УДК 512.53+512.64

В. М. Бондаренко, Я. В. Заціха (Ін-т математики НАН України)

КАНОНІЧНІ ФОРМИ МАТРИЧНИХ ЗОБРАЖЕНЬ НАПІВГРУП МАЛОГО ПОРЯДКУ

We describe canonical forms of the matrix representations of semigroups of the third order over an arbitrary field and indicate criteria on representation type.

Ми описуємо канонічні форми матричних зображень напівгруп третього порядку над довільним полем та вказуємо критерії про зображувальний тип.

Матричні зображення скінченних напівгруп над полями вивчені не так добре, як скінченних груп (зокрема, для груп, на відміну від напівгруп, отримано критерій ручності [1]). Найбільша кількість робіт присвячена вивченню незвідних зображень. Що стосується опису нерозкладних зображень напівгруп, то слід виділити деякі окремі результати про цілком прості напівгрупи [2] та напівгрупи всіх перетворень скінченної множини [3, 4] (у випадку скінченного зображувального типу) і для напівгруп Рісса [5–7] та напівгруп, породжених ідемпотентами з частковим нульовим множенням [8–10] (як у випадку скінченного типу, так і ручного нескінченного типу). Опис зображень мономіальної алгебри $\langle a, b \,|\, ab = ba = 0\rangle$ [3, 4] та мономіальної алгебри $\langle a, b \,|\, a^2 = b^2 = 0\rangle$ [5, 6] також природно розглядати як результати про зображення напівгруп.

Ця стаття присвячена знаходженню канонічних форм матричних зображень над довільним полем для напівгруп третього порядку.

1. Напівгрупи третього порядку. Напівгрупи порядку $n < 4$ вивчені досить детально. Випадки $n = 1, 2$ тривіальні. Напівгрупи порядку $n = 3$ описав Т. Тамура, у вигляді таблиць Келі, ще в 1953 р. (див. роботу [15]). Вони вивчалися, зокрема, в [16–18]. Зауважимо, що під описом традиційно мається на увазі опис з точністю до ізоморфізму та дуальності (дуальною до напівгрупи називається та ж сама множина з операцією множення $x \circ y = yx$). Напівгрупи, що розглядаються з такою точністю, називаються *різними*.

У роботі [18] (див. також [16]) за допомогою перетворень таблиць Келі виділено мінімальні системи твірних для кожної з 18 різних напівгруп третього порядку. Із явного вигляду заключних таблиць легко виписати визначальні співвідношення для виділених систем твірних. Випишемо ці мінімальні системи твірних (в кутових дужках) та відповідні визначальні співвідношення для комутативних напівгруп (в перших круглих дужках приведено номер напівгрупи при загальній нумерації, вказаній в [18], в других круглих дужках вказано всі елементи напівгрупи).

Комутативні напівгрупи:

1) (1) $(0, b, c) = \langle b, c\rangle$: $b^2 = 0$, $c^2 = 0$, $bc = cb = 0$;

2) (2) $(0, c^2, c) = \langle c\rangle$: $c^3 = 0$;

3) (3) $(0, b, c) = \langle b, c\rangle$: $b^2 = 0$, $c^2 = c$, $bc = cb = 0$;

4) (6) $(0, b, e) = \langle b, e\rangle$: $b^2 = 0$;

5) (7) $(0, b, c) = \langle b, c\rangle$: $b^2 = b$, $c^2 = c$, $bc = cb = 0$;

6) (9) $(0, c^2, c) = \langle 0, c\rangle$: $c^3 = c^2$;

7) (10) $(0, b, e) = \langle 0, b, e\rangle$: $b^2 = b$;

8) (12) $(0, e, c) = \langle 0, c\rangle$: $c^2 = e$;

9) (15) $(c^2, b, c) = \langle b, c\rangle$: $b^3 = b^2$, $c^3 = c$, $b^2 = c^2$, $bc = cb = c$;

10) (16) $(c^2, e, c) = \langle e, c\rangle$: $c^3 = c$;

11) (17) $(c^2, c^3, c) = \langle c\rangle$: $c^4 = c^2$;

12) (18) $(e, b, b^2) = \langle b\rangle$: $b^3 = e$.

Некомутативні напівгрупи:

13) (4) $(0, b, c) = \langle b, c\rangle$: $b^2 = 0$, $c^2 = c$, $bc = 0$, $cb = b$;

14) (5) $(bc, b, c) = \langle b, c\rangle$: $b^3 = b^2$, $c^2 = c$, $bc = b^2$, $cb = c$;

15) (8) $(bc, b, c) = \langle b, c\rangle$: $b^2 = b$, $c^2 = c$, $cb = c$;

16) (11) $(0, b, c) = \langle 0, b, c\rangle$: $b^2 = b$, $c^2 = c$, $bc = b$, $cb = c$;

17) (13) $(a, e, c) = \langle a, e, c\rangle$: $a^2 = a$, $c^2 = c$, $ac = a$, $ca = c$;

18) (14) $(a, b, c) = \langle a, b, c\rangle$: $a^2 = a$, $b^2 = b$, $c^2 = c$, $ab = a$, $ac = a$, $ba = b$, $bc = b$, $ca = c$, $cb = c$.

Деякі пояснення до списку. Через 0 та e позначається відповідно нульовий та одиничний елементи (тривіальні визначальні співвідношення для них не виписуються). Наявність різних букв в позначеннях твірних різних напівгруп визначається специфікою знаходження мінімальних систем твірних в [18].

Зауважимо, що системи твірних не завжди є мінімальними. По-перше, така задача авторами в своїх роботах не ставилася, по-друге, для вивчення матричних зображень напівгруп це і не потрібно (інколи зайві співвідношення можуть бути навіть корисними).

2. Формулювання основних теорем. Усі напівгрупи вважаються такими, що мають порядок три, Під зображенням завжди розуміємо матричне зображення над (довільним) полем K. E позначає одиничну матрицю будь-якого розміру $n \times n$ ($n \geq 0$).

Завжди вважаємо (див. у зв'язку з цим [19]), що матриця зображення, яка відповідає нульовому (відповідно одиничному) елементу напівгрупи, якщо він є, — нульова (відповідно одинична). Матриця зображення, що відповідає твірному елементу a, b, c позначається відповідно через A, B, C.

Нагадаємо, що напівгрупи розглядаються з точністю дуальності (і, звичайно, ізоморфізму). Це по суті не є обмеженням, бо дуальним напівгрупам відповідають зображення з транспонованими матрицями.

Теорема 1. *Лише комутативна напівгрупа*
$(0, b, c) = \langle b, c\rangle : b^2 = 0, c^2 = 0, bc = cb = 0$
і некомутативна напівгрупа $(a, b, c) = \langle a, b, c\rangle$*:*
$a^2 = a$, $b^2 = b$, $c^2 = c$, $ab = a$, $ac = a$, $ba = b$, $bc = b$, $ca = c$, $cb = c$
мають (з точністю до еквівалентності) нескінченне число нерозкладних зображень.

Решта напівгруп, як випливає з наступних теорем 2 і 3, мають скінченне число нерозкладних зображень (повністю теорема 1 буде доведена в параграфі 5). У таких випадках можна говорити про загальні канонічні форми.

Теорема 2. *Канонічна форма для комутативних напівгруп* 2)–12) *третього порядку така:*

2) $(0, c^2, c) = \langle c\rangle$: $c^3 = 0$;

$$C = \begin{pmatrix} 0 & E & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3) $(0, b, c) = \langle b, c\rangle$: $b^2 = 0$, $c^2 = c$, $bc = cb = 0$;

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

4) $(0, b, e) = \langle b, e\rangle$: $b^2 = 0$;

$$B = \begin{pmatrix} 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

5) $(0, b, c) = \langle b, c\rangle$: $b^2 = b$, $c^2 = c$, $bc = cb = 0$;

$$B = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

6) $(0, c^2, c) = \langle 0, c\rangle$: $c^3 = c^2$;

$$C = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

7) $(0, b, e) = \langle 0, b, e\rangle$: $b^2 = b$;

$$B = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

8) $(0, e, c) = \langle 0, c\rangle$: $c^2 = e$;

$$C = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & -E \end{pmatrix}$$

для $char K \neq 2$;

$$C = \begin{pmatrix} E & E & 0 \\ 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & E \end{pmatrix}$$

для $char K = 2$.

9) $(c^2, b, c) = \langle b, c\rangle$: $b^3 = b^2$, $c^3 = c$, $b^2 = c^2$, $bc = cb = c$;

$$B = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

для $char K \neq 2$;

$$B = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} E & E & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

для $char K = 2$.

10) $(c^2, e, c) = \langle e, c\rangle$: $c^3 = c$;

$$C = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 & -E & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

для $char K \neq 2$;

$$C = \begin{pmatrix} E & E & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

для $char K = 2$.

11) $(c^2, c^3, c) = \langle c\rangle$: $c^4 = c^2$;

$$C = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

для $char \neq 2$;

$$C = \begin{pmatrix} E & E & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

для $char = 2$.

12) $(e, b, b^2) = \langle b \rangle$: $b^3 = e$.

$$B = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon E & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon^2 E \end{pmatrix}$$

для $char \neq 3$, *якщо в* K *існує кубічний корінь* $\varepsilon \neq 1$ *з одиниці;*

$$B = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E \\ 0 & -E & -E \end{pmatrix}$$

для $char \neq 3$, *якщо в* K *не існує кубічного кореня* $\varepsilon \neq 1$ *з одиниці;*

$$B = \begin{pmatrix} E & E & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E \end{pmatrix}$$

для $char = 3$.

Теорема 3. *Канонічна форма для некомутативних напівгруп* 13)–18) *третього порядку така:*

13) $(0, b, c) = \langle b, c \rangle$: $b^2 = 0$, $c^2 = c$, $bc = 0$, $cb = b$;

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

14) $(bc, b, c) = \langle b, c \rangle$: $b^3 = b^2$, $c^2 = c$, $bc = b^2$, $cb = c$;

$$B = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

15) $(bc, b, c) = \langle b, c \rangle$: $b^2 = b$, $c^2 = c$, $cb = c$;

$$B = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ E & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

16) $(0, b, c) = \langle 0, b, c \rangle$: $b^2 = b$, $c^2 = c$, $bc = b$, $cb = c$;

$$B = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 \\ E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

17) $(a, e, c) = \langle a, e, c \rangle$: $a^2 = a$, $c^2 = c$, $ac = a$, $ca = c$;

$$A = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 \\ E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Зауважимо, що у випадку, коли матричне зображення напівгрупи з одним твірним задається нормальною формою Жордана, можна це ж зображення задати і нормальною формою Фробеніуса (але не навпаки). Зрозуміло, що ми вибираємо нормальну форму Жордана як більш просту (в деяких випадках обидві форми збігаються).

3. Доведення теореми 2. Доведення для напівгруп 2), 4), 6)–8), 10)–12) випливає з відомих результатів лінійної алгебри (нормальна форма Жордана та Фробеніуса).

Розглянемо випадок напівгрупи 3).

Матриці B, C можна приводити одночасними перетвореннями подібності (саме такі перетворення відповідають еквівалентним зображенням). За допомогою вказаних перетворень приведемо матрицю C до нормальної форми Жордана в такому вигляді:

$$C = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Зауважимо, що матрицю B, яка при цьому якимось чином зміниться, будемо знову позначати через B, щоб не нагромаджувати індекси (і цим принципом будемо користуватися завжди). Тоді, після розбиття матриці B на блоки (такого ж розміру, як і блоки матриці C), вона має вигляд

$$B = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix},$$

де B_1, B_2, B_3, B_4 – деякі матриці. Використаємо рівності $BC = CB = 0$ (які відповідають визначальним співвідношенням $bc = cb = 0$):

$$\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Із цих рівностей отримуємо, що B має вигляд

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B_4 \end{pmatrix}.$$

Оскільки $B_4^2 = 0$, то залишилося лише привести (перетвореннями подібності) матрицю B_4 до нормальної форми Жордана у вигляді

$$B_4 = \begin{pmatrix} 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(яка переставно подібна прямій сумі відповідних клітин Жордана). При цьому треба розбити додатково матрицю C на нові блоки, відповідно до розбиття матриці B.

Випадок напівгрупи 5) розглядається аналогічно випадку напівгрупи 3), але починаємо з приведення матриці B і на заключному етапі отримуємо матрицю C_4, яка задовольняє рівність $C_4^2 = C_4$, а значить перетвореннями подібності може бути приведена до жорданового вигляду

$$C_4 = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Розглянемо випадок напівгрупи 9).

Приведемо матрицю B до нормальної форми Жордана в такій формі:

$$B = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тоді, після розбиття матриці C на блоки (такого ж розміру, як і блоки матриці B), маємо

$$C = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 & C_3 & C_4 \\ C_5 & C_6 & C_7 & C_8 \\ C_9 & C_{10} & C_{11} & C_{12} \\ C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \end{pmatrix}$$

і з рівностей $CB = BC = C$ випливає, що

$$C = \begin{pmatrix} C_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Використовуючи рівність $B^2 = C^2$, отримуємо $C_1^2 = E$ і залишилося лише привести (перетвореннями подібності) матрицю C_1 до вигляду

$$C_1 = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & -E \end{pmatrix},$$

якщо $charK \neq 2$, і до вигляду

$$C_1 = \begin{pmatrix} E & E & 0 \\ 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & E \end{pmatrix},$$

якщо $charK = 2$. Зауважимо, що рівність $C^3 = C$ виконується автоматично (бо $c^3 = (c^2)c = b^2c = bc = c$).

4. Доведення теореми 3. Розглянемо спочатку випадок напівгрупи 13).

Приведемо (за допомогою перетворень подібності з обома матрицями) матрицю C до жорданового вигляду

$$C = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Розіб'ємо матрицю B на блоки (такого ж розміру):

$$B = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix};$$

і використаємо рівності $CB = B$, $BC = 0$:

$$\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

З цих рівностей отримуємо, що B має вигляд

$$B = \begin{pmatrix} 0 & B_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Рівність $B^2 = 0$ виконується автоматично (бо $b^2 = (cb)(cb) = c(bc)b = 0$).

Легко бачить, що перетворення подібності

$$X = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{pmatrix}$$

не змінює вигляд матриці C (тобто $X^{-1}CX = C$ або, в еквівалентній мові, $XC = CX$) тоді і лише тоді, коли воно має вигляд

$$X = \begin{pmatrix} X_1 & 0 \\ 0 & X_4 \end{pmatrix}.$$

Тоді

$$X^{-1}BX = \begin{pmatrix} 0 & X_1^{-1}B_2X_4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

а, отже, B_2 допускає довільні (незалежні) перетворення рядків і стовпців. Залишилося лише підставити в B замість блока B_2 його канонічну форму (відносно вказаних перетворень)

$$\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Розглянемо випадок напівгрупи 14).

Приведемо матрицю B до нормальної форми Жордана в наступному вигляді:

$$B = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Розіб'ємо матрицю C на блоки такого ж розміру:

$$\begin{pmatrix} C_1 & C_2 & C_3 & C_4 \\ C_5 & C_6 & C_7 & C_8 \\ C_9 & C_{10} & C_{11} & C_{12} \\ C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \end{pmatrix};$$

і використаємо спочатку рівність $CB = C$:

$$\begin{pmatrix} C_1 & C_2 & C_3 & C_4 \\ C_5 & C_6 & C_7 & C_8 \\ C_9 & C_{10} & C_{11} & C_{12} \\ C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 & C_3 & C_4 \\ C_5 & C_6 & C_7 & C_8 \\ C_9 & C_{10} & C_{11} & C_{12} \\ C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \end{pmatrix}.$$

Ліва частина цієї рівності (після перемноження матриць) дорівнює

$$\begin{pmatrix} C_1 & 0 & C_2 & 0 \\ C_5 & 0 & C_6 & 0 \\ C_9 & 0 & C_{10} & 0 \\ C_{13} & 0 & C_{14} & 0 \end{pmatrix},$$

звідки

$$C = \begin{pmatrix} C_1 & 0 & 0 & 0 \\ C_5 & 0 & 0 & 0 \\ C_9 & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Використовуючи тепер рівність $BC = B^2$, отримуємо, що

$$C = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 \\ C_5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Рівність $C^2 = C$ виконується автоматично (бо $c^2 = (cb)(cb) = c(bc)b = c(b^2)b = cb^3 = cb^2 = (cb)b = cb = c$).

Виясним тепер, коли перетворення подібності

$$X = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 & X_3 & X_4 \\ X_5 & X_6 & X_7 & X_8 \\ X_9 & X_{10} & X_{11} & X_{12} \\ X_{13} & X_{14} & X_{15} & X_{16} \end{pmatrix}$$

не змінює вигляд матриці B. Після підстановки і перемноження матриць рівність $BX = XB$ має вигляд

$$\begin{pmatrix} X_1 & 0 & X_2 & 0 \\ X_5 & 0 & X_6 & 0 \\ X_9 & 0 & X_{10} & 0 \\ X_{13} & 0 & X_{14} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 & X_3 & X_4 \\ X_9 & X_{10} & X_{11} & X_{12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

звідки

$$X = \begin{pmatrix} X_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & X_6 & X_7 & X_8 \\ 0 & 0 & X_6 & 0 \\ 0 & 0 & X_{15} & X_{16} \end{pmatrix}.$$

Оскільки X^{-1} має вигляд

$$X^{-1} = \begin{pmatrix} X_1^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & X_6^{-1} & Y_2 & Y_3 \\ 0 & 0 & X_6^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & Y_8 & X_{16}^{-1} \end{pmatrix},$$

де $Y_3 = -X_6^{-1}X_8X_{16}^{-1}$ (вирази для Y_2 і Y_8 не знадобляться), то

$$X^{-1}CX = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 \\ X_6^{-1}C_5X_1 - X_6^{-1}X_8X_{16}^{-1}C_{13}X_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ X_{16}^{-1}C_{13}X_1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отже, прийшли до задачі про зображення частково впорядкованої множини з двох порівняльних елементів і згідно результатів роботи [20] матриці X_1, X_6, X_8, X_{16} можна вибрати таким чином, що

$$X_6^{-1}C_5X_1 - X_6^{-1}X_8X_{16}^{-1}C_{13}X_1 = \begin{pmatrix} 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$X_{16}^{-1}C_{13}X_1 = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(відповідні вертикальні смуги мають однакову кількість стовпців). Залишилося лише підставити в C замість блоків C_5, C_{13} їхню вказану канонічну форму (як зображення вказаної частково впорядкованої множини).

Розглянемо випадок напівгрупи 15).

Приведемо матрицю B до вигляду

$$B = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Розіб'ємо матрицю C на блоки такого ж розміру:

$$C = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{pmatrix};$$

і використаємо рівність $CB = C$:

$$\begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{pmatrix}.$$

З цієї рівності отримуємо, що C має вигляд

$$C = \begin{pmatrix} C_1 & 0 \\ C_3 & 0 \end{pmatrix},$$

а тоді з рівності $C^2 = C$ маємо, що $C_1^2 = C_1$, $C_3C_1 = C_3$.

Перетворення подібності

$$X = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{pmatrix}$$

не змінює вигляд матриці B тоді і лише тоді, коли воно має вигляд

$$X = \begin{pmatrix} X_1 & 0 \\ 0 & X_4 \end{pmatrix}$$

(див. випадок 13)). Тоді

$$X^{-1}CX = \begin{pmatrix} X_1^{-1}C_1X_1 & 0 \\ X_4^{-1}C_3X_1 & 0 \end{pmatrix},$$

Отже, C_1 допускає лише подібної перетворення матриці, а значить її можна привести (за допомогою вибору матриці X_1) до жорданового вигляду

$$C_1 = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Із $C_3C_1 = C_3$ випливає, що

$$C_3 = \begin{pmatrix} C_3' & 0 \end{pmatrix}$$

і, очевидно, матриці X_1 і X_4 можна вибрати таким чином, що (новий) вигляд матриці C_1 не зміниться, а матриця C_3' матиме вигляд

$$C_3' = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Залишилося лише підставити в C замість блоків C_1, C_3 їхні вказані канонічні форми.

Розглянемо випадок напівгрупи 16).

Приведемо матрицю B до жорданового вигляду

$$B = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Розіб'ємо матрицю C на блоки такого ж розміру:

$$C = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{pmatrix};$$

і використаємо рівності $BC = B$, $CB = C$:

$$\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{pmatrix}.$$

З цих рівностей отримуємо, що C має вигляд

$$C = \begin{pmatrix} E & 0 \\ C_3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Далі доведення проводиться аналогічно, як у випадку 13).

Випадок напівгрупи 17) збігається з випадком 16) з точки зору матричних зображень, бо якщо не враховувати нульові і одиничні елементи напівгруп, то після заміни a на b матимемо ті ж самі співвідношення.

5. Доведення теореми 1. Задача про матричні зображення напівгрупи 1) легко зводиться до відомої задачі про пучок матриць (див, наприклад, [21]); вперше це показано в [2] для поля характеристики 2. Звідси маємо, що напівгрупа 1) має нескінченне число нерозкладних зображень: матричні зображення довільної фіксованої розмірності $n = 2m > 0$

$$T(b) = \begin{pmatrix} 0 & E_m \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad T(c) = \begin{pmatrix} 0 & J_m(\alpha) \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

де $J_m(\alpha)$ — клітина Жордана розміру $m\times m$ з власним числом α, E_m — одинична матриця розміру $m \times m$, нерозкладні і нееквівалентні між собою.

Серія зображень з аналогічними властивостями існує і для напівгрупи 18):

$$T(a) = \begin{pmatrix} E_m & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad T(b) = \begin{pmatrix} E_m & 0 \\ E_m & 0 \end{pmatrix}, \quad T(c) = \begin{pmatrix} E_m & 0 \\ J_m(\alpha) & 0 \end{pmatrix}.$$

6. Ручні та дикі випадки. Відносно означення ручних та диких матричних задач ми відсилаємо читача до роботи Ю. А. Дрозда [1]. Напівгрупа називається ручною (відповідно дикою), якщо задача про опис її зображень є ручною (відповідно дикою).

Згідно теореми 1 лише напівгрупи 1) і 18) мають нескінченне число нерозкладних зображень (над довільним полем). В такій ситуації саме для цих напівгруп і є сенс ставити питання про те, ручні вони чи дикі.

Напівгрупа 1) ручна, бо такою є задача про пучок матриць.

Покажемо. що ручною є і напівгрупа 18).

Згідно випадку 16) (див. доведення теореми 3) за допомогою подібних перетворень матриці A і B можна привести до вигляду

$$A = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 \\ E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Розіб'ємо матрицю C на блоки (такого ж розміру, як в A та B) і використаємо рівності $AC = A$, $CA = C$:

$$\begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1 & C_2 & C_3 & C_4 \\ C_5 & C_6 & C_7 & C_8 \\ C_9 & C_{10} & C_{11} & C_{12} \\ C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} C_1 & C_2 & C_3 & C_4 \\ C_5 & C_6 & C_7 & C_8 \\ C_9 & C_{10} & C_{11} & C_{12} \\ C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 & C_3 & C_4 \\ C_5 & C_6 & C_7 & C_8 \\ C_9 & C_{10} & C_{11} & C_{12} \\ C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \end{pmatrix}.$$

З цих рівностей отримуємо, що C має вигляд

$$C = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 \\ C_9 & C_{10} & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{14} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Рівності $C^2 = C$, $BC = C, CB = B$ виконується автоматично (бо $c^2 = (ca)(ca) = c(ac)a = ca^2 = ca = c$; $bc = (ba)c = b(ac) = ba = b$; cb=(ca)b=c(ab)=ca=c).

Вияснимо тепер, коли перетворення подібності

$$X = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 & X_3 & X_4 \\ X_5 & X_6 & X_7 & X_8 \\ X_9 & X_{10} & X_{11} & X_{12} \\ X_{13} & X_{14} & X_{15} & X_{16} \end{pmatrix}$$

не змінює вигляд матриці A і B (тобто $AX = XA$, $BX = XB$). Після підстановки і перемноження матриць рівності $AX = XA$, $BX = XB$) мають вигляд

$$\begin{pmatrix} X_1 & X_2 & X_3 & X_4 \\ X_5 & X_6 & X_7 & X_8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 & 0 & 0 \\ X_5 & X_6 & 0 & 0 \\ X_9 & X_{10} & 0 & 0 \\ X_{13} & X_{14} & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} X_1 & X_2 & X_3 & X_4 \\ X_5 & X_6 & X_7 & X_8 \\ X_1 & X_2 & X_3 & X_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1 + X_3 & X_2 & 0 & 0 \\ X_5 + X_7 & X_6 & 0 & 0 \\ X_9 + X_{11} & X_{10} & 0 & 0 \\ X_{13} + X_{15} & X_{14} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

З цих рівностей випливає, що

$$X = \begin{pmatrix} X_1 & 0 & 0 & 0 \\ X_3 & X_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & X_1 & X_6 \\ 0 & 0 & 0 & X_8 \end{pmatrix}.$$

Аналіз матриці $X^{-1}CX$ (подібний як у випадку напівгрупи 14)) показує, що задача про опис зображень напівгрупи 18) зводиться до аналогічної задачі для в'язки двох ланцюгів $\{e_1 < e_2\}$ і$\{f_1 < f_2\}$ з наступною інволюцією: $e_1^* = e_1, f_1^* = f_1, e_2^* = f_2$ (див. загальне означення в [24]). А згідно класифікаційної теореми роботи [24] будь-яка в'язка ланцюгів є ручною.

Як наслідок маємо, що серед напівгруп третього порядку диких напівгруп немає.

Список використаної літератури

1. *Бондаренко В. М., Дрозд Ю. А.* Представленческий тип конечных групп // Модули и представления: Записки науч. семинаров ЛОМИ. – 1977. – **71**. – С. 24–41.

2. *Понизовский И. С.* О конечности типа полугрупповой алгебры конечной вполне простой полугруппы // Зап. науч. семинаров ЛОМИ. – 1972. – **28**. – С. 154–163.
3. *Понизовский И. С.* Некоторые примеры полугрупповых алгебр конечного типа // Зап. науч. семинаров ЛОМИ. – 1987. – **160**. – С. 229–238.
4. *Ringel C.* The representation type of the full transformation semigroup T_4 // Semigroup Forum. – 2000. – № 3. – P. 429–434.
5. *Дяченко С. М.* Напівгрупи Рісса над циклічною групою третього порядку ручного нескінченного зображувального типу // Наукові записки НаУКМА (Фізико-математичні науки). – 2012. – **126**. – С. 3–6.
6. *Дяченко С. М.* Напівгрупи Рісса над циклічною групою четвертого порядку скінченного зображувального типу // Наукові записки НаУКМА (Фізико-математичні науки). – 2014. – **152**. – С. 27–31.
7. *Дяченко С. М.* Напівгрупи Рісса над циклічною групою простого порядку скінченного зображувального типу // Наукові записки НаУКМА (Фізико-математичні науки). – 2016. – **178**. – С. 23–26.
8. *Бондаренко В. М., Тертичная Е. Н.* О бесконечности типа бесконечных полугрупп, порожденных идемпотентами с частичным нулевым умножением // Проблеми топології та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2006. – **3**, № 3. – С. 23–44.
9. *Бондаренко В. М., Тертичная Е. Н.* О полугруппах, порожденных идемпотентами с частичным нулевым умножением // Комплексний аналіз і течії з вільними границями : Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2006. – **3**, № 4. – С. 294–298.
10. *Bondarenko, V. M., Tertychna O. M.* On tame semigroups generated by idempotents with partial null multiplication // Algebra Discrete Math. – 2008. – № 4. – P. 15–22.
11. *Гельфанд И. М., Пономарьов В. А.* Неразложимые представления группы Лоренца // Успехи мат. наук. – 1968 . – **23**, вып. 2. – С. 3–60.
12. *Назарова Л. А., Ройтер А. В., Сергейчук В. В., Бондаренко В. М.* Применение модулей над диадой для классификации конечных p-групп, обладающих абелевой подгруппой индекса p, и пар взаимно аннулирующих операторов // Зап. науч. семинаров ЛОМИ. – 1972. – **28**. – С. 69–92.
13. *Бондаренко В. М.* Представления диэдральных групп над полем характеристики 2 // Мат. сб. – 1975. – **96**, вып. 1. – С. 63–74.
14. R*ingel C.* Indecomposable representations of dihedral 2-groups // Math. Ann. – 1975. – **214**, № 1. – P. 19–34.
15. *Tamura T.* Some remarks on semi-groups and all types of semi-groups of order 2, 3 // J. Gakugei Tokushima Univ. – 1953. – **3**, – P. 1–11.
16. *Бондаренко В. М., Заціха Я. В.* Про визначальні співвідношення для мінімальних систем твірних напівгруп третього порядку // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова (Серія 1. Фізико-математичні науки). – 2013. – №14. – С. 62–67.
17. *Chotchaisthit S.* Simple proofs determining all nonisomorphic semigroups of order 3 // Appl. Math. Sci. (Ruse). – 2014. – **8**. – P. 1261–1269.
18. *Bondarenko V. M., Zaciha Ya. V.* On characteristic properties of semigroups // Algebra Discrete Math. – 2015 – **20**, no. 1. – P. 32–39.
19. *Бондаренко В. М., Костишин Е. М.* Модулярні зображення напівгрупи T_2 // Наук. вісник Ужгород. ун-ту (серія: математика і інформатика). – 2011. – **22**, № 1. – С. 26–34.
20. *Назарова Л. А., Ройтер А. В.* Представления частично упорядоченных множеств // Зап. науч. сем. ЛОМИ. – 1972. – **28**. – С. 5–31.
21. *Бондаренко В. М., Литвинчук И. В.* О некоторых ручных и диких матричных задачах постоянного ранга // Наук. вісник Ужгород. ун-ту (серія матем. і інформ). – 2012. – **23**, №1. – С. 19–27.
22. *Башев В. А.* Представления группы $Z_2 \times Z_2$ в поле характеристики 2 // Докл. АН СССР. – 1961. – **141**, вып. 5. – С. 1015–1018.
23. *Дрозд Ю. А.* О ручных и диких матричных задачах // Матричные задачи. – Киев: Ин-т математики АН УССР. – 1977. – С. 104–114.
24. *Бондаренко В. М.* Представления связок полуцепных множеств и их приложения // Алгебра и анализ. – 1991. – **3**, №5. – С. 38–61.

Одержано 18.02.2018