УДК 519.8

А. Ю. Брила (ДВНЗ "Ужгородський нац. ун-т")

ПРО ОДНУ ЗАДАЧУ ЛЕКСИКОГРАФІЧНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ З ІНТЕРВАЛЬНИМИ ОЦІНКАМИ

In this paper, a decision making problem where alternatives are estimated with interval parameters and the feasible set is defined using interval constraints is considered. Based on the assumption that the objective functions and constraints are linear, a linear lexicographic optimization problem with interval coefficients in the objective functions and constraints was specified. For solving this problem, the approach of its reduction to optimization problem with a scalar objective function and scalar constraints was proposed. This approach consists of two steps. At the first step, we reduce the problem with interval coefficients to a lexicographic-lexicographical optimization problem with lexicographical constraints. At the second step, we reduce this lexicographic-lexicographical optimization problem to a problem with a single scalar objective function and scalar constraints. This makes it possible to use well known classical methods of crisp optimization theory for solving this problem.

У статті розглядається задача лексикографічної багатокритеріальної оптимізації, у якій альтернативи оцінюються за допомогою інтервальних оцінок і множина допустимих розв'язків задається за допомогою обмежень, що містять інтервальні параметри. Вважаємо, що часткові цільові функції та обмеження є лінійними і містять інтервальні коефіцієнти. Для розв'язання цієї задачі запропоновано підхід до розв'язання задачі, який ґрунтується на зведенні її до задачі скалярної оптимізації. На першому кроці розглядувана задача лексикографічної багатокритеріальної оптимізації зводиться до задачі лексикографічно-лексикографічної оптимізації з лексикографічними обмеженнями. На другому кроці задача зводиться до задачі скалярної оптимізації.

Вступ. Багато задач прийняття рішень не можуть бути описані за допомогою засобів чіткої оптимізації у зв'язку з невизначеністю ознак, що впливають на кінцеве рішення. Тому на практиці часто у таких випадках застосовують засоби нечіткої оптимізації. Зокрема, широко поширеними є випадки, коли параметри, що описують досліджувану модель, можуть бути представлені за допомогою інтервальних оцінок.

Будемо вважати, що центр інтервалу представляє очікуване значення, а ширина інтервалу відображає невизначеність значення параметра [1]. При порівнянні інтервальних оцінок будемо використовувати підхід, що запропоновано у [2]. Такий підхід дозволяє здійснювати порівняння інтервалів стосовно відношення прийнятності.

Розглянемо задачу прийняття рішень, у якій критеріальні функції є строго проранжовано за важливісю, часткові критерії та обмеження є лінійними і можуть містити обмеження з інтервальними коефіцієнтами. Дані припущення ускладнюють задачу прийняття рішень, оскільки не дозволяють використовувати для її розв'язання відомі методи чіткої багатокритеріальної оптимізації.

У даній статті для розв'язання розглядуваної задачі застосовано підхід, що ґрунтується на зведенні її до задачі лексикографічно-лексикографічної оптимізації [3]. Дана ж задача може бути розв'язана шляхом зведення її до задачі лексикографічної оптимізації або ж зведенням її до задачі скалярної оптимізації.

1. Правило порівняння інтервальних оцінок. Інтервальні оцінки розглядуваної задачі прийняття рішень характеризуються за допомогою пари чисел

$$A = \langle a_C, a_W \rangle ,$$

де $a_C \in \mathbf{R}$ є центром інтервалу, $a_W \in \mathbf{R}$ є шириною інтервалу. Центр інтервалу характеризує очікуване значення параметру, а ширина інтервалу відображає міру невизначеності параметру [2].

Будемо використовувати звичні операції інтервальної арифметики [1].

Нехай $A = \langle a_C, a_W \rangle$, $B = \langle b_C, b_W \rangle$, тоді

$$A + B = \langle a_C, a_W \rangle + \langle b_C, b_W \rangle = \langle a_C + b_C, a_W + b_W \rangle , \quad (1)$$

$$kA = k \langle a_C, a_W \rangle = \langle ka_C, |k| \, a_W \rangle .$$

Вважатимемо, що усі змінні є невід'ємними цілими числами, тому попередню операцію можна записати так

$$kA = k \langle a_C, a_W \rangle = \langle ka_C, ka_W \rangle . \quad (2)$$

При порівнянні інтервальних оцінок будемо використовувати правило, запропоноване Hu і Wang [2].

Означення 1. *Для будь-яких двох інтервальних оцінок $A = \langle a_C, a_W \rangle$ і $B = \langle b_C, b_W \rangle$*

$$A \prec_= B, \text{ якщо } \quad \begin{cases} a_C < b_C \ for \ a_C \neq b_C, \\ a_W \geq b_W \ for \ a_C = b_C, \end{cases} \quad (3)$$

$$A = B, \text{ якщо } \quad \begin{cases} a_C = b_C, \\ a_W = b_W, \end{cases} \quad (4)$$

$$A \prec B, \text{ якщо } \quad A \prec_= B \quad \text{ і } A \neq B.$$

Відношення $A \prec_= B$ означає, що A є менш прийнятним ніж B. Очевидно, що у випадку, коли центри інтервалів є рівними, то особа, що приймає рішення віддасть перевагу інтервалу з меншою мірою невизначеності (меншою шириною інтевалу).

2. Лексикографічна багатокритеріальна задача оптимізації з інтервальними оцінками. Розглянемо задачу оптимізації, у якій коефіцієнти є інтервальними оцінками:

$$\max{}^L F(x) = (f_1(x), \, f_2(x), ..., f_q(x)) , \quad (5)$$

з обмеженнями

$$G_i(x) \prec_= B_i, \;\; i = 1, 2, ..., m, \quad (6)$$

$$x \geq 0, \quad (7)$$

$$x \in D \subset Z, \quad (8)$$

де

$$f_i(x) = F_{i1}x_1 + F_{i2}x_2 + ... + F_{in}x_n, \;\; i = 1, 2, ..., q,$$

$$G_i(x) = A_{i1}x_1 + A_{i2}x_2 + ... + A_{in}x_n, \;\; i = 1, 2, ..., m,$$

$$F_{ij} = \langle f_{ijC}, f_{ijW} \rangle\ ,\ A_{ij} = \langle a_{ijC}, a_{ijW} \rangle\ ,\ B_i = \langle b_{iC}, b_{iW} \rangle\ ,$$

$D \subset Z^n$ задає множину можливих значень для цілочислових змінних задачі.

Позначимо множину допустимих розв'язків, що задається за допомогою обмежень (6)-(8) як X.

У даній задачі оптимізації при попарному порівнянні альтернатив за частковими критеріями використовуватимемо правило віддачі переваги, що задається означенням 1.

Означення 2. *Для двох альтернатив $x, y \in X$ виконується співвідношення*

$$F(x) \prec^L_= F(y)\,,$$

якщо існує таке k, $1 \le k \le q$, що

$$f_k(x) \prec_= f_k(y)$$

і, якщо $k > 1$, то

$$f_i(x) = f_i(y)\,,\ i = 1, 2, ..., k-1.$$

Дамо означення оптимального розв'язку у задачі (5)-(8).

Означення 3. *Допустимий розв'язок $x^* \in X$ є оптимальним (непокращуваним) розв'язком, якщо $F(x) \prec_= F(x^*)$ для всякого $x \in X$.*

3. Зведення лексикографічної задачі багатокритеріальної оптимізації з інтервальними оцінками до багатокритеріальної задачі лексикографічно-лексикографічної оптимізації з лексикографічними обмеженнями. Для початку розглянемо зміст лексикографічних обмежень. Лексикографічні обмеження розгядаються у [3]. У загальному вони задаються за допомогою векторної нерівності

$$g(x) \le^L b,$$

де

$$g : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^q,$$

$$g(x) = (g_1(x), g_2(x), ..., g_q(x))\,,$$

$$g_i(x) : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}, \quad i = 1, 2, ..., q,$$

$$b \in \mathbf{R}^q, \quad b = (b_1, b_2, ..., b_q)\,,$$

(нерівність "$\le^L$" означає, що вектори порівнюються з використанням правила лексикографічного порядку віддачі переваги [3]). Таким чином обмеження складається з $q, (q \ge 1)$ часткових скалярних обмежень:

$$g_1(x) \le b_1,$$

$$g_2(x) \le b_2,$$

$$\cdots$$

$$g_q(x) \le b_q.$$

Альтернатива $x \in \mathbf{R}^n$ задовольняє це лексикографічне обмеження, якщо один із випадків має місце:

1) $g_1(x) < b_1;$

2) $g_1(x) = b_1,$
$g_2(x) < b_2;$

3) $g_1(x) = b_1,$
$g_2(x) = b_2,$
$g_3(x) < b_3;$

....

q) $g_1(x) = b_1,$
$g_2(x) = b_2,$
....
$g_{q-1}(x) = b_{q-1}$
$g_q(x) < b_q$

q+1) $g_i(x) = b_i,\ i = 1, 2, ..., q.$

Враховуючи властивості лексикографічних обмежень, правило віддачі переваги, яке задається означенням 1, може бути представлено за допомогою наступного співвідношення

$A \prec_= B$ якщо $\bar{A} \le^L \bar{B}$,

де

$$\bar{A} = (A_C, -A_W),$$

$$\bar{B} = (B_C, -B_W).$$

Використовуючи таке представлення лексикографічна задача багатокритеріальної оптимізації з інтервальними оцінками може бути зведена до багатокритеріальної задачі лексикографічно-лексикографічної оптимізації [3] з лексикографічними обмеженнями :

$$\max{}^{LL} \bar{F}(x) = \left(\bar{f}_1(x), \bar{f}_2(x), ..., \bar{f}_q(x)\right), \tag{9}$$

з обмеженнями

$$\bar{G}_i(x) \le^L \bar{B}_i,\ i = 1, 2, ..., m, \tag{10}$$

$$x \ge 0, x \in D \subset \mathbf{Z}^n, \tag{11}$$

де

$$\bar{f}_i(x) = (F_{iC}(x), -F_{iW}(x)),\ \ i = 1, 2, ..., q,$$

$$F_{iC}(x) = f_{i1}x_1 + f_{i2C}x_2 + ... + f_{inC}x_n,$$

$$F_{iW}(x) = f_{i1W}x_1 + f_{i2W}x_2 + ... + f_{inW}x_n,$$

$$\bar{G}_i(x) = \left(\bar{G}_{iC}(x), -\bar{G}_{iW}(x)\right),$$

$$\bar{G}_{iC}(x) = a_{i1C}x_1 + a_{i2C}x_2 + ... + a_{inC}x_n,$$

$$\bar{G}_{iW}(x) = a_{i1W}x_1 + a_{i2W}x_2 + ... + a_{inW}x_n,$$

$$\bar{B}_i = (b_{iC}, -b_{iW}).$$

Таким чином при заданому способі задання і порівняння інтервальних оцінок можемо звести лексикографічну задачу багатокритеріальної оптимізації з інтервальними оцінками до цілочислової багатокритеріальної задачі лексикографічно-лексикографічної оптимізації з лексикографічними обмеженнями.

4. Зведення цілочислової задачі лексикографічно-лексикографічної оптимізації з лексикографічними обмеженнями до цілочислової задачі з скалярною цільовою функцією і скалярними обмеженнями. Використовуючи міркування аналогічні до [3], задача лексикографічно-лексикографічної оптимізації з лексикографічними обмеженнями може бути зведена до задачі лексикографічної оптимізації з лексикографічними обмеженнями

$$\max{}^{L} l\left(x\right), \tag{12}$$

з обмеженнями

$$\bar{G}_i\left(x\right) \leq^{L} \bar{B}_i,\ i = 1, 2, ..., m, \tag{13}$$

$$x \geq 0, x \in D \subset \mathbf{Z}^n, \tag{14}$$

де

$$l\left(x\right) = \left(F_{1C}, -F_{1W}, F_{2C}, -F_{2W}, ..., F_{qC}, -F_{qW}\right).$$

Нехай додатні коефіцієнти α_{i1}, α_{i2} $(1 \leq i \leq m)$ знайдені за правилом:

$$\alpha_{i2} > 0$$

деяке довільне додатне число; α_{i1} – визначено згідно умови

$$\alpha_{i1} > \frac{1}{\mu_i}\alpha_{i2}M_{i2}, \tag{15}$$

де

$$M_{i2} \geq \max\left\{\left|b_{iW} - \bar{G}_{iW}\left(x\right)\right| : \ x \in D\right\}, i = 1, 2, ..., m, \tag{16}$$

$$0 < \mu_i \leq \inf_{\substack{x \in D \\ b_{iC} \neq \bar{G}_{iC}(x)}} \left|b_{iC} - \bar{G}_{iC}\left(x\right)\right|. \tag{17}$$

Якщо $a_{ijC} > 0$, то у (16) можемо використати

$$M_{i2} \geq \max\left\{\left|b_{iW} - \bar{G}_{iW}\left(x\right)\right| : \ x \in D_i\right\}, i = 1, 2, ..., m, \tag{18}$$

або ж

$$M_{i2} \geq \max\left\{b_{iW}, \left|b_{iW} - \bar{G}_{iW}\left(\bar{d}_{i1}, \bar{d}_{i2}, ..., \bar{d}_{in}\right)\right|\right\},\ i = 1, 2, ..., m, \tag{19}$$

де

$$D_i = \left\{x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in Z^n : \ 0 \leq x_j \leq \bar{d}_{ij} = \left[\frac{b_{iC}}{a_{ijC}}\right], j = 1, 2, ..., n\right\}.$$

Відмітимо, що у випадку $x_j \in \{0, 1\}$, $j = 1, 2, ...n$ у (19) $\bar{d}_{ij} = 1$.

Також, у випадку, коли $a_{ijC} \in \mathbf{Z}$ $\quad (1 \leq j \leq n)$ і $b_{iC} \in \mathbf{Z}$, то для спрощення можемо використати

$$\mu_i = 1. \tag{20}$$

Нехай

$$g_i(x) = \alpha_{i1}\bar{G}_{iC}(x) - \alpha_{i2}\bar{G}_{iW},$$

$$b_i = \alpha_{i1}b_{iC} - \alpha_{i2}b_{iW},$$

Має місце теорема

Теорема 1. *Оптимальний розв'язок задачі*

$$\max{}^L\ l(x), \tag{21}$$

з обмеженнями

$$g_i(x) \le b_i,\ i = 1, 2, ..., m, \tag{22}$$

є оптимальним розв'язком задачі (5)-(8).

Доведення. У [8] доведено, що лексикографічні обмеження

$$\bar{G}_i(x) \le^L \bar{B}_i,\ 1 \le i \le m,$$

є еквівалентними обмеженням

$$g_i(x) \le b_i,\ 1 \le i \le m.$$

Аналогічно до [3], легко довести, що розв'язок задачі лексикографічної оптимізації (21)-(23) є розв'язком задачі лексикографічно-лексикографічної оптимізації (9)-(11). А отже, оптимальний розв'язок задачі (21)-(23) є оптимальним розв'язком задачі (5)-(8).

Даний підхід аналогічно може бути використаним у таких випадках:

- тільки цільова функція містить інтервальні коефіцієнти (в цьому випадку задача (12)-(14) є звичайною задачею лексикографічно-лексикографічної оптимізації і для її розв'язання можна використати відомі методи [3]);

- тільки множина допустимих розв'язків містить інтервальні коефіцієнти (тоді змінивши обмеження з використанням коефіцієнтів (15), ми знову ж таки приходимо до звичайної задачі лексикографічно-лексикографічної оптимізації);

- не всі обмеження містять інтервальні коефіцієнти (тоді необхідно замінити тільки обмеження з інтервальними оцінками з використанням коефіцієнтів (15)).

Висновки. У даній роботі було розглянуто задачу прийняття рішень, у якій деякі параметри можуть бути інтервальними оцінками. Ми сформулювали лексикографічну задачу багатокритеріальної оптимізації з інтервальними оцінками. Для її розв'язання було запропоновано підхід, що ґрунтується на зведенні даної задачі до задачі лексикографічно-лексикографічної задачі оптимізації з лексикографічними обмеженнями, яку можна звести до цілочислової задачі лексикографічної оптимізації. Перевагою такого підходу є можливість застосування відомих методів лексикографічної оптимізації [3].

Список використаної літератури

1. *Lodwick,W. A* . "*Interval and fuzzy analysis:* An uni. ed approach, in Advances in Imagining and Electronic Physics, P. W. Hawkes, Editor, Volume 148, Elsevier Press, 2007, pp. 75-192.
2. *B.Q. Hu, S. Wang, A novel approach in uncertain programming* Part I: New arithmetic and order relation for interval numbers, J. Ind. Manag. Optim. 2 (4) (2006) 351–371.
3. *Червак Ю. Ю.* Оптимізація. Непокращуваний вибір/ Ю.Ю. Червак. — Ужгород: Ужгородський нац. ун–т, 2002. – 312 с.
4. *Подиновский В.В., Гаврилов В.М.* Опимизация по последовательно применяемым критериям/ В.В. Подиновский, В.М. Гаврилов. – М.:Наука, 1975. – 192 с.
5. *Брила А. Ю.* Достижимость оптимальных решений линейной задачи многокритериальной оптимизации по взвешенной сумме критериев разной важности в транзитивной субординации/ А.Ю. Брила // Кибернетика и системный анализ. — 2008. – №5. – С. 135–138.
6. *Брила А.Ю., Гренджа В.І.* Досяжність оптимальних розв'язків лексикографічної задачі про ранець/ А.Ю. Брила, В.І. Гренджа, //Computation Inteligence (Results, Problems and Perspectives): Proceeding of the Second International Conference (14-17 May 2013, Cherkasy). — Cherkasy:McLaut, 2013. – P.334.
7. *Брила А.Ю.* Достижимость оптимальных решений линейной задачи многокритериальной оптимизации с альтернативными критериями в транзитивной субординации/ А.Ю. Брила// Международный научно-технический журнал "Проблемы управления и информатики". — 2011. – №4. – С. 68-72.
8. *Bryla, A.* On Solving an Optimization Problem with Interval Coefficients /A.Bryla // Optimization Methods and Applications. – 2017. — Vol.130 — P.57-74.

Одержано 05.02.2018