

УДК 519.21

Т. В. Боярищева, І. Й. Поляк (ДВНЗ «Ужгородський нац. ун-т»)

ШВИДКІСТЬ ЗБІЖНОСТІ В ЦГТ ДЛЯ ПОСЛІДОВНОСТІ СЕРІЙ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН

The paper containse the estimotes of rate of convergence to the normal law in series scheme.

У роботі містяться оцінки швидкості збіженості до нормального закону у схемі серій.

У роботі [3] одержано досить загальні оцінки швидкості збіженості в ЦГТ в термінах псевдомоментів, пізніше ці результати ввійшли у монографію [2]. Ці результати викликали новий інтерес до різних узагальнень. Зокрема, у роботі [3] результати із [3] узагальнюються на послідовність серій незалежних випадкових величин. Використовуючи ідеї з [1], у даній роботі ми продовжуємо такі дослідження.

Нехай задано послідовність серій випадкових величин $\xi_{n1}, \dots, \xi_{nn}$. При n фіксованому випадкові величини ξ_{ni} незалежні і однаково розподілені, $M\xi_{ni} = 0$; $D\xi_{ni} = \frac{1}{n}$; $F_n(x)$ – функція розподілу ξ_{ni} ; $f_n(t)$ – характеристична функція ξ_{ni} . Позначимо $S_n = \xi_{n1} + \dots + \xi_{nn}$ (тоді $DS_n = 1$), $\Phi_n(x)$ – функція розподілу стандартного нормальногого закону.

Введемо псевдомоменти

$$\begin{aligned}\nu_{n0}(r) &= \int_{-\infty}^{\infty} \max(1, |x|^r) \left| d \left(F_n \left(\frac{x}{\sqrt{n}} \right) - \Phi(x) \right) \right|, \\ \kappa_{n0}(r) &= \int_{-\infty}^{\infty} \max(1, r|x|^{r-1}) \left| \left(F_n \left(\frac{x}{\sqrt{n}} \right) - \Phi(x) \right) \right| dx, \\ \kappa_n(r) &= r \int_{-\infty}^{\infty} |x|^{r-1} \left| F_n \left(\frac{x}{\sqrt{n}} \right) - \Phi(x) \right| dx,\end{aligned}$$

де $r \in (2, 3]$.

Теорема. Для всіх $n \leq 1$ справедливі нерівності

$$\rho_n = \sup_x |\Phi_n(x) - \Phi(x)| \leq C^{(1)} \frac{\nu_{n0}(r)}{n^{\frac{r-2}{2}}}, \quad (1)$$

$$\rho_n \leq C^{(2)} \max \left\{ \frac{\kappa_{n0}(r)}{n^{\frac{r-2}{2}}}, \frac{\kappa_{n0}^{\frac{n}{n+1}}(r)}{\sqrt{n}} \right\}, \quad (2)$$

$$\rho_n \leq C^{(3)} \max \left\{ \frac{\kappa_n(r)}{n^{\frac{r-2}{2}}}, \frac{\kappa_n^{\frac{n}{rn+1}}(r)}{\sqrt{n}} \right\}, \quad (3)$$

де $C^{(1)}, C^{(2)}, C^{(3)}$ – деякі сталі.

Лема 1. Нехай $\omega_n(t) = \left| f_n(t\sqrt{n}) - e^{-\frac{t^2}{2}} \right|$. Для будь-яких $t \in R$ мають місце наступні нерівності:

$$\omega_n(t) \leq \nu_{n0}(r) \min \left(1, \frac{|t|^r}{6^{r-2}} \right), \quad (4)$$

$$\omega_n(t) \leq \kappa_n(r) \frac{2^{5-2r} |t|^r}{r}, \quad (5)$$

$$\omega_n(t) \leq \kappa_{n0}(r) \min \left(|t|, \frac{2^{5-2r} |t|^r}{r} \right). \quad (6)$$

Доведення здійснюється аналогічно до [1], зокрема, при доведенні твердженій (5) і (6) використовується оцінка

$$\begin{aligned} |\omega_n(t)| &= \left| f_n(t\sqrt{n}) - e^{-\frac{t^2}{2}} \right| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} d \left(F_n \left(\frac{x}{\sqrt{n}} \right) - \Phi(x) \right) \right| = \\ &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{itx} - 1 - it - \frac{(itx)^2}{2} \right) d \left(F_n \left(\frac{x}{\sqrt{n}} \right) - \Phi(x) \right) \right| = \\ &= \left| -it \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} \left(F_n \left(\frac{x}{\sqrt{n}} \right) - \Phi(x) \right) dx \right| = \left| -it \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{itx} - 1 - it) \left(F_n \left(\frac{x}{\sqrt{n}} \right) - \Phi(x) \right) dx \right|. \quad (7) \end{aligned}$$

Лема 2. Нехай $c \in (0; e^{-6})$. Нехай для деяких $\theta_n > 0$ і $s \in [0; r]$, де $2 < r \leq 3$, і для будь-якого $t \in R$ виконується умова

$$\omega_n(t) = \left| f_n(t\sqrt{n}) - e^{-\frac{t^2}{2}} \right| \leq \theta_n \min(|t|^s, |t|^r). \quad (8)$$

Якщо $\theta_n \leq c$ і $|t| \leq T_1 = \sqrt{-2 \ln \theta_n}$, то

$$\left| f_n(t\sqrt{n}) \right| \leq e^{-c_1 t^2}, \quad (9)$$

$$\text{де } c_1 = \frac{1}{4} - \sqrt{c}(-2 \ln c)^{\frac{r-2}{2}} > 0.$$

А якщо $\theta_n \leq c$ і $|t| > T_1$, то

$$\left| f_n(t\sqrt{n}) \right| \leq \theta_n (1 + |t|^s). \quad (10)$$

$$\text{Якщо ж } \bar{\theta}_n > c, \text{ то при } |t| \leq T_2 = \left(\frac{c}{\theta_n} \right)^{\frac{1}{r-2}}$$

$$\left| f_n(t\sqrt{n}) \right| \leq e^{-c_2 t^2}, \quad (11)$$

$$\text{де } c_2 = \frac{1}{2} - c\sqrt{e} > 0.$$

Доведення леми 2 міститься у [1].

Лема 3. Нехай виконуються умови леми 2. Тоді для всіх $n \geq 2$

$$\rho_n \leq C \max \left\{ \frac{\theta_n}{n^{\frac{r-2}{2}}}, \frac{\theta_n^p}{\sqrt{n}} \right\},$$

де C – деяка абсолютнона стала, $p = \min \left\{ 1, \frac{n}{sn+1} \right\}$.

Доведення. Використаємо нерівність ([4], стор. 299):

$$\sup_x |F(x) - G(x)| \leq \frac{2}{\pi} \int_0^T |f(t) - g(t)| \frac{dt}{t} + \frac{24}{\pi T} \left| \sup_x G'(x) \right|.$$

Покладемо в даній нерівності

$$F(x) = \Phi_n(x); \quad G(x) = \Phi(x); \quad f(t) = \varphi_n(t); \quad g(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

Тоді

$$\rho_n = \sup_x |\Phi_n(x) - \Phi(x)| \leq \frac{2}{\pi} \int_0^T \left| f_n^n(t) - e^{-\frac{t^2}{2}} \right| \frac{dt}{t} + \frac{24}{\pi \sqrt{2\pi T}}.$$

Зробимо заміну $t = z\sqrt{n}$ в інтегралі правої частини цієї нерівності. Тоді

$$\rho_n \leq \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{T}{\sqrt{n}}} \left| f_n^n(z\sqrt{n}) - e^{-\frac{z^2}{2}n} \right| \frac{dt}{t} + \frac{24}{\pi \sqrt{2\pi T}}. \quad (12)$$

Використавши рівність

$$a^n - b^n = (a - b) \sum_{k=1}^n a^{n-k} \cdot b^{k-1},$$

де у нашому випадку $a = f_n(t\sqrt{n})$, $b = e^{-\frac{t^2}{2}}$, одержимо:

$$\left| f_n^n(t\sqrt{n}) - e^{-\frac{t^2}{2}n} \right| \leq \left| f_n(t\sqrt{n}) - e^{-\frac{t^2}{2}n} \right| \sum_{k=1}^n \left| f_n(t\sqrt{n}) \right|^{n-k} e^{-\frac{t^2}{2}(k-1)} \quad (13)$$

Із умов леми, нерівностей (10) і (11) леми 2 і (13) одержимо: якщо $|t| \leq T_m$ ($m = 1$ при $\theta_n \leq c$ і $m = 2$ при $\theta_n > c$), то

$$\left| f_n^n(t\sqrt{n}) - e^{-\frac{t^2}{2}n} \right| \leq \theta_n |t|^r \sum_{k=1}^n e^{-c_m t^2(n-k)} e^{-\frac{t^2}{2}(k-1)} \leq \theta_n |t|^r n e^{-c_m t^2(n-1)}. \quad (14)$$

Ми врахували, що $c_m \leq \frac{1}{2}$.

Нехай $n \geq 2$, $\theta_n > c$. У (12) покладемо $T = T_2\sqrt{n}$.

Будемо вважати, що

$$\frac{1}{T_2\sqrt{n}} \leq \frac{\theta_n}{n^{\frac{r-2}{2}}}, \quad (15)$$

$$\frac{1}{T_2\sqrt{n}} > \frac{\theta_n}{n^{\frac{r-2}{2}}}, \quad \left(\frac{\theta_n}{c} \right)^{\frac{1}{r-2}} \frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{\theta_n}{n^{\frac{r-2}{2}}}, \quad \frac{(\theta_n)^{\frac{3-r}{r-2}} c^{\frac{-1}{r-2}}}{n^{\frac{3-r}{2}}} > 1$$

і

$$\frac{\theta_n}{n^{\frac{r-2}{2}}} c^{r-3} > 1. \quad (16)$$

Оскільки

$$\rho_n = \sup_x |\Phi_n(x) - \Phi(x)| \leq 1,$$

то із (16) одержимо

$$\rho_n \leq 1 < \frac{\theta_n}{n^{\frac{r-2}{2}}} c^{r-3}$$

і нерівність (1) виконується.

Із (14) для інтеграла у (12) одержуємо ($m = 2$)

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{T_2} \left| f_n^n(z\sqrt{n}) - e^{-\frac{t^2}{2}n} \right| \frac{dt}{t} \leq \int_0^{T_2} \theta_n |t|^r n e^{-c_m t^2(n-1)} \frac{dt}{t} = \theta_n n \int_0^{T_2} t^{r-1} e^{-c_2 t^2(n-1)} dt = \\ &= \theta_n n \frac{1}{2(c_2(n-1))^{\frac{r}{2}}} \int_0^{c_2 T_2^2(n-1)} z^{\frac{r}{2}-1} e^{-z} dz \leq \frac{\theta_n}{n^{\frac{r-2}{2}}} 2^{\frac{r-2}{2}} (c_2)^{-\frac{r}{2}} \Gamma\left(\frac{r}{2}\right). \end{aligned} \quad (17)$$

Тоді із (17), (15) і (12) для $n \geq 2$

$$\rho_n \leq C_3 \frac{\theta_n}{n^{\frac{r-2}{2}}}.$$

Якщо $\theta_1 > c$, то $\rho_1 \leq 1 < \frac{\theta_1}{c}$. У випадку $\theta_n > c$ теорема доведена.

Нехай $\theta_n \leq c$, $n \geq 2$. Покладемо у (17) $T = X\sqrt{n}$, де $X = c(\theta_n)^{-p}$, $p = \min\{1; \frac{1}{sn+1}\}$. Тоді

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{T}{\sqrt{n}}} \left| f_n^n(t\sqrt{n}) - e^{-\frac{t^2}{2}n} \right| \frac{dt}{t} = \\ &= \int_0^{T'} \left| f_n^n(t\sqrt{n}) - e^{-\frac{t^2}{2}n} \right| \frac{dt}{t} + \int_{T'}^X \left| f_n^n(t\sqrt{n}) - e^{-\frac{t^2}{2}n} \right| \frac{dt}{t} = I_1 + I_2, \end{aligned} \quad (18)$$

де $T' = \min(T_1, X)$.

Будемо розглядати випадок $T' = T_1$, бо інакше $I_2 = 0$ і доведення випливає із оцінки інтеграла I_1 .

$$I_1 \leq \frac{\theta_n}{n^{\frac{r-2}{2}}} 2^{\frac{r-2}{2}} (c_2)^{-\frac{r}{2}} \Gamma\left(\frac{r}{2}\right) = C_4 \frac{\theta_n}{n^{\frac{r-2}{2}}}. \quad (19)$$

$$I_2 = \int_{T_1}^X \left| f_n^n(t\sqrt{n}) - e^{-\frac{t^2}{2}n} \right| \frac{dt}{t} \leq \int_{T_1}^X \left| f_n^n(t\sqrt{n}) \right| \frac{dt}{t} + \int_{T_1}^X e^{-\frac{t^2}{2}n} \frac{dt}{t} = I_2' + I_2''. \quad (20)$$

Із (10) (враховуючи, що $T_1 \geq \sqrt{12}$)

$$I_2' \leq (\theta_n)^n \int_{T_1}^X (1 + |t|^s)^n \frac{dt}{t} \leq (2\theta_n)^n \int_{T_1}^X t^{sn-1} dt.$$

У випадку $s \geq \frac{1}{3}$

$$I'_2 \leq (2\theta_n)^n \frac{X^{sn}}{sn} \leq \frac{3}{n} (\theta_n)^{(1-sp)n} (2c_1)^n \leq C_5 \frac{(\theta_n)^p}{\sqrt{n}}. \quad (21)$$

Якщо $n \geq 2$ і $s < \frac{1}{3}$, то $p = 1$, крім того $n - 1 - sn - \frac{1}{3} > 0$. Тоді

$$\begin{aligned} I'_2 &\leq (2\theta_n)^n \int_{T_1}^X t^{sn-1} dt = (2\theta_n)^n \int_{T_1}^X t^{sn-\frac{2}{3}} \frac{dt}{\sqrt[3]{t}} \leq \frac{(2\theta_n)^n}{\sqrt[3]{T_1 (sn + \frac{1}{3})}} X^{sn+\frac{1}{3}} \leq \\ &\leq \theta_n \frac{2^n 3}{\sqrt[6]{12}} (\theta_n)^{n-1-sn-\frac{1}{3}} c^{sn+\frac{1}{3}} \leq \frac{\theta_n}{n^{\frac{r-2}{2}}} \frac{3}{c \sqrt[6]{12}} n^{\frac{r-2}{2}} (2c)^n \leq C_6 \frac{\theta_n}{n^{\frac{r-2}{2}}}. \end{aligned} \quad (22)$$

Залишилось оцінити I''_2 :

$$I''_2 = \int_{T_1 \sqrt{n}}^{X \sqrt{n}} e^{-\frac{t^2}{2}} \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{(T_1 \sqrt{n})^2} e^{-\frac{(T_1 \sqrt{n})^2}{2}} \leq \frac{(\theta_n)^n}{12n} \leq \frac{\theta_n}{\sqrt{n}} \frac{c}{12\sqrt{2}}. \quad (23)$$

Із (7), (18)–(23) випливає, що у випадку $\theta_n \leq c$, $n \geq 2$ лема доведена.

Нехай $n = 1$, $\theta_1 \leq c$, $s > 0$. Тоді із (7) і умов леми

$$\begin{aligned} \rho_1 &\leq \frac{2}{\pi} \int_0^X \left| f_1(z) - e^{-\frac{z^2}{2}} \right| \frac{dt}{t} + \frac{24}{\pi \sqrt{2\pi} X} \leq \frac{2}{\pi} \theta_1 \int_0^X t^{s-1} dt + \frac{24(\theta_1)^p}{\pi \sqrt{2\pi} c} = \\ &= \frac{2}{\pi} \frac{(\theta_1)^{1-sp} c^s}{s} + \frac{24(\theta_1)^p}{\pi \sqrt{2\pi} c} \leq C_7 \left(1 + \frac{1}{s} \right) (\theta_1)^{\frac{1}{s+1}}. \end{aligned}$$

Лема доведена.

Доведення теореми. Використовуємо лему 1. Покладемо у лемі 3 $\theta_n = \kappa_n(r)$, $s = r$. Тоді

$$\rho_n \leq C^{(3)} \max \left\{ \frac{\kappa_n(r)}{n^{\frac{r-2}{2}}}; \frac{(\kappa_n(r))^{\frac{n}{rn+1}}}{\sqrt{n}} \right\}.$$

Покладемо у лемі 3 $\theta_n = \kappa_{n0}(r)$, $s = 1$. Тоді одержимо

$$\rho_n \leq C^{(2)} \max \left\{ \frac{\kappa_{n0}(r)}{n^{\frac{r-2}{2}}}; \frac{(\kappa_{n0}(r))^{\frac{n}{n+1}}}{\sqrt{n}} \right\}.$$

Покладемо у лемі 3 $\theta_n = \nu_{n0}(r)$, $s = 0$. Тоді для всіх $n \geq 2$

$$\rho_n \leq C^{(1)} \frac{\nu_{n0}(r)}{n^{\frac{r-2}{2}}} \text{ і } \rho_1 \leq \nu_{10}(r).$$

Теорема доведена.

Список використаної літератури

1. Zolotarev V. M. Exactness of an approximation in the central limit theorem // Proceedings of the Second Japan – USSR Symposium on Probability Theory. – Berlin: Springer-Verlag, 1973. – Р. 531–543.
2. Золотарев В. М. Современная теория суммирования независимых случайных величин. – М.: Наука, 1986. – 416 с.
3. Боярищева Т. В., Далекорей М. В., Михасюк М. М., Поляк І. Й., Слюсарчук П. В. Деякі узагальнення оцінок Золотарєва для послідовності серій // Науковий вісник Ужгородського ун-ту. Сер. матем. і інформ. – Ужгород, 2017. – Вип. № 1 (30). – С. 32–42.
4. Боярищева Т. В., Слюсарчук П. В. Оцінка швидкості збіжності в центральній граничній теоремі для різно розподілених величин // Науковий вісник Ужгородського ун-ту. Сер. матем. – Ужгород, 1999. – Вип. 4. – С. 12–16.
5. Лоэв М. Теория вероятностей. – М.: Изд–во иностр. лит., 1962. – 720 с.

Одержано 12.07.2017