

УДК 519.74

В. Ф. Баранник (Ужгородський нац. ун-т)

ТЕНЗОРНІ ДОБУТКИ НЕЗВІДНИХ ПРОЕКТИВНИХ ЦІЛОЧИСЛОВИХ 2-АДИЧНИХ ЗОБРАЖЕНЬ ЦИКЛІЧНОЇ 2-ГРУПИ

The paper deals with a subalgebra of the algebra of projective integer 2-adic images of a cyclic 2-group, generated by irreducible projective integers of 2-adic representations.

В роботі вивчається підалгебра алгебри проєктивних цілочислових 2-адичних зображень циклічної 2-групи, породжена незвідними проєктивними цілочисловими 2-адичними зображеннями.

Нехай G – скінченна група, e – одиничний елемент G , K – комутативне кільце з одиницею, K^* – мультиплікативна група кільця K , $GL(n, K)$ – група всіх оборотних матриць порядку n над K і E – одинична матриця порядку n . Проєктивним зображенням групи G степеня n над K називається відображення Γ групи G в групу $GL(n, K)$, яке задовольняє умови: $\Gamma(e) = E$, $\Gamma(a)\Gamma(b) = \lambda_{a,b}\Gamma(ab)$ ($\lambda_{a,b} \in K^*$; $a, b \in G$). Відображення $\lambda : G \times G \rightarrow K^*$, $\lambda : (a, b) \rightarrow \lambda_{a,b}$ називається системою K^* -факторів групи G . Якщо λ, μ – система K^* -факторів групи G , то відображення $\lambda \times \mu : G \times G \rightarrow K^*$, $(\lambda \times \mu)(a, b) = \lambda_{a,b} \cdot \mu_{a,b}$ називається добутком систем факторів λ і μ . Два проєктивні зображення Γ_1 і Γ_2 називаються еквівалентними, якщо існує така матриця $S \in GL(n, K)$ і такі елементи $\alpha_g \in K^*$, що $S^{-1}\Gamma_1(g)S = \alpha_g\Gamma_2(g)$ ($g \in G$).

Нехай $K = \mathbb{Z}_p$ – кільце цілих раціональних p -адичних чисел. Кожному класу еквівалентних над \mathbb{Z}_p нерозкладних проєктивних \mathbb{Z}_p -зображень групи G поставимо у відповідність символ $[\Gamma]$ (Γ – нерозкладне проєктивне \mathbb{Z}_p -зображення групи G). Позначимо через $A_1(G, \mathbb{Z}_p)$ Q -модуль (Q – поле раціональних чисел) з базисом $W' = \{[\Gamma_i]\}$, де $W = \{\Gamma_i\}$ – множина всіх попарно нееквівалентних нерозкладних проєктивних \mathbb{Z}_p -зображень групи G . Введемо наступним чином в $A_1(G, \mathbb{Z}_p)$ операцію множення. Нехай $\Gamma_i, \Gamma_j \in W$. Очевидно, відображення $\Gamma : g \rightarrow \Gamma_i(g) \otimes \Gamma_j(g)$ ($g \in G$) є проєктивним \mathbb{Z}_p -зображенням групи G . Зображення Γ \mathbb{Z}_p -еквівалентне зображенню $\Gamma' : g \rightarrow \text{diag}[\Gamma_{r_1}(g), \dots, \Gamma_{r_m}(g)]$ ($g \in G$), де $\Gamma_{r_t} \in W$ ($t = 1, \dots, m$). Задамо добуток $[\Gamma_i], [\Gamma_j]$ наступним чином:

$$[\Gamma_i][\Gamma_j] = [\Gamma_{r_1}] + \dots + [\Gamma_{r_m}]. \tag{1}$$

Нехай $(G, \mathbb{Z}_p, \lambda)$ – схрещене групове кільце групи G і кільця \mathbb{Z}_p при системі факторів $\lambda_{a,b}, \lambda_{a,b} \in \mathbb{Z}_p^*$; $a, b \in G$. Враховуючи, що для $(G, \mathbb{Z}_p, \lambda)$ -модулів справедлива теорема Крулля–Шмідта (див. [1]), легко показати, що означення (1) коректне. Таким чином, ми одержали, що $A_1(G, \mathbb{Z}_p)$ є алгеброю над Q .

Нехай $V = \{\Delta_i\}$ – множина всіх незвідних проєктивних \mathbb{Z}_p -зображень групи G . Позначимо через $B_1(G, \mathbb{Z}_p)$ підалгебру алгебри $A_1(G, \mathbb{Z}_p)$, породжену множиною $V' = \{[\Delta_i]\}$. Нехай $A(\mathbb{Z}_p G)$ – підалгебра алгебри $A_1(G, \mathbb{Z}_p)$, породжена множиною $\{[\Gamma'_i]\}$, де $\{\Gamma'_i\}$ – множина всіх нерозкладних лінійних \mathbb{Z}_p -зображень групи G . Аналогічно вводиться підалгебра $B(\mathbb{Z}_p G)$ алгебри $B_1(G, \mathbb{Z}_p)$.

Алгебри $A(RG)$ і $A_1(G, R)$, де R – кільце всіх цілих величин скінченно-го розширення поля раціональних p -адичних чисел Q_p , вивчалися в [2–7]. В

роботах [2–7] розв’язана задача про напівпростоту (в розумінні Джекобсона) алгебр $A(RG)$ і $A_1(G, R)$. Питання про напівпростоту алгебри $B(\mathbb{Z}_p G)$ розв’язане в [8–10]. Алгебра $B_1(G, \mathbb{Z}_p)$, де G — циклічна група порядку p^n ($p \neq 2$), \mathbb{Z}_p — кільце цілих p -адичних чисел, вивчалася в [11]. Питання про напівпростоту алгебри $B_1(G, R)$, де R — кільце всіх цілих величин скінченного нерозгалуженого розширення F поля раціональних p -адичних чисел Q_p ($p \neq 2$), розв’язане в [12].

В даній роботі вивчається питання про скінченновимірність та напівпростоту алгебри $B_1(H, \mathbb{Z}_2)$, де H — циклічна група порядку 2^n , \mathbb{Z}_2 — кільце цілих 2-адичних чисел.

Нехай $K = \mathbb{Z}_2[x]$, де \mathbb{Z}_2 — кільце цілих 2-адичних чисел, $\alpha = \pm 1$, $t \in \mathbb{Z}$, де \mathbb{Z} — кільце цілих раціональних чисел. Покладемо $\Gamma(n, t, \alpha) = K / \langle x^{2^n} - \alpha \cdot 5^t \rangle$.

K -модулі $\Gamma(n, t, \alpha)$, $\Gamma(n', t', \alpha')$ ізоморфні тоді і тільки тоді, коли $n = n'$, $\alpha = \alpha'$, $t \equiv t' \pmod{2^n}$. В дальнішому будемо вважати, що в $\Gamma(n, t, \alpha)$ $t \in \mathbb{Z}_{2^n} = \mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z}$. Очевидно, K -модуль $\Gamma(n, t, \alpha)$ незвідний тоді і тільки тоді, коли $\alpha = -1$ або $t \in \mathbb{Z}_{2^n}^*$, де $\mathbb{Z}_{2^n}^*$ — мультиплікативна група кільця \mathbb{Z}_{2^n} .

Нехай $u_e, u_a, \dots, u_a^{2^n-1}$ — \mathbb{Z}_2 -базис схрещеного групового кільця $\Lambda = (H, \mathbb{Z}_2, \lambda)$, де $u_a^{2^n} = \gamma^{2^k} u_e$ ($\gamma = 5^s$, $s \not\equiv 0 \pmod{2}$, $s \cdot 2^k < 2^n$). Для $0 \leq m < 2^{n-k-1}$ введемо в розгляд K -підмодулі в K -модулі $\Gamma(n-k, t, 1)$:

$$\Gamma_m(n-k, t) = (x-1)^m \Gamma(n-k, t, 1) + 2\Gamma(n-k, t, 1).$$

Якщо $t \in \mathbb{Z}_{2^n}^*$, то K -модуль $\Gamma(n-k, t, 1)$ незвідний, $\Gamma_m(n-k, t, 1) \cong \Gamma_{2^{n-k-m}}(n-k, t, 1)$, $\Gamma_0(n-k, t, 1) \cong \Gamma_{2^{n-k}}(n-k, t, 1) \cong \Gamma(n-k, t, 1)$. Модулі $\Gamma_m(n-k, t)$ ($0 \leq m < 2^{n-k-1}$) попарно неізоморфні.

Якщо $t \in \mathbb{Z}_{2^n}$, то K -модулі $\Gamma_m(n-k, t, 1)$ звідні, але нерозкладні, за винятком випадку $m = 2^{n-k-1} - 1$:

$$\Gamma_{2^{n-k-1}-1} \cong \Gamma\left(n-k-1, \frac{t}{2}, 1\right) \oplus \Gamma\left(n-k-1, \frac{t}{2}, -1\right).$$

Для K -модуля M через \overline{M} будемо позначати K -модуль $\overline{M} = M/2M$. Тоді \overline{M} -модуль над полем $\overline{\mathbb{Z}}_2$ з двох елементів, в якому діє лінійний оператор x .

Нехай $V_m = \overline{\mathbb{Z}}_2[x] / \langle (x-1)^m \rangle$. Очевидно,

$$\begin{aligned} \overline{\Gamma}(n-k, t, \alpha) &= V_{2^{n-k}}, \\ \overline{\Gamma}_m(n-k, t) &= V_{m+1} \oplus V_{2^{n-k-m-1}}. \end{aligned}$$

Мають місце наступні точні послідовності K -модулів:

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow 2\Gamma(n-k, t, \alpha) \rightarrow \Gamma(n-k, t, \alpha) \rightarrow V_{2^{n-k}} \rightarrow 0, \\ 0 \rightarrow 2\Gamma_m(n-k, t) \rightarrow \Gamma(n-k, t, 1) \rightarrow V_m \rightarrow 0 \quad (0 \leq m < 2^{n-k-1}). \end{aligned}$$

Лема [13]. Нехай $1 \leq r \leq m \leq 2^n$ і

$$V_r \otimes V_m \cong V_{\alpha_1} \oplus \dots \oplus V_{\alpha_r} \quad (1 \leq \alpha_1 \leq \dots \leq \alpha_r \leq 2^n).$$

Тоді

$$V_r \otimes (V_m \oplus V_{2^n-m}) \cong (V_{\alpha_1} \oplus V_{2^n-\alpha_1}) \oplus \dots \oplus (V_{\alpha_r} \oplus V_{2^n-\alpha_r}).$$

Має місце точна послідовність K -модулів

$$0 \rightarrow \Gamma(n - k - 1, t, \alpha) \rightarrow \Gamma(n - k, 2t, 1) \rightarrow \Gamma(n - k, t, -\alpha) \rightarrow 0.$$

Якщо $k \geq k'$, $t \in \mathbb{Z}_{2^n}$, $t' \in \mathbb{Z}_{2^n}$, $\alpha = \pm 1$, $\alpha' = \mp 1$, то

$$\Gamma(n - k, t, \alpha) \oplus \Gamma(n - k', t', \alpha') \cong 2^{n-k} \Gamma(n - k', 2^{k-k'} t + t', \alpha \alpha').$$

Очевидно,

$$\Gamma_m(n - k, t) \otimes \Gamma(n - k, t', \alpha) \cong 2^{n-k} \Gamma(n - k, t + t', \alpha).$$

Лема 1. Нехай $1 \leq r \leq m \leq 2^{n-k-1}$. Тоді

$$\begin{aligned} \Gamma_m(n - k, t) \otimes \Gamma_r(n - k, t') &\cong \sum_{i=1}^l (\Gamma_{\alpha_i}(n - k, t + t') \oplus \Gamma_{2^{n-k-\alpha_i}}(n - k, t + t')) + \\ &+ (2^{n-k} - 2l) \Gamma(n - k, t + t', 1) \quad \left(V_r \oplus V_m \cong \bigoplus_{i=1}^l V_{\alpha_i} \right). \end{aligned}$$

Доведення. Розглянемо точну послідовність

$$0 \rightarrow \Gamma_m(n - k, t) \rightarrow \Gamma(n - k, t, 1) \rightarrow V_m \rightarrow 0.$$

Помножимо дану послідовність тензорно на $\Gamma_r(n - k, t')$:

$$0 \rightarrow \Gamma_m(n - k, t) \otimes \Gamma_r(n - k, t') \rightarrow 2^{n-k} \Gamma(n - k, t + t', 1) \rightarrow V_m \otimes (V_{r+1} \oplus V_{2^{n-k-r-1}}) \rightarrow 0. \quad (2)$$

Точну послідовність (2) можна записати у вигляді

$$0 \rightarrow \Gamma_m(n - k, t) \otimes \Gamma_r(n - k, t') \rightarrow 2^{n-k} \Gamma(n - k, t + t', 1) \rightarrow \bigoplus_{i=1}^l (V_{\alpha_i} \oplus V_{2^{n-k-\alpha_i}}) \rightarrow 0, \quad (3)$$

де $V_{r+1} \otimes V_m \cong \bigoplus_{i=1}^l V_{\alpha_i}$.

Розглянемо точну послідовність

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \sum_{i=1}^l (\Gamma_{\alpha_i}(n - k, t + t')) \otimes \Gamma_{2^{n-k-\alpha_i}}(n - k, t + t') \rightarrow \\ \rightarrow 2l \Gamma(n - k, t + t', 1) \rightarrow \bigoplus_{i=1}^l (V_i \oplus V_{2^{n-k-i}}) \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (4)$$

З (2) і (3) випливає, що

$$\begin{aligned} \Gamma_m(n - k, t) \otimes \Gamma_r(n - k, t') &\cong \bigoplus_{i=1}^l \left(\Gamma_{\alpha_i}(n - k', 2^{k-k'} t + t', 1) \oplus \right. \\ &\left. \oplus \Gamma_{2^{n-k-\alpha_i}}(n - k, t + t') \right) \oplus (2^{n-k} - 2l) \Gamma(n - k, t + t', 1). \end{aligned}$$

Лема доведена.

Лема 2. Нехай $k \geq k'$, $t \in \mathbb{Z}_{2^{n-k}}$, $t' \in \mathbb{Z}_{2^{n-k'}}$, $r \leq m$. Тоді

$$\Gamma_m(n-k, t) \otimes \Gamma_r(n-k', t') \cong \oplus \sum_{i=1}^l \left(\Gamma_{\alpha_i}(n-k', 2^{k-k'}t + t', 1) \oplus \right. \\ \left. \oplus \Gamma_{2^{n-k-\alpha_i}}(n-k', 2^{k-k'}t + t', 1) \right) \oplus (2^{n-k} - 2l)\Gamma(n-k', 2^{k-k'}t + t', 1). \quad (5)$$

Доведення. Розглянемо точну послідовність

$$0 \rightarrow \Gamma_m(n-k, t) \rightarrow \Gamma(n-k, t, 1) \rightarrow V_m \rightarrow 0.$$

Тоді

$$0 \rightarrow \Gamma_m(n-k, t) \otimes \Gamma_r(n-k', t') \rightarrow 2^{n-k}\Gamma(n-k, 2^{k-k'}t + t', 1) \rightarrow V_m \oplus (V_{r+1} \oplus V_{2^{n-k-r-1}}) \rightarrow 0.$$

Нехай $V_m \otimes V_{r+1} \cong \otimes \sum_{i=1}^l V_{\alpha_i}$. Тоді

$$0 \rightarrow \Gamma_m(n-k, t) \otimes \Gamma_r(n-k', t') \rightarrow 2^{n-k}\Gamma(n-k', 2^{k-k'}t + t', 1) \rightarrow \\ \rightarrow \oplus \sum_{i=1}^l (V_{\alpha_i} \oplus V_{2^{n-k-\alpha_i}}) \rightarrow 0. \quad (6)$$

Розглянемо точну послідовність

$$0 \rightarrow \sum_{i=1}^l \left(\Gamma_{\alpha_i}(n-k', 2^{k-k'}t + t', 1) \oplus \Gamma_{2^{n-k-\alpha_i}}(n-k', 2^{k-k'}t + t', 1) \right) \rightarrow \\ \rightarrow 2l \left(\Gamma(n-k', 2^{k-k'}t + t', 1) \right) \rightarrow \oplus \sum_{i=1}^l (V_{\alpha_i} \oplus V_{2^{n-k-\alpha_i}}) \rightarrow 0. \quad (7)$$

Порівнюючи (6) і (7) одержимо формулу (5). Лема доведена.

Лема 3. Нехай $k \geq k'$, $t \in \mathbb{Z}_{2^n}$, $t' \in \mathbb{Z}_{2^n}$. Тоді

$$\Gamma_m(n-k, t) \otimes \Gamma(n-k', t', \alpha) \cong 2^{n-k}\Gamma(n-k', 2^{k-k'}t + t', \alpha).$$

Доведення. Нехай $a \rightarrow A$ — незвідне \mathbb{Z}_2 -зображення циклічної групи H порядку 2^{n-k} , яке реалізується в модулі $\Gamma_m(n-k, t)$. Тоді в $\Gamma_m(n-k, t) \otimes \Gamma(n-k', t', \alpha)$ реалізується \mathbb{Z}_2 -зображення

$$a \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & A(\alpha \cdot 5^t) \\ A & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & A & 0 \end{pmatrix} = \Gamma(a).$$

Нехай

$$C = \begin{pmatrix} A & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & A^2 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & A^{2^{n-k}} \end{pmatrix}.$$

Тоді

$$C^{-1}\Gamma(a)C = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & A^{2^{n-k'}}(\alpha 5^{t'}) \\ E & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & E & 0 \end{pmatrix}.$$

Оскільки $A^{2^{n-k'}} = (A^{2^{n-k}})^{2^{k-k'}} = (5^t)^{2^{k-k'}} E$ (E — одинична матриця порядку 2^{n-k}), то $\Gamma_m(n-k, t) \otimes \Gamma(n-k', t', \alpha) \cong 2^{n-k} \Gamma(n-k', 2^{k-k'}t + t', \alpha)$. Лема доведена.

Нехай $\omega_m(n-k, t) = \Gamma_m(n-k, t) - \Gamma_{2^{n-k-m}}(n-k, t)$ ($0 \leq m < 2^{n-k-1}$). При $t \in \mathbb{Z}_{2^n}$ $\omega_m(n-k, t) = 0$.

Лема 4. При $0 \leq m < 2^{n-k-1}$, $t \in 2\mathbb{Z}_{2^n}$ виконується рівність $\omega_m^2(n-k, t) = 0$.

Доведення. Доведемо, що $\Gamma_m(n-k, t) \otimes \Gamma_m(n-k, t) \cong \Gamma_m(n-k, t) \otimes \Gamma_{2^{n-k-m}}(n-k, t) \cong \Gamma_{2^{n-k-m}}(n-k, t) \otimes \Gamma_{2^{n-k-m}}(n-k, t)$.

Розглянемо точну послідовність $0 \rightarrow \Gamma_m(n-k, t) \rightarrow \Gamma(n-k, t, 1) \rightarrow V_m \rightarrow 0$.

Нехай $V_m \otimes V_m \cong \sum_{i=1}^l V_{\alpha_i}$. Тоді $V_m \otimes V_{2^{n-k-m}} \cong \bigoplus_{i=1}^l V_{2^{n-k-\alpha_i}}$.

Мають місце наступні точні послідовності:

$$0 \rightarrow \Gamma_m(n-k, t) \otimes \Gamma_m(n-k, t) \rightarrow 2^{n-k} \Gamma(n-k, 2t, 1) \rightarrow V_m \otimes (V_m \oplus V_{2^{n-k-m}}) \rightarrow 0,$$

$$0 \rightarrow \Gamma_m(n-k, t) \otimes \Gamma_{2^{n-k-m}}(n-k, t) \rightarrow 2^{n-k} \Gamma(n-k, 2t, 1) \rightarrow V_m \otimes (V_{2^{n-k-m}}) \rightarrow 0.$$

Звідси одержимо, що $\Gamma_m(n-k, t) \otimes \Gamma_m(n-k, t) \cong \Gamma_m(n-k, t) \otimes \Gamma_{2^{n-k-m}}(n-k, t)$.

Аналогічно доводимо, що

$$\Gamma_m(n-k, t) \otimes \Gamma_m(n-k, t) \cong \Gamma_{2^{n-k-m}}(n-k, t) \otimes \Gamma_{2^{n-k-m}}(n-k, t).$$

Таким чином, $\omega_m^2(n-k, t) = 0$. Лема доведена.

Лема 5. Елементи $[\Gamma_m(n-k, t)] - [\Gamma_{2^{n-k-m}}(n-k, t)]$, де $0 \leq m < 2^{n-k-1}$ ($t \in 2\mathbb{Z}_{2^{n-k}}$) кільця $a'(\mathbb{Z}_2 H)$ \mathbb{Z}_2 -зображень H (H — циклічна 2-група порядку 2^n) утворюють \mathbb{Z}_2 -базис нільпотентного ідеалу

$$V = \{[\Gamma_m(n-k, t)] - [\Gamma_{2^{n-k-m}}(n-k, t)] \mid 0 \leq m < 2^{n-k-1}\}$$

кільця $a'(\mathbb{Z}_2 H)$ і при цьому $V^2 = 0$.

Доведення. Очевидно, елементи

$$[\Gamma_m(n-k, t)] - [\Gamma_{2^{n-k-m}}(n-k, t)] \quad (0 \leq m < 2^{n-k-1}, t \in 2\mathbb{Z}_{2^{n-k}})$$

лінійно незалежні над \mathbb{Z} . На основі доведених формул тензорних добутоків можна перевірити, що якщо $\nu \in a'(\mathbb{Z}_2 H)$, то $\nu([\Gamma_m(n-k, t)] - [\Gamma_{2^{n-k-m}}(n-k, t)]) \in V$ і $\omega([\Gamma_m(n-k, t)] - [\Gamma_{2^{n-k-m}}(n-k, t)]) = 0$ для $\omega \in V$ ($0 \leq m < 2^{n-k-1}$, $t \in 2\mathbb{Z}_{2^{n-k}}$). Лема доведена.

Теорема 1. Алгебра $\overline{B}_1(H, \mathbb{Z}_2) = B_1(H, \mathbb{Z}_2)/V$ скінченновимірна і напівпроста

$$\dim_Q \overline{B}_1(H, \mathbb{Z}_2) = \sum_{k=1}^{n-1} (2^n - 2^{n-k} - k) 2^{n-k-1} + \sum_{k=0}^{n-1} (2^{n-k-1} + 1 + k) 2^{n-k-1}.$$

Доведення. Нехай $M = \{[\lambda] \mid \lambda \in \mathbb{Z}_2^*\}$ — група класів еквівалентних систем \mathbb{Z}_2 -факторів групи H (мультиплікатор) і $\mathbb{Z}_2 = \mathbb{Z}_2/2\mathbb{Z}_2$. Розглянемо лінійне відображення ψ алгебри $\overline{B}_1(H, \mathbb{Z}_2)$ в алгебру $QM \otimes_Q A(\mathbb{Z}_2 H) : \psi([\Gamma]) = [\lambda] \otimes [\overline{\Gamma}]$,

де Γ — проєктивне \mathbb{Z}_2 -зображення групи H з системою \mathbb{Z}_2 -факторів $\lambda_{a,b} \in [\lambda]$ ($a, b \in H$), $\bar{\Gamma}$ — \mathbb{Z}_2 -зображення групи $H = \langle a \rangle$, одержане з \mathbb{Z}_2 -зображення $\Gamma : a \rightarrow \Gamma(a)$ групи H зведенням елементів матриці $\Gamma(a)$ за модулем $2\mathbb{Z}_2$. Легко бачити, що ψ — гомоморфізм алгебри $\bar{B}_1(H, \mathbb{Z}_2)$ в алгебру $QM \otimes_Q A(\mathbb{Z}_2 H)$. З точністю до \mathbb{Z}_2 -еквівалентності мають місце формули:

$$\begin{aligned}\bar{\Gamma}(n-k, t, \alpha) &\cong V_{2^{n-k}}, \\ \bar{\Gamma}_m(n-k, t, \alpha) &\cong V_m \oplus V_{2^{n-k-m}}.\end{aligned}\tag{8}$$

Нехай $\Delta_1, \dots, \Delta_l$ — всі різні нерозкладні проєктивні \mathbb{Z}_2 -зображення групи $H = \langle a \rangle$, які входять в множину, що складається з всіх зображень вигляду $\Gamma_m(n-k, t), \Gamma(n-k, t, \pm 1)$. Згідно попередніх лем $\Delta_1, \dots, \Delta_l \in Q$ -базисом алгебри $\bar{B}_1(H, \mathbb{Z}_2)$ і $l = \sum_{k=1}^{n-1} (2^n - 2^{n-k} - k)2^{n-k-1} + \sum_{k=0}^{n-1} (2^{n-k-1} + 1 + k)2^{n-k-1}$.

З (8) випливає, що $\bar{\Delta}_i$ і $\bar{\Delta}_j$ ($i \neq j$) $\bar{\mathbb{Z}}_2$ -еквівалентні тоді і тільки тоді, коли степені зображень Δ_i і Δ_j співпадають. Далі, якщо степені зображень Δ_i і Δ_j співпадають ($i \neq j$), то в них не еквівалентні системи факторів. Звідси одержуємо, що $\ker \psi = 0$. Як відомо [13], алгебра $A(\bar{\mathbb{Z}}_2 H)$ напівпроста. Оскільки алгебра QM сепарабельна, то алгебра $QM \otimes_Q A(\bar{\mathbb{Z}}_2 H)$ напівпроста. З вищесказаного випливає, що алгебра $\bar{B}_1(H, \mathbb{Z}_2)$ напівпроста. Теорема доведена.

Список використаної літератури

1. *Боревич З. И., Фаддеев Д. К.* Теория гомологий в группах // Вестник Ленингр. ун-та. — 1959. — № 7. — С. 72–87.
2. *Reiner I.* Integral representation algebras // Trans. Amer. Math. Soc. — 1966. — **124**. — Р. 111–121.
3. *Zemaneck J. R.* Nilpotent elements in representation rings // J. Algebra. — 1971. — **19**. — Р. 453–469.
4. *Гудивок П. М., Гончарова С. Ф., Рудько В. П.* Об алгебре целочисленных представлений конечной группы // Докл. АН СССР. — 1976. — **198**, № 3. — С. 509–512.
5. *Гудивок П. М., Рудько В. П.* Об алгебре модулярных и целочисленных представлений конечных групп // Изв. АН СССР. Сер. матем. — 1973. — **53**, № 5. — С. 963–987.
6. *Баранник А. Ф., Гудивок П. М.* Про алгебру проєктивних цілочислових зображень скінченних груп // Доп. АН УРСР. Сер. А. — 1972. — № 4. — С. 291–293.
7. *Баранник А. Ф., Гудивок П. М.* Кільце проєктивних цілочислових p -адичних зображень скінченної групи // Матем. зб. наук. праць Львів. Матем. тов-ва. — 1991. — Вип. I. — С. 44–54.
8. *Гудивок П. М., Гончарова С. Ф., Рудько В. П.* О тензорных произведениях целочисленных p -адических представлений конечных групп // Укр. матем. ж. — 1982. — **4**, № 6. — С. 688–694.
9. *Баранник В. Ф., Гудивок П. М., Рудько В. П.* Тензорні добутки зображень скінченних груп над повними дискретно нормованими кільцями // Доп. АН УРСР. Сер. А. — 1985. — № 4. — С. 9–12.
10. *Баранник В. Ф., Рудько В. П.* Алгебра целых p -адических представлений абелевой группы, порожденная неприводимыми представлениями. — М., 1975. — С. 195–209. — Деп. в ВИНТИ, № 705–76.
11. *Баранник В. Ф.* Тензорні добутки незвідних проєктивних цілочислових p -адичних зображень циклічної p -групи // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ. — 1998. — Вип. 3. — С. 19–24.
12. *Баранник В. Ф.* Тензорні добутки незвідних проєктивних цілочислових p -адичних зображень циклічної p -групи // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ. — 2004. — Вип. 9. — С. 4–10.
13. *Гудивок П. М., Рудько В. П.* Тензорные произведения представлений конечных групп. — Ужгород: Ужгор. ун-т, 1985. — 115 с.

Одержано 08.09.2017