

УДК 517.9, 519.6

I. I. Король, I. Ю. Король (ДВНЗ «Ужгородський нац. ун-т»)

ПОБУДОВА ЛІНІЙНИХ БАГАТОКРОКОВИХ МЕТОДІВ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ КОШІ МЕТОДОМ НЕВИЗНАЧЕНИХ КОЕФІЦІЄНТІВ

The present paper proposes a scheme for constructing a wide range of linear multi-step methods for solving the Cauchy problem for ordinary differential equations using the method of undetermined coefficients. The implementation of the predictor-corrector method with arbitrary accuracy is shown.

У роботі запропоновано спосіб побудови широкого спектру лінійних багатокрокових методів розв'язання задачі Коші для звичайних диференціальних рівнянь з використанням методу невизначених коефіцієнтів. Показано реалізацію схеми предиктор-коректор з довільною наперед заданою точністю.

Для побудови лінійних багатокрокових методів розв'язання задачі Коші для звичайних диференціальних рівнянь нами запропоновано єдиний підхід, суть якого полягає в наступному. Розглядається задача Коші для звичайного диференціального рівняння першого порядку

$$y' = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0. \quad (1)$$

Як відомо, лінійні багатокрокові методи для розв'язанні задачі (1) будують на основі формули

$$y_{n+1} = \sum_{j=0}^p a_j y_{n-j} + h \sum_{i=s}^q b_i f(t_{n-i}, y_{n-i}), \quad (2)$$

де a_j , $j = \overline{0, p}$, b_i , $i = \overline{s, q}$ – невідомі коефіцієнти. Якщо $s = 0$, то метод (1) називається явним, а якщо $s = -1$ і $b_{-1} \neq 0$ – неявним.

В літературі [1–3], для знаходження коефіцієнтів a_j і b_i задачу (1) замінюють еквівалентним інтегральним співвідношенням

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, y(t)) dt,$$

після чого підінтегральну функцію замінюють інтерполаційним поліномом Лагранжа або Ньютона. Далі, на підставі певних міркувань одержуються відомі в літературі багатоточкові методи.

Ми пропонуємо побудувати таку систему лінійних алгебраїчних рівнянь, з якої кожен з відомих на сьогодні лінійних багатоточкових методів (як явного, так і неявного типу) можна одержати як частковий випадок.

Ідея запропонованого підходу полягає в наступному: якщо задача Коші (1) має точний розв'язок у вигляді полінома степені k :

$$y(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \dots + \alpha_k t^k,$$

де $\alpha_i, i = \overline{0, k}$ – константи, то цей розв’язок можна знайти точно за формулою

$$y_{n+1} = \sum_{j=j_1}^{j_2} a_j y_{n-j} + h b_{-1} y'_{n+1} + h \sum_{i=0}^q b_i y'_{n-i}, \quad (3)$$

де a_j і b_i ($0 \leq j_1 \leq j \leq j_2, -1 \leq i \leq q$) – невідомі коефіцієнти, а $y'_k = f(t_k, y_k)$ – значення похідної шуканої функції.

Невідомі коефіцієнти $a_j, b_i, j = \overline{j_1, j_2}, i = \overline{1, q}$ будемо шукати з умови, що формула (3) є точною для всіх поліноміальних розв’язків, степінь яких не перевищує k . За такі поліноми візьмемо поліноми вигляду:

$$y(t) = \frac{1}{h^0} (t_{n+1} - t)^0 = 1, \text{ якщо } m=0; \quad y(t) = \frac{1}{h^m} (t_{n+1} - t)^m, \text{ якщо } m=1, 2, \dots, k; \quad (4)$$

$$y'(t) = 0, \text{ якщо } m=0; \quad y'(t) = -\frac{m}{h^m} (t_{n+1} - t)^{m-1}, \quad \text{якщо } m=1, 2, \dots, k. \quad (5)$$

Для побудови шуканої системи формулу (3) перепишемо у вигляді

$$\sum_{j=j_1}^{j_2} a_j y_{n-j} + h b y'_{n+1} + h \sum_{i=0}^q b_i y'_{n-i} = y_{n+1}, \quad (6)$$

звідки з (4), (5) при $m = 0, 1, 2, \dots, k$ одержуються рядки $(k+1) \times (k+1)$ -вимірної матриці системи.

Відмітимо, що формула (6) має чотири складові: перша – сума, коефіцієнтом a_j , якої у побудованій системі лінійних алгебраїчних рівнянь будуть відповідати перші $j_2 + 1 - j_1$ стовпців матриці A (один стовпець якщо $j_1 = j_2, 0 \leq j_1 \leq j_2$); друга складова – доданок з коефіцієнтом b , якому буде відповідати наступний стовпець матриці. Третью складовою є сума, якій відповідають наступні q стовпців матриці B . Четвертою складовою є права частина, якій у системі рівнянь буде відповідати вектор d . Виходячи з цього, систему (6) запишемо у матрично-векторному вигляді

$$Cx = d, \quad (7)$$

де матриця C формується приєднанням до матриці A справа стовпця b і матриці B . Кількість стовпців у матрицях A, B і наявність або відсутність стовпця b залежать від числового методу та його порядку точності. Так, для явних методів стовпець b відсутній, а якщо $q = 0$, то відсутня матриця B . При цьому C є квадратною $(k+1)$ -вимірною матрицею, де k – порядок точності методу, який обчислюється за формулою

$$k = \begin{cases} j_2 - j_1 + q, & \text{if } s = 0, \\ j_2 - j_1 + q + 1, & \text{if } s = 1. \end{cases} \quad (8)$$

Використовуючи поліноми (4) побудуємо складові системи лінійних алгебраїчних рівнянь (6) таким чином: стовпець, який відповідає коефіцієнту a_j – це

значення поліномів $y_m(t)$ у вузлі t_{n-j} :

$$\begin{aligned} y_0(t_{n-j}) &= \frac{1}{h^0}(t_{n+1} - (t_n - jh))^0 = 1, \quad \text{якщо } m=0; \\ y_m(t_{n-j}) &= \frac{1}{h^m}(t_{n+1} - (t_n - jh))^m = (j+1)^m, \quad \text{якщо } m=\overline{1,k}. \end{aligned} \quad (9)$$

Аналогічно обчислюється матриця B : елементи стовпця, який відповідає коефіцієнту b_i рівні значенням похідних $y'_m(t)$ поліномів (5) у вузлі t_{n-i} :

$$\begin{aligned} y'_0(t_{n-i}) &= 0, \quad \text{якщо } m=0; \\ y'_m(t_{n-i}) &= -\frac{m}{h^m}(t_{n+1} - (t_n - ih))^{m-1} = -\frac{m}{h}(i+1)^{m-1}, \quad \text{якщо } m=\overline{1,k}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Am(j1, j2, k) &:= \begin{cases} \text{for } i \in 0..k \\ \quad \text{for } j \in j1..j2 \\ \quad A_{i,j-1} \leftarrow (j+1)^i \\ \quad A \end{cases} & Bv(k) &:= \begin{cases} \text{for } i \in 0..k \\ \quad b_i \leftarrow -1 \text{ if } i=1 \\ \quad b_i \leftarrow 0 \text{ otherwise} \\ \quad b \end{cases} \\ Bm(m, k) &:= \begin{cases} \text{for } i \in 0..k-1 \\ \quad \text{for } j \in 1..m \\ \quad B_{i+1,j-1} \leftarrow 0 \text{ if } i=0 \\ \quad B_{i+1,j-1} \leftarrow -(i+1)^j \\ \quad B \end{cases} & Dv(k) &:= \begin{cases} \text{for } i \in 0..k \\ \quad d_0 \leftarrow 1 \text{ if } i=0 \\ \quad d_i \leftarrow 0 \text{ otherwise} \\ \quad d \end{cases} \end{aligned}$$

Рис. 1. Тексти програм $Am(j1, j2, k)$, $Bv(k)$, $Bm(m, k)$, $Dv(k)$

Елементи вектора b визначаються значеннями похідної y'_{n+1} , а коефіцієнти вектора d – значеннями функції y_{n+1} і обчислюються за формулами:

$$y'_{n+1} = y'_m(t_{n+1}) = \begin{cases} -1, & \text{якщо } m=1, \\ 0, & \text{якщо } m \neq 1; \end{cases} \quad y_{n+1} = y_m(t_{n+1}) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } m=0, \\ 0, & \text{якщо } m \neq 0. \end{cases} \quad (10)$$

Обчислення матриць A і B , стовпців b і d здійснюється за допомогою програм $Am(j1, j2, k)$, $Bm(m, k)$, $Bv(k)$ і $Dv(k)$, реалізованих в пакеті Mathcad, які наведено на рис. 1. На їх основі складена програма $JNBM(j1, j2, s, q)$ (рис. 2), яка дає можливість одержати число k – порядок точності методу, матриці A і B , стовпці b і d , компонує матрицю C та знаходить x – розв’язок системи (7). Коефіцієнти вектора x є шуканими коефіцієнтами формул різних лінійних багатокрокових методів як явного, так і неявного типів.

Нижче наведено приклади того, як відомі лінійні багатокрокові методи явного та неявного типів розв’язання задачі Коші одержуються за допомогою розробленого нами методу.

```

JNBM(j1,j2,s,q) := | k ← j2 - j1 + q if s = 0
                      | k ← j2 - j1 + q + s if s = 1
                      | k ← j2 - j1 + 1 if s = 2
                      | k ← j2 - j1 if s = 3
                      | A ← Am(j1,j2,k)
                      | b ← Bv(k)
                      | B ← Bm(q,k)
                      | C ← augment (A ,B) if s = 0
                      | C ← augment (A ,b,B) if s = 1
                      | C ← augment (A ,b) if s = 2
                      | C ← A otherwise
                      | d ← Dv(k)
                      | x← C-1.d
                      | (k A b B C d x)

```

Рис. 2. Текст програми $JNBM(j1, J2, s, q)$

1. Явний метод Адамса-Башфорта 5-го порядку одержується за допомогою звертання:

$$j1:=0 \quad j2:=0 \quad s=0 \quad q:=5 \quad (k \ A \ b \ B \ C \ d \ x):=JNBM(j1, j2, s, q) \quad k=5.$$

При цьому відповідні матриці та вектори мають такий вигляд:

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -2 & -4 & -6 & -8 & -10 \\ -3 & -12 & -27 & -48 & -75 \\ -4 & -32 & -108 & -256 & -500 \\ -5 & -80 & -405 & -1280 & -3125 \end{pmatrix}.$$

Як і в кожному явному методі, матриця C складається тільки з матриць A і B , і не містить стовпця b :

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -4 & -6 & -8 & -10 \\ 1 & -3 & -12 & -27 & -48 & -75 \\ 1 & -4 & -32 & -108 & -256 & -500 \\ 1 & -5 & -80 & -405 & -1280 & -3125 \end{pmatrix}, \quad d = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Розв'язком системи (7), де C , d мають вигляд (11) є

$$x^T = \left(1 \frac{1901}{720} - \frac{1387}{360} \frac{109}{30} - \frac{637}{360} \frac{251}{720} \right).$$

Елементи цього вектора є коефіцієнтами явного методу Адамса-Башфорта:

$$y_{n+1} = y_n + h \left(\frac{1901}{720} f_n - \frac{1387}{360} f_{n-1} + \frac{109}{30} f_{n-2} - \frac{637}{360} f_{n-3} + \frac{251}{720} f_{n-4} \right).$$

2. Неявний метод Адамса-Мултона 6-го порядку одержується за допомогою звертання:

$$j1:=0 \quad j2:=0 \quad s=1 \quad q:=5 \quad (k \ A \ b \ B \ C \ d \ x):=JNBM(j1, j2, s, q) \quad k=6.$$

При таких значеннях вхідних параметрів з програми $JNBM(j1, j2, s, q)$ отримуємо такі матриці та коефіцієнти:

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -2 & -4 & -6 & -8 & -10 \\ -3 & -12 & -27 & -48 & -75 \\ -4 & -32 & -108 & -256 & -500 \\ -5 & -80 & -405 & -1280 & -3125 \\ -6 & -192 & -1458 & -6144 & -18750 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & -4 & -6 & -8 & -10 \\ 1 & 0 & -3 & -12 & -27 & -48 & -75 \\ 1 & 0 & -4 & -32 & -108 & -256 & -500 \\ 1 & 0 & -5 & -80 & -405 & -1280 & -3125 \\ 1 & 0 & -6 & -192 & -1458 & -6144 & -18750 \end{pmatrix}, \quad d = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$x^T = \left(1 \frac{95}{288} \frac{1427}{1440} - \frac{133}{240} \frac{241}{720} - \frac{173}{1440} \frac{3}{160} \right),$$

$$y_{n+1} = y_n + h \left(\frac{95}{288} f_{n+1} + \frac{1427}{1440} f_n - \frac{133}{240} f_{n-1} + \frac{241}{720} f_{n-2} - \frac{173}{1440} f_{n-3} + \frac{3}{160} f_{n-4} \right).$$

Аналогічно за допомогою вибору параметрів $j1, j2, s$ і q у програмі $JNBM(j1, j2, s, q)$ можна отримати формули інших відомих лінійних багатокрокових методів як явного, так і неявного типів будь-якого порядку точності.

3. Явний метод Мілна 5-го порядку точності:

$$j1:=5 \quad j2:=5 \quad s=0 \quad q:=5 \quad (k \ A \ b \ B \ C \ d \ x):=JNBM(j1, j2, s, q) \quad k=5,$$

$$x^T = \left(1 \frac{33}{10} - \frac{21}{5} \frac{39}{5} - \frac{21}{5} \frac{33}{10} \right),$$

$$y_{n+1} = y_n + h \left(\frac{33}{10} f_n - \frac{21}{5} f_{n-1} + \frac{39}{5} f_{n-2} - \frac{21}{5} f_{n-3} + \frac{33}{10} f_{n-4} \right).$$

4. Неявний метод Мілна 6-го порядку точності:

$$j1:=4 \quad j2:=4 \quad s=1 \quad q:=5 \quad (k \ A \ b \ B \ C \ d \ x):=JNBM(j1, j2, s, q) \quad k=6,$$

$$x^T = \left(1 \frac{95}{288} \frac{125}{96} \frac{125}{144} \frac{125}{144} \frac{125}{96} \frac{95}{288} \right),$$

$$y_{n+1} = y_n + h \left(\frac{95}{288} f_{n+1} + \frac{125}{96} f_n + \frac{125}{144} f_{n-1} + \frac{125}{144} f_{n-2} + \frac{125}{96} f_{n-3} + \frac{95}{288} f_{n-4} \right).$$

За допомогою запропонованого в даній роботі підходу можна отримати інші формули лінійних багатокрокових методів.

5. Новий явний багатокропковий метод

$$j1:=0 \quad j2:=2 \quad s=0 \quad q:=0 \quad (k \ A \ b \ B \ C \ d \ x):=JNBM(j1, j2, s, q) \quad k=2,$$

$$x^T = (3 \ -3 \ 1), \quad y_{n+1} = 3y_n - 3y_{n-1} + y_{n-2}.$$

$$j1:=0 \quad j2:=3 \quad s=0 \quad q:=0 \quad (k \ A \ b \ B \ C \ d \ x):=JNBM(j1, j2, s, q) \quad k=3,$$

$$x^T = (4 \ -6 \ 4 \ -1),$$

$$y_{n+1} = 4y_n - 6y_{n-1} + 4y_{n-2} - y_{n-3}.$$

$$j1:=0 \quad j2:=4 \quad s=0 \quad q:=0 \quad (k \ A \ b \ B \ C \ d \ x):=JNBM(j1, j2, s, q) \quad k=4,$$

$$x^T = (5 \ -10 \ 10 \ -5 \ 1),$$

$$y_{n+1} = 5y_n - 10y_{n-1} + 10y_{n-2} - 5y_{n-3} + y_{n-4}.$$

$$j1:=0 \quad j2:=5 \quad s=0 \quad q:=0 \quad (k \ A \ b \ B \ C \ d \ x):=JNBM(j1, j2, s, q) \quad k=5,$$

$$x^T = (6 \ -15 \ 20 \ -15 \ 6 \ -1),$$

$$y_{n+1} = 6y_n - 15y_{n-1} + 20y_{n-2} - 15y_{n-3} + 6y_{n-4} - y_{n-5}.$$

$$j1:=0 \quad j2:=6 \quad s=0 \quad q:=0 \quad (k \ A \ b \ B \ C \ d \ x):=JNBM(j1, j2, s, q) \quad k=6,$$

$$x^T = (7 \ -21 \ 35 \ -35 \ 21 \ -7 \ 1,)$$

$$y_{n+1} = 7y_n - 21y_{n-1} + 35y_{n-2} - 35y_{n-3} + 21y_{n-4} - 7y_{n-5} + y_{n-6}.$$

6. Новий неявний багатокропковий метод

$$j1:=0 \quad j2:=1 \quad s=1 \quad q:=0 \quad (k \ A \ b \ B \ C \ d \ x):=JNBM(j1, j2, s, q) \quad k=2,$$

$$x^T = (\frac{4}{3} \ -\frac{1}{3} \ \frac{2}{3}).$$

$$y_{n+1} = \frac{4}{3}y_n - \frac{1}{3}y_{n-1} + h \cdot \frac{2}{3}f_{n+1}.$$

$$j1:=0 \quad j2:=2 \quad s=1 \quad q:=0 \quad (k \ A \ b \ B \ C \ d \ x):=JNBM(j1, j2, s, q) \quad k=3,$$

$$x^T = (\frac{18}{11} \ -\frac{9}{11} \ \frac{2}{11} \ \frac{6}{11}),$$

$$y_{n+1} = \frac{18}{11}y_n - \frac{9}{11}y_{n-1} + \frac{2}{11}y_{n-2} + h \frac{6}{11}f_{n+1}.$$

$$j1:=0 \quad j2:=3 \quad s=1 \quad q:=0 \quad (k \ A \ b \ B \ C \ d \ x):=JNBM(j1, j2, s, q) \quad k=4,$$

$$x^T = (\frac{48}{25} \ -\frac{36}{25} \ \frac{16}{25} \ -\frac{3}{25} \ \frac{12}{25}),$$

$$y_{n+1} = \frac{48}{25}y_n - \frac{36}{25}y_{n-1} + \frac{16}{25}y_{n-2} - \frac{3}{25}y_{n-3} + h \frac{12}{25}f_{n+1}.$$

$$j1:=0 \quad j2:=4 \quad s=1 \quad q:=0 \quad (k \ A \ b \ B \ C \ d \ x):=JNBM(j1, j2, s, q) \quad k=5,$$

$$x^T = \left(\frac{300}{137} - \frac{300}{137} \frac{200}{137} - \frac{75}{137} \frac{12}{137} \frac{60}{137} \right),$$

$$y_{n+1} = \frac{300}{137}y_n - \frac{300}{137}y_{n-1} + \frac{200}{137}y_{n-2} - \frac{75}{137}y_{n-3} + \frac{12}{137}y_{n-4} + h \frac{60}{137}f_{n+1}.$$

$$j1:=0 \quad j2:=5 \quad s=1 \quad q:=0 \quad (k \ A \ b \ B \ C \ d \ x):=JNBM(j1, j2, s, q) \quad k=6,$$

$$x^T = \left(\frac{120}{49} - \frac{150}{49} \frac{400}{49} - \frac{75}{49} \frac{24}{49} - \frac{10}{147} \frac{20}{49} \right),$$

$$y_{n+1} = \frac{120}{49}y_n - \frac{150}{49}y_{n-1} + \frac{400}{49}y_{n-2} - \frac{75}{49}y_{n-3} + \frac{24}{49}y_{n-4} - \frac{10}{147}y_{n-5} + h \frac{29}{49}f_{n+1}.$$

```
R_K_4(t0,y0,h,f,m) := | y0 ← y0
                           |
                           for k ∈ 0..m
                           | t_k ← t0 + k · h
                           | K1 ← h · f(t_k, y_k) K2 ← h · f(t_k + h/2, y_k + K1/2)
                           | K3 ← h · f(t_k + h/2, y_k + K2/2) K4 ← h · f(t_k + h, y_k + K3)
                           | y_{k+1} ← y_k + 1/6 · (K1 + 2K2 + 2K3 + K4)
                           |
                           | (t y)
```

Рис. 3. Текст програми $R_K_4(t0, y0, h, f, m)$

Приклад. На основі отриманих формул методів 5 і 6 побудуємо метод прогнозу і корекції (предиктор-коректор). Для ілюстрації розглянемо задачу Коші

$$y' = -y + \sin(ty), \quad y(0) = 1, 5. \quad (12)$$

На рис. 3 наведено програму $R_K_4(t0, y0, h, f, m)$ реалізації методу Рунгे-Кутти для одержання значень розв'язку в m початкових точках (m – порядок точності).

У результаті її роботи отримаємо точки розбиття – вектор t і значення розв'язку yp в цих точках:

$$t^\top = (0 \ 0.01 \ 0.02 \ 0.03 \ 0.04 \ 0.05 \ 0.06) \quad yp^\top = \left(\frac{3}{2} \ \frac{150}{101} \ \frac{25}{17} \ \frac{150}{103} \ \frac{75}{52} \ \frac{3603}{2522} \ \frac{242}{171} \right).$$

Після цього звертанням

$$j1:=0 \quad j2:=m \quad s=0 \quad q:=0 \quad (k \ A \ b \ B \ C \ d \ xj):=JNBM(j1, j2, s, q) \quad k=5$$

$$j1:=0 \quad j2:=m-1 \quad s=1 \quad q:=0 \quad (k \ A \ b \ B \ C \ d \ xn):=JNBM(j1, j2, s, q) \quad k=5,$$

за допомогою програми $R_K_KI(h, n, f, t, yp, xj, xn)$ з рис. 4 отримуємо розв'язок задачі Коші (12). Графік розв'язку наведено на рис. 5.

```

P_K_KI(h,n,f,t,yp) := | y ← yp
                         | for k ∈ m..n - 1
                         |   tk+1 ← tk + h
                         |   p ← ∑i=0m (xi · yk-i)
                         |   for s ∈ 1..10
                         |     yk+1 ← ∑i=0m-1 (xn-i · yk-i) + h · xn · f(tk+1, p)
                         |     yp ← yk+1
                         | (t y)

```

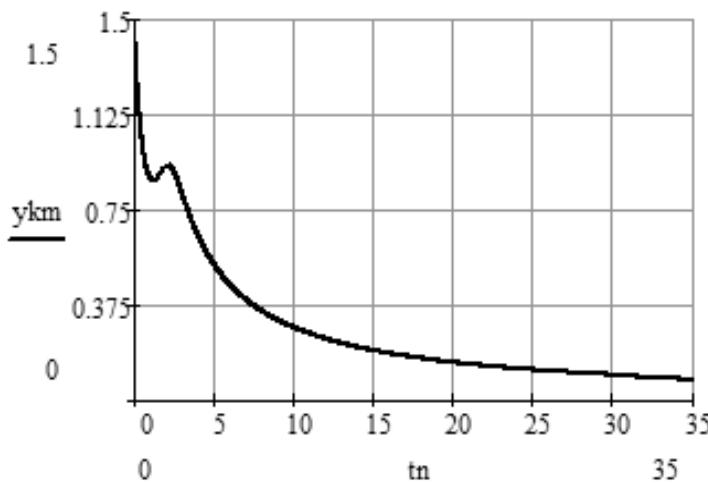
Рис. 4. Текст програми $R_K_KI(h, n, f, t, yp, xj, xn)$ 

Рис. 5. Графік розв'язку

Список використаної літератури

- Фельдман Д.В., Петренко А.І., Дмитрієва О.А. Чисельні методи в інформатиці. - К.: Видавнича група ВНВ, 2006. – 480 с.
- Арушанян О.Б., Залеткин С.Ф. Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений на Фортране. М.: Изд - во МГУ, 1990. – 336 с.
- Хайрер Э., Нёрстрем С., Ваннер Г. Решение обыкновенных диффе-ренциальных уравнений. Нежесткие задачи. Пер. с англ. - М.: Мир, 1990. – 512 с.
- Король І.Ю., Король І.І. Узагальнюючий підхід до побудови багатокрокових методів розв'язання задачі Коші // Наук. вісник Ужгородського університету, Сер. Математика і інформатика. - Ужгород: Видавництво УжНУ "Говерла" 2012. – Вип.23, № 1. – С. 61 – 68.
- Король І.Ю., Король І.І. Про єдиний підхід до побудови лінійних багатокрокових методів розв'язання задачі Коші // Наук. вісник Ужгородського університету, Сер. Математика і інформатика. - Ужгород: Видавництво УжНУ "Говерла" 2012. – Вип.23, № 2. – С. 86 – 94.

Одержано 25.10.2017