УДК 517.95+511.42

І. О. Бобик (Нац. ун-т «Львівська політехніка»),
М. М. Симотюк (Ін-т прикладних проблем мех. і мат. ім. Я. С. Підстригача НАН України)

ЗАДАЧА ТИПУ ДІРІХЛЕ ДЛЯ РІВНЯНЬ ІЗ ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ З ВІДХИЛЕНИМ АРГУМЕНТОМ

The correctness of the Dirichlet-type problem for the linear partial differential equations with delay is investigated. The conditions of existence and uniqueness of the solution of the problem are established. The metric theorems of the estimation of small denominators of the problem are proved.

Досліджено коректність задачі типу Діріхле для рівнянь із частинними похідними з відхиленим аргументом. Встановлено умови існування єдиного розв'язку задачі. Доведено метричні теореми про оцінки знизу малих знаменників, які виникають при побудові розв'язку задачі.

Диференціальні рівняння з відхиленим аргументом пов'язують значення невідомої функції та її похідних при різних значеннях аргументу. Такі рівняння виникають при математичному описі багатьох систем, коли враховується, що взаємодія між частинами системи відбувається не миттєво, а з деяким запізненням. Задачі, при математичному описі яких є суттєвим врахування відхилень аргументу, виникають у теорії ядерних реакторів, теорії автоматичного регулювання, імунології, епідеміології, математичній економіці та інших областях природничих наук (див. $[1,4,5,9]$ та бібліографію в них).

Різноманітним аспектам теорії диференціальних рівнянь з відхиленим аргументом та її застосуванням присвячено обширну літературу $[1,4,5,9,10]$.

У даній роботі розглядаємо задачу типу задачі Діріхле для рівняння з частинними похідними з відхиленим аргументом

$$\sum_{j=0}^{n} a_j \frac{\partial^{2n} u(t,x+2jh)}{\partial t^{2n-2j}\partial x^{2j}} = 0, \quad a_0 = 1, \quad (t,x) \in (0,T)\times\Omega, \tag{1}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{2j-2}u(t,x)}{\partial t^{2j-2}}\Big|_{t=0} &= \varphi_j(x), \quad j=\overline{1,n}, \\ \frac{\partial^{2j-2}u(t,x)}{\partial t^{2j-2}}\Big|_{t=T} &= \varphi_{n+j}(x), \quad j=\overline{1,n}, \end{aligned} \tag{2}$$

де $\Omega = \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$ — коло одиничного радіуса, $h \in [0, 2\pi)$, a_j, $j = \overline{1,n}$, — такі комплексні числа, що $a_n \neq 0$ і рівняння

$$\sigma^n - a_1\sigma^{n-1} + \ldots + (-1)^n a_n = 0$$

має різні прості корені $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$, які є відмінними від нуля, бо $a_n \neq 0$.

У випадку $h = 0$ задача (1), (2) вивчалася в роботах $[2,3,6]$. У цих роботах встановлено умови коректної розв'язності задачі з умовами (2) для рівняння (1) при $h = 0$ (відхилення аргументу відсутнє) і доведено, що такі умови виконуються для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}$) чисел $T > 0$ та для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}^n$) векторів $\vec{a} = (a_1, \ldots, a_n)$.

Основна мета даної роботи — знайти умови розв'язності задачі (1), (2) (при $h \neq 0$), дослідити вплив відхилення h і показати, що такі умови виконуються для майже всіх (за мірою Лебега) значень $h \in [0, 2\pi)$.

1. Нижче використовуємо такі позначення: $\operatorname{mes} A$ — міра Лебега в $\mathbb{R}$ вимірної множини $A \subset \mathbb{R}$; H_α ($\alpha \in \mathbb{R}$) — простір, отриманий в результаті поповнення простору тригонометричних поліномів $\varphi(x) = \sum \varphi_k e^{ikx}$ скінченного степеня за нормою

$$\|\varphi(x); H_\alpha\| = \sqrt{\sum_{|k|\geq 0} |\varphi_k|^2 w_k^2(\alpha)}, \quad w_k(\alpha) = (1+|k|)^\alpha, \quad k \in \mathbb{Z};$$

$C^n([0,T]; H_\alpha)$ — простір функцій $u(t,x) = \sum\limits_{|k|\geq 0} u_k(t) e^{ikx}$, $u_k \in C^n[0,T]$, $k \in \mathbb{Z}$, таких, що при фіксованому $t \in [0,T]$ похідні $\partial^j u / \partial t^j \equiv \sum\limits_{|k|\geq 0} u_k^{(j)}(t) e^{ikx}$, $0 \leq j \leq n$, належать до простору H_α і як елементи цього простору є неперервними за t на $[0,T]$; норму в $C^n([0,T]; H_\alpha)$ задаємо формулою

$$\|u(t,x); C^n([0,T]; H_\alpha)\| = \sum_{j=0}^{n} \max_{t\in[0,T]} \left\|\partial^j u(t,x)/\partial t^j; H_\alpha\right\|.$$

2. Розв'язок задачі (1), (2) шукаємо у вигляді ряду

$$u(t,x) = \sum_{|k|\geq 0} u_k(t) e^{ikx}. \tag{3}$$

Кожна функція $u_k(t)$, $k \in \mathbb{Z}$, є розв'язком такої двоточкової задачі для звичайного диференціального рівняння:

$$\sum_{j=0}^{n} a_j (ik)^{2j} e^{i2jhk} u_k^{(2n-2j)}(t) = 0, \tag{4}$$

$$\begin{aligned} &u_k^{(2j-2)}(0) = \varphi_{j,k}, \quad j = \overline{1,n}, \\ &u_k^{(2j-2)}(T) = \varphi_{n+j,k}, \quad j = \overline{1,n}, \end{aligned} \tag{5}$$

де $\varphi_{j,k}, k \in \mathbb{Z}$, — коефіцієнти Фур'є функцій $\varphi_j(x)$, $j = \overline{1,2n}$, відповідно. Для $k = 0$ задача (4), (5) має єдиний розв'язок $u_0(t)$. Дійсно, з рівняння (4) при $k = 0$ випливає, що функція $u_0(t)$ є многочленом $(2n-1)$-го степеня, коефіцієнти якого однозначно визначаються з умов $u_0^{(2j-2)}(0) = \varphi_{j,0}$, $j = \overline{1,n}$, $u_0^{(2j-2)}(T) = \varphi_{n+j,0}$, $j = \overline{1,n}$, які випливають з умов (5) при $k = 0$.

Якщо $k \neq 0$, то розв'язок задачі (4), (5) зображується формулою

$$u_k(t) = \sum_{q=1}^{n} C_{k,q} \operatorname{ch}(\lambda_q k t e^{ikh}) + \sum_{q=1}^{n} D_{k,q} \operatorname{sh}(\lambda_q k t e^{ikh}), \tag{6}$$

де $\lambda_j = \sqrt{\sigma_j}$, $j = \overline{1,n}$, а гілку кореня вибрано так, що $\sqrt{1} = 1$. З умов (5) випливає, що сталі $C_{k,q}$, $k \neq 0$, $q = \overline{1,n}$, знаходяться із системи рівнянь

$$\sum_{q=1}^{n} C_{k,q} (\lambda_q k e^{ikh})^{2j-2} = \varphi_{j,k}, \;\; j = \overline{1,n}, \tag{7}$$

і до того ж однозначно, бо система (7) має відмінний від нуля визначник

$$\delta(k) = \prod_{n\geq j>q\geq 1} \Big((\lambda_j k e^{ikh})^2 - (\lambda_q k e^{ikh})^2 \Big) = (ke^{ikh})^{n(n-1)} \prod_{n\geq j>q\geq 1} (\sigma_j - \sigma_q),$$

а сталі $D_{k,q}$, $k \neq 0$, $q = \overline{1,n}$, є розв'язками наступної системи рівнянь

$$\sum_{q=1}^{n} D_{k,q} (\lambda_q k e^{ikh})^{2j-2} \operatorname{sh}(\lambda_q k T e^{ikh}) =$$

$$= \varphi_{n+j,k} - \sum_{q=1}^{n} C_{k,q} (\lambda_q k e^{ikh})^{2j-2} \operatorname{ch}(\lambda_q k T e^{ikh}), \quad j = \overline{1,n}. \tag{8}$$

Через $\Delta(k), k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, позначимо визначник системи (8):

$$\Delta(k) = \det \|(\lambda_q k e^{ikh})^{2j-2} \operatorname{sh}(\lambda_q k T e^{ikh})\|_{j,q=1}^{n}.$$

Легко перевірити, що

$$\Delta(k) = \delta(k) \prod_{j=1}^{n} \operatorname{sh}(\lambda_j k T e^{ikh}). \tag{9}$$

Теорема 1. *Для єдиності розв'язку задачі* (1), (2) *у просторі* $C^{2n}([0,T]; H_\alpha)$ *необхідно і досить, щоб виконувалась умова*

$$\Big(\bigcup_{j=1}^{m} \bigcup_{\substack{k\in\mathbb{Z},\\ k\neq 0}} \{ i\lambda_j k T e^{ikh} \} \Big) \cap \pi\mathbb{Z} = \emptyset. \tag{10}$$

Доведення проводиться аналогічно до доведення теореми 2.1 у [6, с. 97].

Зауваження 1. Умову (10) в теоремі 1 можна записати у вигляді

$$\prod_{j=1}^{n} \Big(\sin^2(|\lambda_j| kT) + \cos^2(kh + \theta_j) \Big) \neq 0, \quad k \neq 0,$$

де $\theta_j = \arg \lambda_j$, $j = \overline{1,n}$.

Наступне твердження означає, що за рахунок вибору відхилення h можна добитися єдиності розв'язку задачі (1), (2).

Наслідок 1. *Якщо задача з умовами* (2) *для рівняння* (1) *без відхилення* ($h = 0$) *має більш, ніж один розв'язок, то існує* $h_0 \in [0, 2\pi)$ *таке, що задача з умовами* (2) *для рівняння* (1) *з відхиленням* $h = h_0$ *може мати не більше одного розв'язку.*

Доведення. Для кожного $k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ розглянемо функції

$$g_k(h) \equiv \prod_{j=1}^{n} \Big(\sin^2(|\lambda_j| kT) + \cos^2(kh + \theta_j) \Big).$$

Зрозуміло, що кожна функція $g_k(h)$, $k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, є аналітичною за h, відмінною від тотожного нуля, і, отже, має не більш, ніж зліченну множину M_k нулів. Тоді для довільного $h_0 \in \mathbb{R}\backslash\Big(\bigcup_{k\neq 0} M_k \Big)$ маємо, що $g_k(h_0) \neq 0$ для всіх $k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$.

Проаналізуємо можливість виконання умови (10) для задачі типу задачі Діріхле для рівняння Лапласа з відхиленим аргументом та для рівняння коливання струни з відхиленим аргументом.

Приклад 1. Для рівняння Лапласа з відхиленим аргументом

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u(t,x+2h)}{\partial x^2} = 0, \tag{11}$$

задача з умовами

$$u(0,x) = \varphi_1(x),\ u(T,x) = \varphi_2(x), \tag{12}$$

згідно з теоремою 1, може мати не більше одного розв'язку, тоді і тільки тоді, коли виконується умова:

$$\sin^2(kT) + \cos^2(kh) \neq 0, \quad k \neq 0. \tag{13}$$

Для рівняння Лапласа без відхилення ($h = 0$) умова (13) виконується для довільного $T > 0$. Ця умова виконується для довільного $T > 0$, якщо h не є числом вигляду

$$\frac{\pi(2m-1)}{2l}, \quad m, l \in \mathbb{Z}, \quad l \neq 0.$$

Умова (13) порушується, якщо $T \in \pi\mathbb{Q}$, а число h має вигляд

$$h = \frac{\pi(2m^0-1)}{2l^0}$$

для деяких $m^0, l^0 \in \mathbb{Z}$, $l^0 \neq 0$.

Приклад 2. Розглянемо задачу з умовами (12) для рівняння коливання струни з відхиленим аргументом

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u(t,x+2h)}{\partial x^2} = 0. \tag{14}$$

За теоремою 1 задача (12), (14) може мати не більше одного розв'язку тоді і тільки тоді, коли виконується умова:

$$\sin^2(kT) + \sin^2(kh) \neq 0, \quad k \neq 0. \tag{15}$$

Для рівняння малих коливань струни (при $h = 0$) умова (15) виконується, якщо число T/π є ірраціональним. Якщо ж обидва числа T/π, h/π — раціональні, то умова (15) порушується. Якщо хоча б одне з чисел T/π, h/π є ірраціональним, то умова (15) справджується. Таким чином, за рахунок вибору відхилення аргументу можна добитися виконання умови єдиності для задачі типу Діріхле для рівняння малих коливань струни.

Для задач з умовами (12) для рівнянь (11) та (14) справедлива альтернатива.

Теорема 2. *Однорідна задача, яка відповідає задачі* (11), (12) *(або задачі* (14), (12)*) має в просторі* $C^2([0,T]; H_\alpha)$ *єдиний нульовий розв'язок або зліченну кількість лінійно незалежних розв'язків.*

Доведення проводиться за схемою, наведеною у роботі [8].

4. Припустимо, що умова (10) виконується. Із формул (3), (6) отримуємо формальне зображення для розв'язку задачі (1), (2) у вигляді ряду

$$u(t,x)=u_0(t)+\sum_{|k|>0}\exp(ikx)\times$$

$$\times\Big(\sum_{q=1}^{n}\frac{\delta_{j,q}(k)}{\delta(k)}\varphi_{j,k}\,\mathrm{ch}(\lambda_q kte^{ikh})+\sum_{q=1}^{n}\frac{\Delta_{j,q}(k)}{\Delta(k)}\varphi_{q+n,k}\,\mathrm{sh}(\lambda_q kte^{ikh})\Big), \qquad (16)$$

де $\delta_{j,q}(k)$, $\Delta_{j,q}(k)$, $j,q=\overline{1,n}$, — алгебричні доповнення елементів, що стоять на перетині j-го рядка та q-го стовпця визначників $\delta(k)$, $\Delta(k)$ відповідно.

Збіжність ряду (16), взагалі, пов'язана із проблемою малих знаменників, оскільки $|\Delta(k)|$, будучи відмінним від нуля, може набувати як завгодно малих значень для нескінченної кількості цілих чисел k.

Теорема 3. *Нехай виконується умова* (10) *і нехай існує така стала* δ, *що для всіх чисел* $k\in\mathbb{Z}$ *виконується нерівність*

$$\big|\,\mathrm{sh}\left(\lambda_j kTe^{ikh}\right)\big|\geq(1+|k|)^{-\omega}e^{T|\mathrm{Re}(\lambda_j ke^{ikh})|},\quad j=\overline{1,n}. \qquad (17)$$

Якщо $\varphi_j\in H_{\alpha+\omega+2n}$, $j=\overline{1,2n}$, *то в просторі* $C^{2n}([0,T];H_\alpha)$ *існує єдиний розв'язок задачі* (1), (2), *який неперервно залежить від* φ_j, $j=\overline{1,2n}$.

Доведення. Нехай $\varphi_j\in H_{\alpha+\omega+2n}$, $j=\overline{1,2n}$. Покажемо, що тоді ряд (16) належить до простору $C^{2n}([0,T];H_\alpha)$ і є розв'язком задачі (1), (2). Правильними є такі нерівності:

$$\max_{t\in[0,T]}|u_k^{(q)}(t)|\leq C_1\sum_{j=1}^{2n}|\varphi_{jk}|(1+|k|)^{\omega+2n},\quad q=\overline{0,2n}. \qquad (18)$$

З нерівностей (18) випливає, що

$$\big\|u(t,x);C^{2n}([0,T];H_\alpha)\big\|\leq C_2\sum_{q=0}^{2n}\Big(\sum_{|k|\geq0}\max_{t\in[0,T]}|u_k^{(q)}(t)|^2(1+|k|)^{2\alpha}\Big)^{1/2}\leq$$

$$\leq C_3\sum_{j=1}^{n}\Big(\sum_{|k|\geq0}|\varphi_{jk}|^2w_k(\alpha+\omega+2n)\Big)^{1/2}=C_3\sum_{j=1}^{n}\big\|\varphi_j(x);H_{\alpha+\omega+2n}\big\|<\infty. \qquad (19)$$

З нерівності (19) отримуємо твердження теореми 3.

5. Дослідимо питання про можливість виконання оцінок (17).

Теорема 4. *Для майже всіх (стосовно міри Лебега в* $\mathbb{R}$*) чисел* $h\in(0,2\pi)$ *кожна з нерівностей* (17) *виконується для всіх (крім скінченної кількості) чисел* $k\in\mathbb{Z}$ *при* $\omega>1$.

Доведення. Оскільки для довільного $z\in\mathbb{C}$ виконується оцінка

$$|e^z-1|\geq\max\{1;e^{\mathrm{Re}\,z}\}\cdot|\sin(\mathrm{Im}\,z)|,$$

то $|\,\mathrm{sh}\,z|\geq\frac{1}{2}\max\{e^{-\mathrm{Re}\,z};e^{\mathrm{Re}\,z}\}\cdot|\sin(\mathrm{Im}\,z)|$. Тому для доведення теореми досить перевірити, що при $\omega>1$ для майже всіх значень $h\in\Omega$ кожна з нерівностей

$$|\sin(T\mathrm{Im}(\lambda_j ke^{ikh}))|\geq(1+|k|)^{-\omega},\quad j=\overline{1,n}.$$

виконується для всіх (крім, можливо, скінченної кількості) цілих чисел k. З огляду на лему Бореля–Кантеллі [6] для цього досить встановити, що при $\omega > 1$ збігаються ряди $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} \operatorname{mes} M_{j,\omega}(k)$, $j=\overline{1,n}$, де

$$M_{j,\omega}(k) \equiv \Big\{h\in\Omega : |\sin(T\mathrm{Im}(\lambda_j k e^{ikh}))| \le (1+|k|)^{-\omega}\Big\}, \quad j=\overline{1,n}.$$

Нехай $\lambda_j = |\lambda_j| e^{i\eta_j}$, $j=\overline{1,n}$, де η_j — аргумент комплексного числа λ_j. Тоді

$$\mathrm{Im}(\lambda_j e^{ikh}) = |\lambda_j| \sin(kh+\eta_j), \quad j=\overline{1,n}.$$

Розглянемо випадок, коли $k>0$. Очевидно, що

$$\operatorname{mes} M_{j,\omega}(k) = k^{-1}\operatorname{mes}\Big\{H\in(0,2\pi k) : |\sin(T|\lambda_j k|\sin(H+\eta_j))| \le (1+|k|)^{-\omega}\Big\} =$$

$$= k^{-1}\operatorname{mes}\Big\{H\in(\eta_j,\eta_j+2\pi k) : |\sin(T|\lambda_j k\sin H|) \le (1+|k|)^{-\omega}\Big\}.$$

Для заданого $\delta\in(0,\omega-1)$ розіб'ємо відрізок $[\eta_j,\eta_j+2\pi k]$ на такі непродовжувані відрізки I_q $(q=\overline{1,N_1(k)})$ та відрізки J_q $(q=\overline{1,N_2(k)})$, щоб виконувались умови

$$\forall\, H\in I_q \quad |\cos H| \ge \frac{1}{k^{\delta+1}}, \quad q=\overline{1,N_1(k)},$$

$$\forall\, H\in J_q \quad |\cos H| \le \frac{1}{k^{\delta+1}}, \quad q=\overline{1,N_2(k)}.$$

Для кількостей $N_1(k)$, $N_2(k)$ цих відрізків, очевидно, справджуються оцінки

$$N_1(k)\le C_4 k, \quad N_2(k)\le C_5 k.$$

Оскільки

$$\operatorname{mes} J_q \le C_6 k^{-\delta-1}, \quad q=\overline{1,N_2(k)},$$

то $\operatorname{mes}\left(\bigcup_{q=1}^{N_2(k)} J_q\right) \le C_7 k^{-\delta}$. Очевидно, що виконуються оцінки

$$\operatorname{mes}\Big\{H\in I_q : |\sin(T|\lambda_j k|\sin H)| \le (1+|k|)^{-\omega}\Big\} \le$$

$$\le k^{1+\delta}\operatorname{mes}\Big\{t\in\sin(I_q) : |\sin(T|\lambda_j k|t)| \le (1+|k|)^{-\omega}\Big\} \le$$

$$\le k^{1+\delta}\operatorname{mes}\Big\{t\in[-1;1] : |\sin(T|\lambda_j k|t)| \le (1+|k|)^{-\omega}\Big\}.$$

За лемою 2.2 на с. 15 у [6]

$$\operatorname{mes}\Big\{t\in[-1;1] : |\sin(T|\lambda_j k|t)| \le (1+|k|)^{-\omega}\Big\} \le C_8(1+|k|)^{-\omega}.$$

Таким чином, для $k>0$ отримуємо

$$\operatorname{mes} M_{j,\omega}(k) \le C_9 \sum_{q=1}^{N_2(k)} \operatorname{mes}\Big\{H\in I_q : |\sin(T|\lambda_j k|\sin H)| \le (1+|k|)^{-\omega}\Big\} +$$

$$+C_{10}\sum_{q=1}^{N_2(k)} \text{mes } J_q \le C_{11}k^{-1-\delta} + C_{12}k^{\delta-\omega}.$$

Аналогічно розглядається випадок, коли $k < 0$. Таким чином, при $\omega > 1$ отримуємо збіжність рядів $\sum\limits_{|k|>0} \text{mes } M_{j,\omega}(k)$, $j = \overline{1,n}$.

Теорему доведено.

Зауваження 2. Результати роботи перенесено на випадок задачі типу Діріхле для систем рівнянь із частинними похідними із відхиленням аргументу.

Список використаної літератури

1. *Антоневич А.Б.* Линейные функциональные уравнения. Операторный подход.– Минск: Университетское, 1988. – 232 с.
2. *Білусяк Н.І., Пташник Б.Й.* Крайова задача для слабконелінійних гіперболічних рівнянь зі змінними коефіцієнтами // Укр. мат. журн. – 2001. – **53**, № 9. – С. 1281–1286.
3. *Мосолов П.П.* О задаче Дирихле для уравнений в частных производных // Изв. вузов. Математика, 1960, № 3. – С. 213–218.
4. *Мышкис А.Д.* Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. – М.: Наука, 1972. – 352 с.
5. *Мышкис А.Д.* О некоторых проблемах теории уравнений с отклоняющимся аргументом // Успехи мат. наук. – 1977. – Т. 32, вып. 2. – С. 173–202.
6. *Пташник Б.И.* Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. – К.: Наук. думка, 1984. – 264 с.
7. *Пташник Б.Й., Ільків В.С., Кміть І.Я., Поліщук В.М.* Нелокальні крайові задачі для рівнянь із частинними похідними. – К.: Наук. думка, 2002. – 416 с.
8. *Симотюк М.М.* Задача з двома кратними вузлами для лінійних систем рівнянь з частинними похідними, однорідних за порядком диференціювання // Матем. Вісник НТШ. – 2004. – Вип. 1. – С. 130–149.
9. *Хейл Дж.* Теория функционально-дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1984. – 422 с.
10. *Przeworska-Rolewicz D.* Equations with transformed argument an algebraic approach. – Warszawa: PWN, 1973. – 354 p.

Одержано 08.09.2017