УДК 519.21

Н. С. Аюбова (Київський нац. ун-т ім. Т. Шевченка)

ОЦІНЮВАННЯ ПАРАМЕТРА ХЮРСТА ДРОБОВОГО БРОУНІВСЬКОГО РУХУ В МОДЕЛІ З ПОХИБКАМИ ВИМІРЮВАНЬ

Consistent estimation of the Hurst parameter of tne Fractional Brownian Motion by observations with errors is found.

Отримана консистентна оцінка параметра Хюрста дробового броунівського руху за спостереженнями з похибками.

1. Вступ. Випадковий гауссовий процес $\xi_H(t), t \in \mathbb{R}$ з нульовим середнім та коваріаційною функцією

$$B_H(s,t) = \frac{1}{2}(|t|^{2H} + |s|^{2H} - |t-s|^{2H}), t, s \in \mathbb{R}$$

називається випадковим процесом дробового броунівського руху з параметром Хюрста $H \in (0,1)$.

Задача статистичного оцінювання параметра Хюрста дробового броунівського руху виникла у сучасних моделях гідромеханіки, метеорології, актуарної та фінансової математики і досліджувалася багатьма авторами. У статтях [1]–[3] для оцінювання параметра Хюрста були застосовані бакстерівські суми. На відміну від інших методів, метод бакстерівських сум дозволяє отримувати неасимптотичні довірчі інтервали. Теореми Леві–Бакстера забезпечують консистентність відповідних оцінок. Монографія Пракаса Рао [4] містить підрозділ, в якому розглянуто оцінювання параметрів методом бакстерівських сум.

Останнім часом зріс інтерес до задач оцінювання невідомих параметрів у моделях з похибками у спостереженнях. Так, у монографії [5] досліджені моделі регресії з похибками вимірювання. Робота [6] присвячена оцінці параметра в моделі з похибками.

У цій статті отримана консистентна оцінка параметра Хюрста випадкового процесу дробового броунівського руху за спостереженнями з похибками.

2. Постановка задачі оцінювання. Нехай $0 < a < 1$, a — фіксоване. Випадковий процес $\xi_H(t), t \geq 0$ спостерігається у моменти часу $k \cdot a$, $k \geq 0$ похибками δ_k, $k \geq 0$. Далі припускаємо, що (δ_k) — послідовність незалежних однаково розподілених гауссових випадкових величин з нульовим математичним сподіванням та дисперсією σ^2. Послідовність випадкових величин (δ_k) незалежна від дробового броунівського руху $\xi_H(t), t \geq 0$.

За спостереженнями випадкових величин $\eta_{H,k} = \xi_H(ak) + \delta_k$, $k \geq 0$ потрібно побудувати оцінку параметра Хюрста H.

Покладемо $\xi_k = \xi_{k,H} = \eta_{k+1,H} - \eta_{k,H}$, $0 \leq k \leq n$.

3. Основний результат.

Лема 1. $(\xi_k, k \in \mathbb{Z})$ — *стаціонарна гауссова випадкова послідовність з нульовим математичним сподіванням.*

Доведення. Для $k, j \in \mathbb{Z}$ обчислимо

$$E\xi_k\xi_j = E(\eta_{k+1} - \eta_k)(\eta_{j+1} - \eta_j) =$$

$$= E(\xi_H(a(k+1)) + \delta_{k+1} - \xi_H(ak) - \delta_k)(\xi_H(a(j+1)) + \delta_{j+1} - \xi_H(aj) - \delta_j).$$

Маємо

$$E(\delta_{k+1} - \delta_k)(\delta_{j+1} - \delta_j) = \begin{cases} 0, & |k-j| \geq 2; \\ -\sigma^2, & |k-j| = 1; \\ 2\sigma^2, & k = j; \end{cases}$$

$$E(\xi_H(a(k+1)) - \xi_H(ak))(\xi_H(a(j+1)) - \xi_H(aj)) =$$

$$= \frac{1}{2}(|a(k+1)|^{2H} + |a(j+1)|^{2H} - |a(k-j)|^{2H} - |a(k+1)|^{2H} - |aj|^{2H} +$$

$$+ |a(k+1-j)|^{2H} - |ak|^{2H} - |a(j+1)|^{2H} + |a(k-1-j)|^{2H} + |ak|^{2H} + |aj|^{2H} -$$

$$- |a(k-j)|^{2H}) = \frac{1}{2}(|a(k-j+1)|^{2H} - 2|a(k-j)|^{2H} + |a(k-j-1)|^{2H}).$$

Таким чином

$$E\xi_k\xi_j = \frac{|a|^{2H}}{2}(|k-j+1|^{2H} - 2|k-j|^{2H} + |k-j-1|^{2H}) +$$

$$+ \begin{cases} 0, & |k-j| \geq 2; \\ -\sigma^2, & |k-j| = 1; \\ 2\sigma^2, & k = j. \end{cases} \tag{1}$$

Отже, $E\xi_k\xi_j$ залежить лише від $k - j$. Лема доведена.

З формули (1) при $k = j$ маємо

$$E\xi_{k,H}^2 = a^{2H} + 2\sigma^2, H \in (0,1).$$

Позначимо $\kappa(H) = E\xi_{k,H}^2 = a^{2H} + 2\sigma^2$, $H \in (0,1)$.

Функція $\kappa(H), H \in (0,1)$ неперервна і спадна на $(0,1)$ з множиною значень $(a^2 + 2\sigma^2, 1 + 2\sigma^2)$.

Функція

$$H = \frac{1}{2}\log_a(y - 2\sigma^2), y \in (a^2 + 2\sigma^2, 1 + 2\sigma^2)$$

— обернена до функції $\kappa(H)$.

Покладемо

$$\beta(y) = \begin{cases} 0, & y \geq 1 + 2\sigma^2; \\ \frac{1}{2}\log_a(y - 2\sigma^2), & y \in (2\sigma^2, 2\sigma^2 + a^2); \\ 1, & y \leq a^2 + 2\sigma^2; \end{cases}$$

$$S_n = S_{n,H} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \xi_{k,H}^2, n \geq 1.$$

Теорема 1. *Для довільного* $H \in (0,1)$

$$S_n = S_{n,H} \to \kappa(H)$$

за ймовірністю при $n \to \infty$.

Доведення. Доведемо, що для довільного $H \in (0,1)$ дисперсія $VarS_{n,H} \to \to 0$, при $n \to \infty$. Тоді $S_n - ES_n \to 0$ у середньому квадратичному при $n \to \infty$ а, отже, і за ймовірністю.

Внаслідок стаціонарності гауссової випадкової послідовності $(\xi_k, k \in \mathbb{Z})$,

$$ES_n = ES_{n,H} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} E(\xi_{k,H}^2) = \kappa(H).$$

Знайдемо дисперсію випадкової величини $S_{n,H}$:

$$VarS_{n,H} = E(S_{n,H} - ES_{n,H})^2 = \frac{1}{n^2}\sum_{k,j=1}^{n}(E(\xi_{k,H}^2\xi_{j,H}^2) - E\eta_{k,H}^2 E\eta_{j,H}^2)).$$

Для математичного сподівання добутку випадкових величин $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$, що мають сумісний гауссовий розподіл з нульовим середнім значенням, має місце формула Іссерліса [7]:

$$E(\eta_1\eta_2\eta_3\eta_4) = E\eta_1\eta_2 E\eta_3\eta_4 + E\eta_1\eta_3 E\eta_2\eta_4 + E\eta_1\eta_4 E\eta_2\eta_3.$$

У цій формулі покладемо $\eta_1 = \eta_2 = \xi_{k,H}$,$\eta_3 = \eta_4 = \xi_{j,H}$ і отримаємо:

$$VarS_{n,H} = \frac{2}{n^2}\sum_{k,j=1}^{n}(E(\xi_{k,H}\xi_{j,H}))^2 = \frac{2}{n^2}n\kappa^2(H) + \frac{4}{n^2}\sum_{k,j=1,k<j}^{n} E(\xi_{k,H}\xi_{j,H})^2 =$$

$$= \frac{2\kappa^2(H)}{n} + \frac{4}{n^2}\sum_{l=1}^{n-1}(n-l)(E\xi_{0,H}\xi_{l,H})^2,$$

де $l = j - k$.

Маємо

$$E\xi_{0,H}\xi_{l,H} = E(\xi_H(a) + \delta_1 - \delta_0)(\xi_H((l+1)a) + \delta_{l+1} - \xi_H(l)a) - \delta_l).$$

При $l = 1$ одержимо

$$E\xi_{0,H}\xi_{1,H} = E(\xi_H(a) + \delta_1 - \delta_0)(\xi_H(2a) - \xi_H(a) + \delta_2 - \delta_1) =$$

$$= E\xi_H(a)(\xi_H(2a) - \xi_H(a)) + E(\delta_1 - \delta_0)(\delta_2 - \delta_1) =$$

$$= \frac{1}{2}(a^{2H} + (2a)^{2H} - a^{2H} - a^{2H}) - \sigma^2 = \frac{a^{2H}}{2}(2^{2H} - 1) - \sigma^2.$$

При $l > 1$

$$E\xi_{0,H}\xi_{l,H} = E(\xi_H(a) + \delta_1 - \delta_0)(\xi_H((l+1)a) + \delta_{l+1} - \xi_H(la) + \delta_l).$$

Оскільки $E(\delta_1-\delta_0)(\delta_{l+1}-\delta_l)=0$ при $l>1$, то

$$E\xi_{0,H}\xi_{l,H}=E\xi_H(a)(\xi_H((l+1)a)-\xi_H(la))=$$

$$=\frac{a^{2H}}{2}(1+(l+1)^{2H}-l^{2H}-1-l^{2H}+(l-1)^{2H})=$$

$$\frac{a^{2H}}{2}((l+1)^{2H}-2l^{2H}+(l-1)^{2H}).$$

Таким чином,

$$VarS_{n,H}=\frac{2k^2(H)}{n}+\frac{4}{n^2}\Big((n-1)\left(\frac{a^{2H}}{2}(2^{2H}-1)-\sigma^2\right)^2+$$

$$+\sum_{l=2}^{n}\left(\frac{a^{2H}}{2}\right)^2(n-l)((l-1)^{2H}-2l^{2H}+(l+1)^{2H})^2\Big).$$

Позначимо

$$A_n=\frac{2k^2(H)}{n}+\frac{4}{n^2}\left((n-1)\left(\frac{a^{2H}}{2}(2^{2H}-1)-\sigma^2\right)^2\right)$$

і оцінимо цей вираз:

$$A_n\le\frac{2k^2(H)}{n}+\frac{4}{n}\left(\frac{a^{2H}}{2}(2^{2H}-1)-\sigma^2\right)^2.$$

Очевидно, для довільного $H\in(0,1)$ $A_n\to 0, n\to\infty$.
Позначимо

$$B_n=\frac{4}{n^2}\left(\sum_{l=2}^{n-1}\left(\frac{a^{2H}}{2}\right)^2(n-l)((l-1)^{2H}-2l^{2H}+(l+1)^{2H})^2\right)=$$

$$=\frac{a^{4H}}{n^2}\sum_{l=2}^{n-1}(n-l)((l-1)^{2H}-2l^{2H}+(l+1)^{2H})^2=$$

$$=\frac{a^{4H}}{n}\sum_{l=2}^{n-1}\left(1-\frac{l}{n}\right)((l-1)^{2H}-2l^{2H}+(l+1)^{2H})^2\le$$

$$\le\frac{1}{n}\sum_{l=2}^{n-1}\left(1-\frac{l}{n}\right)((l-1)^{2H}-2l^{2H}+(l+1)^{2H})^2,$$

так як $a^{4H}\le 1$.

Розглянемо функцію $f(x)=x^{2H}$. Вираз $(l-1)^{2H}-2l^{2H}+(l+1)^{2H}$ є приростом другого порядку функції f на відрізку $[l-1,l+1]$.

Тому $(l-1)^{2H}-2l^{2H}+(l+1)^{2H}=f''(\theta_{l+1})\cdot 1^2$, де $\theta_l\in(l-1,l+1)$. Тоді

$$B_n\le\frac{1}{n}\sum_{l=2}^{n-1}\left(1-\frac{l}{n}\right)((l-1)^{2H}-2l^{2H}+(l+1)^{2H})^2=$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{l=2}^{n-1}\left(1-\frac{l}{n}\right)\left(\frac{2H(2H-1)}{\theta_l^{2-2H}}\right)^2 \leq \frac{1}{n}\sum_{l=2}^{n-1}\frac{(2H(2H-1))^2}{(l-1)^{4-4H}} \leq$$

$$\leq \frac{1}{n}\sum_{l=2}^{n-1}\frac{4}{(l-1)^{4-4H}} \leq \frac{4}{n}\sum_{k=1}^{n-2}\frac{1}{k^{4-4H}} \leq \frac{4}{n}\begin{cases}\zeta(4-4H), & H\in(0,\frac{3}{4});\\ 1+\int_1^n \frac{dx}{x^{4-4H}}, & H\in[\frac{3}{4},1);\end{cases}$$

$$\leq \frac{4}{n}\begin{cases}\zeta(4-4H), & H\in(0,\frac{3}{4});\\ 1+\ln n, & H=\frac{3}{4};\\ 1+\frac{n^{4H-3}}{4H-3}, & H\in(\frac{3}{4},1).\end{cases}$$

де $\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$ — дзета–функція Рімана.

Остаточно

$$VarS_{n,H} \leq A_n + \frac{4}{n}\begin{cases}\zeta(4-4H), & H\in(0,\frac{3}{4});\\ 1+\ln n, & H=\frac{3}{4};\\ 1+\frac{n^{4H-3}}{4H-3}, & H\in(\frac{3}{4},1).\end{cases}$$

Звідси випливає, що для довільного $H\in(0,1)$: $VarS_n \longrightarrow 0, n\longrightarrow\infty$. Теорема доведена.

Зауваження 1. *Неважко бачити, що для будь-якого* $H\in(0,1)$ *ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} VarS_{2^n,H}$ *збіжний, звідки слідує, що* $S_{2^n,H}\longrightarrow\kappa(H)$ *з ймовірністю* 1 *при* $n\longrightarrow\infty$ *[8].*

Із теореми 1 випливає наступна теорема.

Теорема 2. *Статистика*

$$\Theta_n=\beta(S_n), n\geq 1$$

— консистентна оцінка параметра Хюрста H *дробового броунівського руху. При цьому статистика* $\tilde{\Theta}_n=\beta(S_{2^n}), n\geq 1$ *— строго консистентна оцінка цього параметра.*

Список використаної літератури

1. *Kurchenko O. O.* Confidence intervals and rate of convergence for the estimates of Hurst parameter of FBM // Theory Stoch. Process. – 2002. – Vol. 8(24). – P. 242–248.
2. *Курченко О. О.* Одна сильно консистентна оцінка параметра Хюрста дробового броунівського руху // Теорія ймовірностей та математична статистика. – 2002. Вип. 67. – С. 88–96.
3. *Breton J. C., Nourdin I., Peccati G.* Exact confidence intervals for the Hurst parameter of a fractional Brownian motion // Electronic Journal of Statistics. – 2009. – Vol. 3. – P. 416–425.
4. *Prakasa Rao B. L. S.* Statistical Inference for Fractional Diffusion Processes. – Chichester: John Wiley and Sons., 2010. – 280 p.
5. *Кукуш О. Г., Ліхтарьов І. А., Масюк С. В., Чепурний М. І., Шкляр С. В.* Моделі регресії з похибками вимірювання та їх застосування до оцінювання радіаційних ризиків. – К.: ДІА., 2015. – 288 с.
6. *Synyavska O. O.* Interval estimation of the fractional Brownian motion parameter in a model with measurement error // Theory Stoch. Process. – 2016. – Vol. 21(37). – P. 84–90.
7. *Isserlis L.* On a formula for the product–moment coefficient of any order of a normal frequency distribution in any number of variables // Biometrika. – 1918. – Vol. 12. – P. 134–139.
8. *Ламперти Дж.* Случайные процессы. – К.: Вища школа, 1983. – 227 с.

Одержано 06.10.2017