УДК 512.84

О. А. Кирилюк (ДВНЗ «Ужгородський нац. ун-т»)

МІНІМАЛЬНІ НЕЗВІДНІ РОЗВ'ЯЗНІ ПІДГРУПИ ГРУПИ $GL(q,\mathbb{Z}_p)$

All minimal irreducible solvable subgroups of the group $GL(q,\mathbb{Z}_p)$ (q is a prime, $\mathbb{Z}_p$ is the ring of rational p-adic integers) are described up to conjugation for $p>2$.

Описуються з точністю до спряженості мінімальні незвідні розв'язні підгрупи групи $GL(q,\mathbb{Z}_p)$ (q — просте число, $\mathbb{Z}_p$ – кільце цілих раціональних p-адичних чисел) для $p>2$.

В [1] класифіковано мінімальні незвідні розв'язні підгрупи групи $GL(q,F)$ для довільного поля F. В [2] на основі результатів [1] методами теорії цілочислових P-адичних зображень скінченних груп вивчалися мінімальні незвідні підгрупи повної лінійної групи над кільцем цілих P-адичних чисел. В даній роботі вивчаються з точністю до спряженості мінімальні незвідні розв'язні підгрупи групи $GL(q,\mathbb{Z}_p)$, де q — просте число, а $\mathbb{Z}_p$ — кільце цілих раціональних p-адичних чисел, а при $p>2$ одержана їх повна класифікація.

Позначимо через M_p множину класів спряжених мінімальних незвідних розв'язних підгруп групи $GL(q,Q_p)$, де Q_p — поле раціональних p-адичних чисел.

Слідуючи [1], розглянемо наступні серії підгруп групи $GL(q,Q_p)$.

Абелеві групи з M_p.

Нехай P_q – силовська q-підгрупа групи Q_p^*.

Теорема 1. *В групі $GL(q,Q_p)$ існують абелеві незвідні мінімальні підгрупи тоді і тільки тоді, коли виконується одна з умов:*

1) $|P_q|=q^m$ $(0<m<\infty)$, $P_q=\langle\delta\rangle$;

2) *існує просте $r>q$ таке, що $(Q_p(\varepsilon):Q_p)=q$, де ε – первісний корінь степеня r з 1.*

У першому випадку M_p містить групу $H_{q^{m+1}}=\left\langle\begin{pmatrix}0 & \delta\\ E_{q-1} & 0\end{pmatrix}\right\rangle$, а у другому випадку — $H_{q,r}=\left\langle\begin{pmatrix}0 & \cdots & \beta_0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ E_{q-1} & \cdots & \beta_{q-1}\end{pmatrix}\right\rangle$, де β_i — коефіцієнти незвідного над Q_p полінома $f(x)=-\beta_0-\beta_1x-\beta_{q-1}x^{q-1}+x^q$, що є дільником полінома x^r-1.

Неабелеві групи з M_p.

Теорема 2. *Кожна неабелева група із M_p є мономільною та є або біпримарною, або p-групою.*

Серія біпримарних груп

Нехай $\delta\in Q_p^*$, $\delta^{q^{l-1}}=1$, $l=1,2,\ldots,m$, якщо $|P_q|=q^m$ $(m>0)$. Покладемо

$$h_l=\begin{pmatrix}0 & \cdots & \delta\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ E_{q-1} & \cdots & 0\end{pmatrix}\in GL(q,Q_p).$$

Нехай Π' — множина таких простих чисел p_i, для яких $P_{p_i} \neq \langle 1 \rangle$, $p_i \in \Pi$, $q_1 \neq q$, $p_i \neq charF_p$, $q_1 \equiv t(\text{mod } q)$. Тоді над полем Галуа $GF(q_1)$ має місце розклад полінома ділення круга $\Phi_q(x)$ на незвідні над $GF(p_i)$ поліноми

$$\Phi_q(x) = \varphi_1(x) \dots \varphi_s(x), \ \deg \varphi_j(x) = t, \ j = 1, 2, \dots, s, \ s = \frac{q-1}{t}.$$

Нехай $\frac{x^{q-1}}{\varphi_j(x)} = \lambda_0^{(j)} + \lambda_1^{(j)}(x) + \dots + \lambda_{q-1}^{(j)} x^{q-1}$. Покладемо

$$d = d_0^{(j)} = diag\left[\eta^{\lambda_0^{(j)}}, \dots, \eta^{\lambda_{q-1}^{(j)}} 1, \dots, 1\right], \ \eta^{q_1} = 1,$$

$$H_{l,q_1,j} = \left\langle h, d_0^{(j)} \right\rangle, \text{ коли } l = 1 \text{ та } j = 1, \dots, s, \text{ коли } l > 1.$$

Позначимо $d_k^{(j)} = h_l^{-k} d_0^{(j)} h_l^k, \Delta^{(j)} = \left\langle d_0^{(j)} \right\rangle \times \dots \times \left\langle d_{l-1}^{(j)} \right\rangle$, $k = 1, \dots, t-1$. Тоді $H_{l,q_1,j} = \Delta^{(j)} \leftthreetimes \langle h_j \rangle$, $|H_{l,q_1,j}| = p^l q_1^t$.

Серія q-груп ($q > 2$)

Нехай $\varepsilon \in Q_p^*$, $\varepsilon^q = 1$. Позначимо $a = diag\,[1, \varepsilon, \dots, \varepsilon^{q-1}]$, $H_{q^l,q} = \langle h^l, a \rangle$. Тоді $H_{q^l,q} = \langle a \rangle \leftthreetimes \langle h^l \rangle$, $|H_{q^i,q}| = q^{l+1}$, $i = 1, \dots, m-1$.

Нехай далі $p > 2$ і

$$p - 1 = q^n \cdot p_1^{n_1} \cdots p_s^{n_s} \qquad (1)$$

— розклад числа $p-1$, де $p_1, p_2, \dots, p_s$ — всі різні, відмінні від q прості дільники числа $p-1$, $n \geq 0$, $n_i > 0$, $(i = 1, \dots, s)$.

Позначимо через Π' множину всіх таких простих чисел $r > q$, для яких $(Q_p(\varepsilon) : Q_p) = q$ (ε – первісний корінь степеня r з 1). Зберігаючи попередні позначення, розглянемо множину L_q представників класів спряжених мінімальних незвідних розв'язних підгруп M_q групи $GL(q, Q_p)$. З [1] та будови поля Q_p випливає наступний опис множини L_q.

I. Якщо $p, q > 2$, то покладемо $L_q = \{H_{l,p_i,j}\} \cup \{H_{q^l,q}\} \cup \{H_{q^{n+1}}\} \cup \{H_{q,r}\}$ при $n > 0$ і $L_q = \{H_{l,p_i,1}\} \cup \{H_{q,r}\}$ при $n = 0$ ($i = 1, \dots, s$; $l = 0, 1, \dots, n-1$ при $n > 0$ і $l = 1$ при $n = 0$; $r \in \Pi'$);

II. Якщо $q > 2$, $p = 2$, то покладемо $L_q = \{H_{1,2,1}\} \cup \{H_{q,r}\}$ $(r \in \Pi')$;

III. Якщо $q = 2$, $p > 3$, то покладемо при $s > 0$

$$L_2 = \{H_{l,p_i,j}\} \cup \{H_{2^2,2^k}\} \cup \{H_{2^{n+1}}\} \cup \{H_{2,r}\} \text{ при } n > 2 \text{ і}$$

$$L_2 = \{H_{1,p_i,1}\} \cup \{H_{2^{1+1}}\} \cup \{H_{2,r}\} \text{ при } n = 1 (k = 0, 1, \dots),$$

і $L_2 = \{H_2^2, 2^k\} \cup \{H_{2^{n+1}}\}$ при $n \geq 2$, $s = 0$ і $L_2 = \{H_{2^{1+1}}\} \cup \{H_{2,r}\}$ при $n = 1$, $s = 0$, $k = 0, 1, \dots, n$ при $|P_2| = 2^n$;

IV. Якщо $q = 2$, $p = 2, 3$, то покладемо $L_2 = \{H_{2^{1+1}}\} \cup \{H_{2,3}\}$.

Звідси і з теореми 1 випливає наступне твердження.

Твердження 1. 1)*Кожна мінімальна незвідна розв'язна підгрупа H групи $GL(q, Q_p)$ є циклічною тоді і тільки тоді, коли $q = 2$ і $p = 2, 3$. 2) Нехай $q \neq 2$ і $p \neq 2, 3$ при $q = 2$. Тоді довільна неабелева мінімальна незвідна розв'язна підгрупа групи $GL(q, Q_p)$ є групою Міллера–Морено і спряжена в $GL(q, Q_p)$ з однією і тільки однією групою з множини L_q.*

Наслідок 1. *Ненільпотентна група G тоді і тільки тоді буде групою Міллера–Морено, коли вона ізоморфна мінімальній незвідній лінійній групі простого степеня над полем Q_p при підходящому p.*

Доведення. Нехай G – ненільпотентна група Міллера–Морено. Тоді $|G| = q^l \cdot p_1^m$, де $q \neq p_1$; q, p_1 — прості числа; m — показник, якому належить p_1 за модулем q, $l > 1$; p_1-підгрупа групи G_{p_1} Силова групи G є нормальною в G і є прямим добутком m групи порядку p_1, q-підгрупа Силова G_q групи G є циклічною, а порядок центра групи G дорівнює q^{l-1}. Таким чином

$$G = G_{p_1} \times G_q,\ G_q = \langle u \rangle,\ u^{q^l} = 1 \text{ і } G_{p_1} = \langle \nu_0 \rangle \times \cdots \times \langle \nu_{m-1} \rangle,\ \nu_i^{p_1} = 1\ (i = 0, \ldots, m-1).$$

Очевидно $G_{p_1} = \langle u, \nu_0 \rangle$, а елементи $\nu_0, \nu_1, \ldots, \nu_{m-1}$ можна вибрати так, що

$$u^{-1}\nu_0 u = u_1, u^{-1}\nu_1 u_2 = \nu_2, \ldots, u^{-1}\nu_{m-2}u = \nu_{m-1}, u^{-1}\nu_{m-1}u = \nu_0^{\alpha_0}\nu_1^{\alpha_2}\cdots\nu_{m-1}^{\alpha_{m-1}}, \quad (2)$$

де $\varphi(x) = -\alpha_0 - \alpha_1 x - \cdots - \alpha_{m-1}x^{m-1} + x^m$ — незвідний над полем $GF(p_1)$ дільник полінома ділення круга $\Phi_q(x)$. Оскільки m — показник числа p_1 за модулем q, то над полем $GF(p_1)$ має місце розклад $\Phi_q(x) = \varphi_1(x) \ldots \varphi_\nu(x)$, де $\varphi_j(x)$ — незвідний над $GF(p_1)$ поліном $(j = 1, \ldots, \nu)$, $\nu = \frac{p_1-1}{m}$. Замінюючи у (2) u на u^k $((k, q) = 1)$ у якості $\varphi(x)$ можна одержати кожен поліном $\varphi_j(x)$. Звідси і з (2) випливає, що трійка чисел l, q, j визначають єдину групу Міллера–Морено порядку $q^l \cdot p_1^m$.

Розглянемо арифметичну прогресію $\left\{1 + q^l \cdot p_1 k\right\}$ $(k = 1, 2, \ldots)$. За теоремою Діріхле серед членів цієї прогресії міститься нескінченне число простих чисел. Нехай $p = q^l \cdot p_1 k_0 + 1$ — одне з них. Тоді група Q_p^* містить елемент δ порядку q^{l-1} і елемент η порядку p_1. Побудуємо групу $H_{l,q,j} = \langle h_l, d_j \rangle$, де

$$h_l = \begin{pmatrix} 0 & \delta \\ E & 0 \end{pmatrix}, \quad d_j = diag\left[\eta^{\lambda_0}, \ldots, \eta^{\lambda_{m-1}}, \ldots, 1\right]$$

— матриці порядку q. Згідно з [1] $H_{l,q,j}$ — мінімальна незвідна розв'язна підгрупа групи $GL(q, Q_p)$, що задовольняє умовам (2). Отже, $H_{l,q,j}$ — група Міллера-Морено порядку $q^l \cdot p_1^m$. Наслідок доведено.

Позначимо тепер через M_q і M_q' — множини всіх мінімальних незвідних розв'язних підгруп груп $GL(q, Q_p)$ і $GL(q, Z_p)$ відповідно, а через L_q і L_q' — підмножини представників класів спряжених підгруп з M_q і M_q'.

Будемо вважати тепер, що $p \neq 2$. Розглянемо окремо $q \neq p$ і $q = p$.

Теорема 3. *Мінімальні незвідні підгрупи групи $GL(q, \mathbb{Z}_p)$ при $q \neq p$ і $p > 2$ з точністю до спряженості вичерпуються групами:*

1) $H_{l,p_i,j}$; $H_{q^l,q}$; $H_{q^{n+1}}$; $H_{q,r}$ *при* $q > 2$ *і* $n > 0$;

2) $H_{l,p_i,1}$; $H_{q,r}$ *при* $q > 2$ *і* $n = 0$ $s > 0$; $H_{q,r}$ *при* $s = 0$;

3) $H_{l,p_i,j}$; $H_{2^2,2^k}$; $H_{2^{n+1}}$; $H_{2,r}$ *при* $q=2$ *і* $n \geq 2$ $s>0$; $H_{2^2,2^k}$; $H_{2^{n+1}}$; $H_{2,r}$ *при* $s=0$;

4) $H_{l,p_i,1}$; $H_{2^{1+1}}$; $H_{2,r}$ *при* $q = 2$ *і* $n = 1$ $s > 0$; $H_{2^{1+1}}$; $H_{2,r}$ *при* $s = 0$;

5) $H_{2^{1+1}}$; $H_{2,3}$ *при* $q = 2$ *і* $p = 3$.

Доведення. Нехай $q \neq p$ і $p > 2$. Тоді з описання множини M_q' випливає, що довільна неабелева група з M_q є p'-підгрупою. Звідси та із того, що $M_q' \subseteq M_q$ випливає, що $L_q' = L_q$.

Нехай тепер G — абелева група. Тоді з опису множини L_q випливає, що $G \cong H_{q^{n+1}}$ або $H \cong H_{q,r}$ $(r \in \Pi')$. Оскільки циклічна група $G_n = \langle a \rangle$ порядку p має точні незвідні $\mathbb{Z}_p$-зображення степеня q тоді і тільки тоді, коли $q = 2$; $p = 3$, то у всіх інших випадках $r \neq p$ і G — p'-підгрупа групи $GL(q, \mathbb{Z}_p)$ і $L'_q = L_q$. Якщо G — абелева мінімальна незвідна розв'язна підгрупа групи $GL(2, \mathbb{Z}_3)$ типу $H_{2,3}$, то G спряжена в $GL(2, \mathbb{Z}_3)$ з $H_{2,3}$. Звідси $L'_2 = L_2$ при $p = 3$. Теорема доведена.

Нехай тепер $q = p$; $p > 2$. Враховуючи зв'язок між спряженістю скінченних підгруп групи $GL(p, \mathbb{Z}_p)$ і підгруп групи $GL(p, Q_p)$ (див. [2]) і описання множини L'_q, в цьому випадку одержимо, що з точністю до ізоморфізму нециклічні мінімальні незвідні розв'язні підгрупи групи $GL(p, \mathbb{Z}_p)$ вичерпуються біпримарними групами Міллера-Морено G_j порядків

$$|G_j| = p \cdot p_j^{m_j} \ \ (j = 1, \ldots, s). \tag{3}$$

Тоді з (1) випливає, що $p - 1 = p_j^{m_j} \ldots p_s^{m_s}$ і класифікація випливає з описання множини L_q.

Доведемо кілька лем для групи $GL(p, Z_p)$, аналогічних лемам з [1].

Лема 1. *Нехай $H \in M'_p$ неабелева група. Тоді H мономільна.*

Доведення. Нехай неабелева група з M'_p. Тоді $H \cong G_j$ для деякого j, $1 \leq j \leq s$ і $H = B_j \leftthreetimes G$, де $G = \langle C \rangle$, а $_j = \langle b_j \rangle \cdots \langle b_{m_j - 1} \rangle$. Якщо H імпримітивна, то H мономіальна, оскільки p — просте число. Припустимо, що H є примітивною групою. B_j є нормальною підгрупою групи H і, в силу теореми Кліфорда, є цілком звідною і над Z_p. За наслідком з цієї теореми незвідні частини H попарно еквівалентні над кільцем Z_p. Так як степінь незвідної частини групи H дорівнює 1, то H — група скалярних матриць і тому є абелевою. Суперечність.Отже, H — мономіальна. Лему доведено.

Лема 2. *Нехай H — абсолютно незвідна мономіальна розв'язна підгрупа групи $GL(p, Z_p)$, S_p — симетрична група степеня p, V — Z_p-модуль розмірності p і*

$$V = W_0 \oplus W_1 \oplus \cdots \oplus W_{p-1} \tag{4}$$

— розклад модуля V на системи імпримітивності групи H, а

$$f : H \to S_p \tag{5}$$

— гомоморфізм, визначений розкладом (4). *Тоді в $Kerf$ є нескалярна матриця.*

Доведення. Нехай $h \in H$. Оскільки H імпримітивна, то $h(W_j) = W_j (i, j = 0, 1, \ldots, p-1)$ і h визначає підстановку $\overline{h}$ множини $0, 1, \ldots, p-1$, таку що $\overline{h}(i) = j$. Нехай $f : H \to S_p$ — гомоморфізм, визначений розкладом (4). Тоді $\Gamma = Imf$ — транзитивна підгрупа групи S_n. Тому $|\Gamma| \leq |\Gamma_p|$, де Γ_p — максимальна транзитивна розв'язна підгрупа групи S_p і $|\Gamma_p| = p(p-1)$. Звідси $|Imf| \leq p(p-1)$. Нехай всі матриці з $Kerf$ скалярні. Тоді кожна лінійно незалежна над $\mathbb{Z}_p$ система елементів з H містить не більше $p(p-1)$ елементів, але група H, що розглядається як підгрупа групи $GL(p, \mathbb{Z}_p)$ є абсолютно незвідною тоді і тільки тоді, коли в ній знайдеться p^2 лінійно незалежних елементів. Одержана суперечність доводить лему.

Лема 3. *Нехай H — мономіальна підгрупа групи $GL(p, \mathbb{Z}_p)$ і в $Kerf$ є нескалярна матриця, а група Imf є транзитивною. Тоді H є абсолютно незвідною групою.*

Доведення. Із транзитивності Imf випливає, що знайдеться елемент $\overline{h} \in Imf$ порядку p. Тоді, при підходящій нумерації підпросторів з (4), можна вибрати такий базис $u_0, u_1, \ldots, u_{p-1}$ простору V, що для елемента $h = f^{-1}\left(\overline{h}\right)$ виконується умова

$$h(u_0)=u_1, h(u_1)=u_2,\ldots, h(u_{p-2})=u_{p-1}, h(u_{p-1})=u_2 (u_i \in W_i, i=0,1,\ldots,p-1). \quad (6)$$

За припущенням, в $Kerf$ є така нескалярна матриця d, що

$$d(u_j) = \delta_i u_j \ (j = 0, 1, \ldots, p-1), \quad (7)$$

де $\delta_j \in Z_p^*$, $\delta_\nu \neq \delta_{\nu-1}$ при деякому ν.

Розглянемо елемент

$$d_\nu = h^{-\nu} d h^\nu \ \ (\nu = 0, 1, \ldots, p-1). \quad (8)$$

Із (6)–(8) одержуємо, що

$$\left.\begin{array}{l} d_0 = d = diag\left[\delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_{p-1}\right], \\ d_1 = diag\left[\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_0\right]. \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ d_{p-1} = diag\left[\delta_{p-1}, \delta_0, \ldots, \delta_{p-2}\right]. \end{array}\right\} \quad (9)$$

Розглянемо групу $H_1 = D \leftthreetimes \langle h \rangle$, де $D = \langle d_0 \rangle \cdots \langle d_{p-1} \rangle$. З [1] випливає, що група H_1, що розглядається як підгрупа групи $GL(p, Q_p)$, є абсолютно незвідною. З очевидного включення $H_1 \subseteq H$ одержимо, що H абсолютно незвідна. Так як $H \subseteq GL(p, \mathbb{Z}_p)$, то H — абсолютно незвідна підгрупа групи $GL(p, \mathbb{Z}_p)$. Лему доведено.

Лема 4. *Неабелева група $H \in M'_p$ породжується матрицями h і d, де d — довільна нескалярна матриця з $Kerf$, а h можна вибрати так, що*

$$h = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ E & 0 \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Доведення. Оскільки H є абсолютно незвідною, то знайдеться матриця $h \in H$, така що $f(h)$ має порядок p при підходящій нумерації підпросторів з (4), а h має вигляд (10). Очевидно підгрупа $\langle h \rangle \subseteq H$ є звідною над кільцем Z_p. Згідно з лемою 2 в $Kerf$ є нескалярна матриця d вигляду (7). Звідси група H містить абсолютно незвідну підгрупу $H_l = D \leftthreetimes \langle h \rangle$, а оскільки H мінімальна незвідна підгрупа групи $GL(p, \mathbb{Z}_p)$, то $H_1 = H$. Лему доведено.

Лема 5. *Матрицю d можна вибрати так, що $d^{p_i} = E$ для деякого простого $p_i | (p-1)$ $(1 \leq i \leq s)$ і*

$$d = \left[\eta^{\lambda_0}, \eta^{\lambda_1}, \ldots, \eta^{\lambda_{p-1}}\right], \quad (11)$$

де елемент η має порядок p_i в полі Q_p, $\lambda_j \in GF(p_i)$ $(j = 0, 1, \ldots, p-1)$.

Доведення. З леми 4 випливає, що $H = D \leftthreetimes \langle h \rangle$, де $h^p = E$, $D = \langle d_0 \rangle \cdots \langle d_{p-1} \rangle$ і $H = \langle h, d_0 \rangle$. В силу (3) $|H| = p \cdot p_i^{m_i}$, звідки $|D| = p_i^{m_i}$, $D \cong \langle b_0 \rangle \cdots \langle b_{m_i-1} \rangle$. Тому знайдуться такі елементи $d'_0, \ldots, d'_{m_i-1} \in D$, що $D \cong \langle d'_0 \rangle \cdots \langle d'_{m_i-1} \rangle$. Оскільки $b_0^{m_i} = 1$, то $(d'_0)^{p_i} = d^{p_1} = E$, а так як $G_{i_0} = \langle h, b_0 \rangle$, то $G_{i_0} = H$. Якщо в якості d взяти матрицю d'_0, то одержимо необхідне. Лему доведено.

Лема 6. *$detd = 1$, тобто $\lambda_0 + \lambda_1 + \cdots + \lambda_{p-1} = 0$.*

Доведення. Нехай $H = \langle h, d \rangle$, де h має вигляд (10), d — вигляд (11). Якщо розглядати H як підгрупу групи $GL(p, \mathbb{Z}_p)$, то, в силу [1], $detd = 1$, звідки випливає твердження леми.

Теорема 4. 1) *Абелеві мінімальні незвідні підгрупи групи $GL(p, \mathbb{Z}_p)$ $(p > 2)$ з точністю до спряженості вичерпуються групами $H_{p,r}$, де r пробігає множину Π'.* 2) *Неабелеві мінімальні незвідні розв'язні підгрупи групи $GL(p, \mathbb{Z}_p)$ при $p > 2$ з точністю до спряженості вичерпуються групами $H_i = \langle h, d \rangle$ порядків $|H| = p \cdot p_i^{m_i}$ $(i = 1, \ldots, s)$, де h має вигляд (10), а d_i — вигляд (11), η — елемент порядку p_i групи $\mathbb{Z}_p^*$ (p_i пробігає різні прості дільники числа $p - 1$, m_i — показник, якому належить p_i за модулем h).*

Доведення. 1) Нехай $G \subset M'_r$ абелева. Тоді з опису множини L'_r випливає, що $G \cong H_{q,r}$ $(r \in \Pi')$. Так як група $C_p = \langle a \rangle$ порядку p не має точних незвідних $\mathbb{Z}_p$-зображень степеня p, то G є p'-групою. Тому дві абелеві групи спряжені в групі $GL(p, \mathbb{Z}_p)$ тоді і тільки, коли вони спряжені в групі $GL(p, Q_p)$ і тому група G спряжена в $GL(p, \mathbb{Z}_p)$ групою $H_{p,r}$.

Доведемо 2). За лемою 6 $detd_i = 1$.

Нехай $G_1 = \langle h, c_0 \rangle$, $G_2 = \langle h, d_0 \rangle$, де c_0 і d_0 — матриці виду (11) і покажемо, що G_1 і G_2 спряжені в групі $GL(p, \mathbb{Z}_p)$.

Нехай $\nu_0, \nu_1, \ldots, \nu_{p-1}$ — $\mathbb{Z}_p$-базис p-вимірного $\mathbb{Z}_p$-модуля V. Тоді

$$h(\nu_0) = \nu_1, \ldots, h(\nu_{p-2}) = \nu_{p-1}, \;\; h(\nu_{p-1}) = \nu_0.$$

Якщо покласти $c_0 = diag\left[\eta^{\lambda_0}, \ldots, \eta^{\lambda_{p-1}}\right] d_0 = diag\left[\eta^{\mu_0}, \ldots, \eta^{\mu_{p-1}}\right]$, то в силу (3) можна вважати, що $\mu_j = \lambda_{sj}$, де j, sj суть елементи поля $GF(p)$ і $s \neq 0$. Розглянемо елемент $t \in GL(p, \mathbb{Z}_p)$, такий що $t(\nu_j) = \nu_{js}$ $(j = 0, 1, \ldots, p-1)$ і t є мономіальною матрицею і тому $dett = \pm 1$ і $t \in GL(p, \mathbb{Z}_p)$. Тоді

$$t^{-1} d_0 t(\nu_j) = t^{-1} d_0(\nu_{js}) = t^{-1}(\eta^{\lambda_{js}} \nu_{js}) = \eta^{\mu_j} \nu_j.$$

Таким чином, $t^{-1} d_0 t = c_0$. Легко бачити, що також $t^{-1} h t = h^{s^{-1}}$, звідки $t^{-1} G_1 t = G_2$. Звідси і з лем 1–6 одержуємо необхідне. Теорему доведено.

Нехай тепер $p = 2$. Має місце наступна теорема.

Теорема 5. 1) *Нехай $\psi(q)$ – число класів спряжених мінімальних незвідних розв'язних підгруп групи $GL(q, \mathbb{Z}_2)$, n – показник, якому належить 2 за модулем q. Тоді $\psi(q) \geq 2^{s+1} - 1$, де $s = \frac{q-1}{m}$.*

2) *Якщо 2 є первісним коренем за модулем q, то мінімальні незвідні розв'язні підгрупи групи $GL(q, \mathbb{Z}_2)$ з точністю до спряженості вичерпуються гру-*

пами

$$W_0 = \left\langle \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle,$$

$$W_1 = \left\langle \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \right\rangle,$$

$$W_2 = \left\langle \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & 0 & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Доведення теореми не відрізняється від доведень аналогічного результату для групи $GL(q, \mathbb{Z})$ (див. [4, 5]).

Список використаної літератури

1. *Юферев В. П.* Классификация минимальных неприводимых разрешимых подгрупп простой степени // Изв. АН БССР. Серия физ.-матем.наук. – М.: Наука, 1974. – № 2. – С. 5–10.
2. *Гудивок П. М., Кирилюк А. А.* О минимальных неприводимых подгруппах полной линейной группы над кольцои P-адических чисел // Науковий вісник Ужгородського ун-ту. Сер. матем. і інформ. – Ужгород, 2002. – Вип. № 7. – С. 37–43.
3. *Кирилюк А. А.* О конечных неприводимых p-подгруппах $GL(q, \mathbb{R}_p)$ // Науковий вісник Ужгородського ун-ту. Сер. матем. і інформ. – Ужгород, 2003. – Вип. № 8. – С. 63–69.
4. *Кирилюк А. А., Рудько В. П.* О конечных неприводимых разрешимых подгруппах $GL(p, \mathbb{Z})$ // Докл. АН УССР. Серия А. – К., 1980. – № 8. – С. 16–20.
5. *Гудивок П. М., Кирилюк А. А., Рудько В. П., Циткин А. И.,* О конечных подгруппах группы $GL(n, \mathbb{Z})$ // Кибернетика. – 1982. – № 6. – С. 71–82.

Одержано 03.03.2018