, \quad \lim_{t\to+\infty}\frac{W''(t)I_{1k}(t)}{W'(t)I_k(t)} = \frac{1}{\gamma_k}.$$

Тоді, з використанням зазначених вище зображень, система рівнянь (31) може бути переписана у вигляді

$$\begin{cases} v_l' = \frac{1}{t}\left[-(n-l-k+1)v_l + (n-l-k+1)v_{l+1}\right] \quad (l=\overline{1,n-k-1}),\\ v_{n-k}' = \frac{1}{t}\left[-v_{n-k} + \frac{\mu_{n-1}\gamma_k^{k-2}}{c}W(t)\,(1+v_{n-k+1})\right],\\ v_{n-k+1}' = \frac{W'(t)}{W(t)}\left[-v_{n-k+1}+v_{n-k+2}\right],\\ v_l' = \frac{I_k(t)}{\gamma_k I_{1k}(t)}\left[-v_l+v_{l+1}+V_{l,1}(t,v_1,\dots,v_n)\right] \quad (l=\overline{n-k+2,n-1}),\\ v_n' = \frac{I_k(t)}{\gamma_k I_{1k}(t)}\left[\sum\limits_{\substack{j=1\\ j\neq n-k+1}}^{n-1}\sigma_{j-1}v_j + (\sigma_{n-1}-1)v_n + \sum\limits_{i=1}^{2}V_{n,i}(t,v_1,\dots,v_n)\right], \end{cases} \tag{32}$$

де

$$V_{l,1}(t,v_1,\dots,v_n) = \left(1 - \tfrac{\gamma_k W''(t)I_{1k}(t)}{W'(t)I_k(t)} - \gamma_k(n-l-k+2)(1-h(t))\right)(1+v_l)$$
$$(l=\overline{n-k+2,n-1}),$$
$$V_{n,1}(t,v_1,\dots,v_n) = \left(\prod_{j=0}^{n-1}(1+R_j(t,v_{j+1}))-1\right)\prod_{\substack{j=1\\ j\neq n-k+1}}^{n}(1+v_j)^{\sigma_{j-1}}+$$
$$+\left(\gamma_k(-2+k)(1-h(t)) - \tfrac{\gamma_k W''(t)I_{1k}(t)}{W'(t)I_k(t)}+1\right)\left[1+v_n\right],$$
$$V_{n,2}(t,v_1,\dots,v_n) = \prod_{\substack{j=1\\ j\neq n-k+1}}^{n}(1+v_j)^{\sigma_{j-1}} - \prod_{\substack{j=1\\ j\neq n-k+1}}^{n}v_j\sigma_{j-1} - 1.$$

При цьому зауважимо, що

$$\lim_{t\to+\infty}V_{j,1}(t,v_1,\dots,v_n) = 0\ (j=\overline{n-k+2,n})$$

рівномірно по $(v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n_{\frac{1}{2}}$,

$$\lim_{|v_1|+\ldots+|v_n| \to 0} \tfrac{V_{n,2}(t,v_1,\ldots,v_n)}{|v_1|+\ldots+|v_n|} = 0$$

рівномірно по $t \in [t_{0k}, +\infty[$.

Розглянемо граничну матрицю P коефіцієнтів при $v_{n-k+2}, \ldots, v_n$, що стоять у квадратних дужках останніх $k-1$ рівнянь системи (32). Згідно з умовою теореми характеристичне рівняння даної матриці, яке набуває вигляду (29), не має коренів з нульовою дійсною частиною. Тоді (див. [15]) існує невироджена обмежена разом з оберненою на $[t_{0k}, +\infty[$ дійсна матриця $S(t) = \{s_{ij}(t)\}^n_{i,j=n-k+2}$ така, що система (32) за допомогою перетворення

$$v(t) = T(t)z(t), \tag{33}$$

де

$$T(t) = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & S(t) \end{pmatrix},$$

I — одинична матриця розмірності $n-k+1 \ \times \ n-k+1$, зводиться до системи диференціальних рівнянь вигляду

$$\begin{cases} z'_l = \frac{n-l-k+1}{t}[-z_l + z_{l+1}] \quad (l = \overline{1, n-k-1}), \\ z'_{n-k} = \frac{1}{t}\left[-z_{n-k} + \frac{\mu_{n-1}\gamma_k^{k-2}}{c} W(t)\,(1 + z_{n-k+1})\right], \\ z'_{n-k+1} = \frac{W'(t)}{W(t)}[-z_{n-k+1} + \sum\limits_{j=n-k+2}^{n} s_{n-k+2\,j}(t) z_j], \\ z'_l = \frac{I_k(t)}{\gamma_k I_{1k}(t)}\left[\sum\limits_{j=1}^{n-k} u_{lj} z_j + p_{ll} z_l + p_{ll+1} z_{l+1} + \sum\limits_{i=1}^{2} Z_{l,i}(t, z_1, \ldots, z_n)\right] \\ (l = \overline{n-k+2, n-1}), \\ z'_n = \frac{I_k(t)}{\gamma_k I_{1k}(t)}\left[\sum\limits_{j=1}^{n-k} u_{nj}(t) z_j + p_{nn} z_n + \sum\limits_{i=1}^{2} Z_{n,i}(t, z_1, \ldots, z_n)\right], \end{cases} \tag{34}$$

в якій $u_{lj}(t)$ $(l = \overline{n-k+2, n},\ j = \overline{1, n-k+1})$ — обмежені функції на $[t_{0k}, +\infty[$, $p_{ll} \neq 0$ $(l = \overline{n-k+2, n})$ — дійсні частини власних значень (з урахування кратних) матриці P, $p_{ll+1} \in \{0, 1\}$ $(l = \overline{n-k+2, n-1})$, $Z_{l,i}(t, z_1, \ldots, z_n)$ $(i = 1, 2)$ такі, що

$$\lim_{t \to +\infty} Z_{l,1}(t, z_1, \ldots, z_n) = 0 \quad (l = \overline{n-k+2, n})$$

рівномірно по $(z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{R}^n_l = \{(z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{R}^n : |z_j| \leq \eta,\ j = \overline{1, n}\}$, η — деяке достатньо мале число, яке залежить від матриці $S(t)$,

$$\lim_{|z_1|+\ldots+|z_n| \to 0} \tfrac{\partial Z_{l,2}(t,z_1,\ldots,z_n)}{\partial z_m} = 0 \quad (m = \overline{1, n},\ l = \overline{n-k+2, n})$$

рівномірно по $t \in [t_{0k}, +\infty[$.

Поклавши тепер в системі (34)

$$z_j = \delta x_j \quad (j = \overline{1, n-k}), \quad z_j = x_j \quad (j = \overline{n-k+1, n}), \tag{35}$$

де $\delta > 0$ — деяка додатня стала, отримаємо систему диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} x_l' = \frac{n-l-k+1}{t}\,[-x_l + x_{l+1}] \quad (l = \overline{1, n-k-1}), \\ x_{n-k}' = \frac{1}{t}\left[-x_{n-k} + \frac{\mu_{n-1}\gamma_k^{k-2}}{\delta c} W(t)\,(1 + x_{n-k+1})\right], \\ x_{n-k+1}' = \frac{W'(t)}{W(t)}\,[-x_{n-k+1} + \sum\limits_{j=n-k+2}^{n} s_{n-k+2\,j}(t) x_j], \\ x_l' = \frac{I_k(t)}{\gamma_k I_{1k}(t)}\left[\delta \sum\limits_{j=1}^{n-k} u_{lj}(t) x_j + p_{ll} x_l + p_{ll+1} x_{l+1} + \sum\limits_{i=1}^{2} X_{l,i}(t, x_1, \ldots, x_n)\right] \\ (l = \overline{n-k+2, n-1}), \\ x_n' = \frac{I_k(t)}{\gamma_k I_{1k}(t)}\left[\delta \sum\limits_{j=1}^{n-k} u_{nj}(t) x_j + p_{nn} x_n + \sum\limits_{i=1}^{2} X_{n,i}(t, x_1, \ldots, x_n)\right], \end{cases} \tag{36}$$

в якій $X_{l,i}(t, x_1, \ldots, x_n) = Z_{l,i}(t, \frac{1}{\delta} z_1, \ldots, \frac{1}{\delta} z_{n-k}, z_{n-k+1}, \ldots, z_n)$ $(i = 1, 2,\ l = \overline{n-k+2, n})$ та мають ті ж властивості, що й $Z_{l,i}(t, z_1, \ldots, z_n)$.

Оскільки $u_{lj}(t)$ $(l = \overline{n-k+2, n},\ j = \overline{1, n-k+1})$ та $s_{n-k+2\,j}(t)$ $(j = \overline{n-k+2, n})$ обмежені на $[t_{0k}, +\infty[$, $W(t) \to 0$ при $t \to +\infty$, то число δ можна вибрати таким чином, щоб для системи (36) були виконані всі умови теореми 2.1 з роботи [16]. Тоді, зважаючи на цю теорему, в неї існує принаймні один розв'язок $(x_j)_{j=1}^{n} : [t_{1k}, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}^n_{\frac{1}{2}}$ $(t_{1k} \in [t_{0k}, +\infty[)$, що прямує до нуля при $t \to +\infty$. Кожному такому розв'язку з оглядом на перетворення (30), (33), (35) відповідає $\mathcal{P}^k_{+\infty}(1)$–розв'язок рівняння (3), який допускає при $t \to +\infty$ асимптотичні зображення (11), (20) та (21).

Більш того, згідно з зазначеною теоремою, якщо серед коренів алгебраїчного рівняння (29) є m коренів (з урахуванням кратних) з додатніми дійсними частинами, то, так як $\frac{W'(t)}{W(t)} < 0$ в деякому околі $+\infty$, існує $(n-k+m)$–параметричне сімейство розв'язків зі знайденими зображеннями. Теорема доведена.

Список використаної літератури

1. *Евтухов В. М.* Асимптотические представления монотонных решений нелинейного дифференциального уравнения типа Эмдена – Фаулера n-го порядка. // Докл. АН России. – 1992. – **324**, №2. – С. 258–260.
2. *Евтухов В. М.* Асимптотические представления решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений. // Дис. докт. физ.-мат. наук: 01.01.02 – Киев, 1998. – 295 с.
3. *Евтухов В. М., Самойленко А. М.* Асимптотическое представление решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений с правильно меняющимися нелинейностями. // Дифференц. уравнения – 2011. – **47**, №5. – С. 628–650.
4. *Евтухов В. М., Клопот А. М.* Асимптотика некоторых классов решений обыкновенных дифференциальных уравнений n-го порядка с правильно меняющимися нелинейностями. // Укр. мат. журн. – 2013. – **65**, №3. – С. 354–380.
5. *Евтухов В. М., Клопот А. М.* Асимптотическое поведение решений обыкновенных дифференциальных уравнений n-го порядка с правильно меняющимися нелинейностями. // Дифференц. уравнения. – 2014. – **50**, №5. – С. 584–600.
6. *Evtukhov V. M., Klopot A. M.* Behavior of Solutions of Ordinary Differential Equations of n-th Order with Regularly Varying Nonlinearities. // Mem. Differential Equations Math. Phys. – 2014. – V.61. – P. 37–61.
7. *Клопот А. М.* Об асимптотике решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений n–го порядка. // Нелинейные колебания. – 2012. – **15**, №4. – С. 447–465.

8. *Клопот А. М.* Асимптотическое поведение решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений n-го порядка с правильно меняющимися нелинейностями. // Вісник Од. нац. ун-ту. Мат. і мех. – 2013. – **18**, №3(19). – С. 16–34.
9. *Кигурадзе И. Т., Чантурия Т. А.* Асимптотические свойства решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1990. – 430 с.
10. *Евтухов В. М., Корепанова Е. С.* Асимптотические представления решений дифференциальных уравнений с правильно меняющимися нелинейностями. // Укр. мат. журн. – 2017. – **69**, №9. – С. 1198–1216.
11. *Корепанова К. С.* Умови існування розв'язків степеневого виду у диференціальних рівнянь з правильно змінними нелінійностями. // Буков. мат. журн. – 2016. – **4**, №3–4. – С. 75–79.
12. *Evtukhov V. M., Korepanova K. S.* Asymptotic Behaviour of Solutions of One Class of n-th Order Differential Equations. // Mem. Differential Equations Math. Phys. – 2017. – V.71. – P. 111–124.
13. *Сенета Е.* Правильно меняющиеся функции. – М.: Наука, 1985. – 144 с.
14. *Бурбаки Н.* Функции действительного переменного. – М.: Наука, 1965. – 424 с.
15. *Евтухов В. М.* Об исчезающих на бесконечности решениях вещественных неавтономных систем квазилинейных дифференциальных уравнений. // Дифференц. уравнения. – 2003. – **39**, №4. – С. 1–12.
16. *Евтухов В. М., Самойленко А. М.* Условия существования исчезающих в особой точке решений у вещественных неавтономных систем квазилинейных дифференциальных уравнений. // Укр. мат. журн. – 2010. – **62**, №1. – С. 52–80.

Одержано 18.09.2017