

УДК 519.21

DOI:10.24144/2616-7700.2018.2(33).78-87

М. М. Капустей, П. В. Слюсарчук (ДВНЗ «Ужгородський нац. ун-т»)

## ТОЧНІСТЬ НАБЛИЖЕННЯ В ЦЕНТРАЛЬНІЙ ГРАНИЧНІЙ ТЕОРЕМІ В ТЕРМІНАХ УСЕРЕДНЕНИХ ПСЕВДОМОМЕНТІВ

Estimates of Zolotarev in the central limit theorem are generalized for sequences series random variables in the term of middle pseudomoments.

Оцінки Золотарьова в центральній граничній теоремі узагальнюються для послідовності серій випадкових величин в термінах усереднених псевдомоментів.

**1. Вступ.** У роботі [1] одержано узагальнення нерівності Беррі–Ессена із використанням різного вигляду псевдомоментів, пізніше, трохи в іншій формі, цей результат був включений у монографію [2]. Завдяки роботі [1] псевдомоменти набули широкого застосування у граничних теоремах. У роботі [3] розглядаються умови, при виконанні яких, швидкість збіжності буде вищою, ніж у нерівності Беррі–Ессена. Псевдомоменти знайшли застосування до оцінки швидкості збіжності цін опціонів [4]. У роботах [5] і [6] розглядаються різні підходи до узагальнення результатів із [1] для різнорозподілених випадкових величин. У даній роботі ми узагальнюємо результати роботи [1] на послідовність серій незалежних в кожній серії різнорозподілених випадкових величин, при цьому узагальнюються результати робіт [5] і [6].

**2. Основні результати.** Розглянемо послідовність серій  $\xi_{n1}, \dots, \xi_{nn}$  незалежних в кожній серії випадкових величин з математичними сподіваннями  $M\xi_{ni} = 0$ , дисперсіями  $D\xi_{ni} = \sigma_{ni}^2$ ,  $\sigma_{ni} > 0$ ,  $\sum_{i=1}^n \sigma_{ni}^2 = 1$ ,  $\bar{\sigma}_n = \max\{\sigma_{n1}, \dots, \sigma_{nn}\}$ . Позначимо:  $F_{ni}(x)$  – функція розподілу  $\xi_{ni}$ ,  $f_{ni}(t)$  – характеристична функція  $\xi_{ni}$ ,  $S_n = \xi_{n1} + \dots + \xi_{nn}$ ,  $\Phi_n(x)$  – функція розподілу  $S_n$ ,  $\Phi(x)$  – функція розподілу стандартного нормального закону,  $\rho_n = \sup_x |\Phi_n(x) - \Phi(x)|$ .

**Теорема.** Нехай  $\bar{\sigma}_n^2 \leq \frac{3}{4}$  при  $n \geq 2$ ,  $2 < r \leq 3$  і для деякого  $s \in [0; r]$  існують величини  $\theta_{nk}(s, r)$  такі, що для всіх  $t \in R$  і  $k = 1, \dots, n$  виконуються нерівності

$$\omega_{nk}(t) = \left| f_{nk}(t) - e^{-\frac{t^2 \sigma_{nk}^2}{2}} \right| \leq \theta_{nk}(s, r) \min(|t|^s \sigma_{nk}^s; d(r) |t|^r \sigma_{nk}^r), \quad (1)$$

де стала  $d(r) \in (0; 1)$ .

Тоді існують сталі  $C_1, C_2$ , які залежать тільки від  $s$  і  $r$ , що для всіх  $n \geq 2$  справедлива нерівність

$$\rho_n \leq C_1 \max \left\{ \bar{\sigma}_n^{r-2} \bar{\theta}_n(s, r); \bar{\sigma}_n (\bar{\theta}_n(s, r))^p \right\}, \quad (2)$$

де  $\bar{\theta}_n(s, r) = \bar{\sigma}_n^{2-s} \sum_{k=1}^n \theta_{nk}(s, r) \sigma_{nk}^s$ ,  $p = \min \{1; \bar{\sigma}_n^{-2} (sn + 1)^{-1}\}$ , а при  $s > 0$

$$\rho_1 \leq C_2 \left( 1 + \frac{1}{s} \right) \max \left\{ \theta_{11}(s, r); (\theta_{11}(s, r))^{\frac{1}{s+1}} \right\}. \quad (3)$$

**Доведення.** При доведенні теореми будемо використовувати скорочені позначення:  $\theta_{nk}(s, r) = \theta_{nk}(s)$ ,  $\bar{\theta}_n(s, r) = \bar{\theta}_n(s)$ . У нерівності ([7], стор. 299)

$$|F(x) - G(x)| \leq \frac{2}{\pi} \int_0^T |f(t) - g(t)| \frac{dt}{t} + \frac{24 \sup_x |G'(x)|}{\pi T}$$

покладемо  $F(x) = \Phi_n(x)$ ,  $G(x) = \Phi(x)$ ,  $f(t) = \prod_{k=1}^n f_{nk}(t)$ ,  $g(t) = e^{-\frac{1}{2}t^2}$ . Тоді

$$\rho_n \leq \frac{2}{\pi} \int_0^T \left| \prod_{k=1}^n f_{nk}(t) - e^{-\frac{1}{2}t^2} \right| \frac{dt}{t} + \frac{24}{\pi \sqrt{2\pi T}}. \quad (4)$$

Із нерівності

$$\left| \prod_{i=1}^n a_i - \prod_{i=1}^n b_i \right| \leq \sum_{i=1}^n |a_i - b_i| \left( \prod_{k=1}^{i-1} |b_k| \right) \left( \prod_{k=i+1}^n |a_k| \right)$$

і умови (1) теореми

$$\begin{aligned} \left| \prod_{k=1}^n f_{nk}(t) - e^{-\frac{1}{2}t^2} \right| &= \left| \prod_{i=1}^n f_{ni}(t) - \prod_{i=1}^n e^{-\frac{t^2 \sigma_{ni}^2}{2}} \right| \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^n \omega_{ni}(t) \prod_{k=1}^{i-1} e^{-\frac{t^2 \sigma_{nk}^2}{2}} \prod_{k=i+1}^n |f_{nk}(t)| \leq d(r) |t|^r \sum_{i=1}^n \sigma_{ni}^r \theta_{ni}(s) \psi_{ni}(t), \end{aligned} \quad (5)$$

де  $\psi_{ni}(t) = \prod_{k=1}^{i-1} e^{-\frac{t^2 \sigma_{nk}^2}{2}} \prod_{k=i+1}^n |f_{nk}(t)|$ .

Нехай  $n \geq 2$ ,  $c \in (0; e^{-9n\sigma_n^2}]$  – довільна стала. Покладемо  $T_n^{(1)} = \frac{1}{\sigma_n} \sqrt{-2 \ln \bar{\theta}_n(s)}$ , якщо  $\bar{\sigma}_n(s) \leq c$ , і  $T_n^{(2)} = \frac{1}{\sigma_n} \left( \frac{c}{\bar{\theta}_n(s)} \right)^{\frac{1}{r-2}}$ , якщо  $\bar{\theta}_n(s) > c$ . Будемо використовувати нерівність:

$$|f_{nk}(t)| = \left| f_{nk}(t) - e^{-\frac{t^2 \sigma_{nk}^2}{2}} + e^{-\frac{t^2 \sigma_{nk}^2}{2}} \right| \leq e^{-\frac{t^2 \sigma_{nk}^2}{2}} + \omega_{nk}(t). \quad (6)$$

Нехай  $n \geq 2$ ,  $\bar{\theta}_n(s) > c$  і  $|t| \leq T_n^{(2)}$ . Із (6) і умови (1) теореми

$$\begin{aligned} |f_{nk}(t)| &\leq e^{-\frac{t^2 \sigma_{nk}^2}{2}} \left( 1 + e^{\frac{t^2 \sigma_{nk}^2}{2}} d(r) |t|^r \sigma_{nk}^r \theta_{nk}(s) \right) \leq \\ &\leq e^{-\frac{t^2 \sigma_{nk}^2}{2}} \left( 1 + e^{\frac{(T_n^{(2)})^2 \sigma_{nk}^2}{2}} (T_n^{(2)})^{r-2} d(r) t^2 \sigma_{nk}^r \theta_{nk}(s) \right) \leq \\ &\leq e^{-\frac{t^2 \sigma_{nk}^2}{2}} \left( 1 + t^2 \sqrt{ed(r)} \frac{c}{\bar{\theta}_n(s)} \bar{\sigma}_n^{2-s} \sigma_{nk}^s \theta_{nk}(s) \right). \end{aligned}$$

Тоді

$$\begin{aligned}
 \psi_{ni}(t) &= \prod_{k=1}^{i-1} e^{-\frac{t^2 \sigma_{nk}^2}{2}} \prod_{k=i+1}^n |f_{nk}(t)| \leq \\
 &\leq \prod_{k=1}^{i-1} e^{-\frac{t^2 \sigma_{nk}^2}{2}} \prod_{k=i+1}^n e^{-\frac{t^2 \sigma_{nk}^2}{2}} \left( 1 + t^2 \sqrt{ed(r)} \frac{c}{\bar{\theta}_n(s)} \bar{\sigma}_n^{2-s} \sigma_{nk}^s \theta_{nk}(s) \right) \leq \\
 &\leq \exp \left\{ -\frac{t^2}{2} (1 - \sigma_{ni}^2) + t^2 \sqrt{ed(r)} \frac{c}{\bar{\theta}_n(s)} \bar{\sigma}_n^{2-s} \sum_{k=i+1}^n \sigma_{nk}^s \theta_{nk}(s) \right\} \leq \\
 &\leq \exp \left\{ -\frac{t^2}{2} (1 - \sigma_{ni}^2) + t^2 \sqrt{ed(r)} c \right\} \leq e^{-c_2 t^2}, \tag{7}
 \end{aligned}$$

де  $c_2 = \frac{1}{8} - \sqrt{ed(r)} c > 0$ .

Із (5) і (7) при  $\bar{\theta}_n(s) > c$ ,  $|t| \leq T_n^{(2)}$  і  $n \geq 2$

$$\left| \prod_{k=1}^n f_{nk}(t) - e^{-\frac{1}{2}t^2} \right| \leq d(r) |t|^r \sum_{i=1}^n \sigma_{ni}^r \theta_{ni}(s) e^{-c_2 t^2} \leq \bar{\sigma}_n^{r-2} \bar{\theta}_n(s) d(r) |t|^r e^{-c_2 t^2}. \tag{8}$$

Нехай  $\bar{\theta}_n(s) > c$  і  $n \geq 2$ . Покладемо у (4)  $T = T_n^{(2)}$ . Будемо вважати, що  $\frac{1}{T_n^{(2)}} \leq \bar{\sigma}_n^{r-2} \bar{\theta}_n(s)$ . Оскільки у протилежному випадку  $\frac{1}{T_n^{(2)}} > \bar{\sigma}_n^{r-2} \bar{\theta}_n(s)$ ,  $\bar{\sigma}_n \left( \frac{\bar{\theta}_n(s)}{c} \right)^{\frac{1}{r-2}} > \bar{\sigma}_n^{r-2} \bar{\theta}_n(s)$ , справедлива нерівність  $\bar{\sigma}_n^{r-2} \bar{\theta}_n(s) c^{\frac{1}{r-3}} > 1$ . Тоді  $\rho_n = \sup_x |\Phi_n(x) - \Phi(x)| \leq 1$ , то  $\rho_n \leq 1 < \bar{\sigma}_n^{r-2} \bar{\theta}_n(s) c^{\frac{1}{r-3}}$  і нерівність (2) виконується.

Враховуючи наведене припущення  $\frac{1}{T_n^{(2)}} \leq \bar{\sigma}_n^{r-2} \bar{\theta}_n(s)$ , із (4) і (8)

$$\begin{aligned}
 \rho_n &\leq \frac{2}{\pi} \int_0^{T_n^{(2)}} \left| \prod_{k=1}^n f_{nk}(t) - e^{-\frac{1}{2}t^2} \right| \frac{dt}{t} + \frac{24}{\pi \sqrt{2\pi} T_n^{(2)}} \leq \\
 &\leq \bar{\sigma}_n^{r-2} \bar{\theta}_n(s) d(r) \frac{2}{\pi} \int_0^{T_n^{(2)}} t^{r-1} e^{-c_2 t^2} dt + \frac{24}{\pi \sqrt{2\pi}} \bar{\sigma}_n^{r-2} \bar{\theta}_n(s) \leq C_3 \bar{\sigma}_n^{r-2} \bar{\theta}_n(s),
 \end{aligned}$$

де надалі  $C_k$  – сталі, що залежать тільки від  $c$  і  $s$ .

У випадку  $\bar{\theta}_n(s) > c$  нерівність (2) теореми доведена.

Нехай  $\bar{\theta}_n(s) \leq c$ ,  $n \geq 2$ .

Із умови (1) теореми і (6) при  $|t| \leq T_n^{(1)}$

$$\begin{aligned}
 |f_{nk}(t)| &\leq e^{-\frac{t^2 \sigma_{nk}^2}{4}} \left( 1 + e^{\frac{t^2 \sigma_{nk}^2}{4}} d(r) |t|^r \sigma_{nk}^r \theta_{nk}(s) \right) \leq \\
 &\leq e^{-\frac{t^2 \sigma_{nk}^2}{4}} \left( 1 + e^{\frac{(T_n^{(1)})^2 \sigma_{nk}^2}{4}} (T_n^{(1)})^{r-2} d(r) t^2 \sigma_{nk}^r \theta_{nk}(s) \right) \leq \\
 &\leq e^{-\frac{t^2 \sigma_{nk}^2}{4}} \left( 1 + d(r) t^2 (\bar{\theta}_n(s))^{-\frac{1}{2}} (-2 \ln \bar{\theta}_n(s))^{\frac{r-2}{2}} \bar{\sigma}_n^{2-s} \sigma_{nk}^s \theta_{nk}(s) \right).
 \end{aligned}$$

Тоді, із умови  $\bar{\sigma}_n^2 \leq \frac{3}{4}$  при  $n \geq 2$ ,

$$\begin{aligned} \psi_{ni}(t) &\leq \prod_{k=1}^{i-1} e^{-\frac{t^2 \sigma_{nk}^2}{2}} \prod_{k=i+1}^n e^{-\frac{t^2 \sigma_{nk}^2}{4}} \left( 1 + d(r)t^2 \sqrt{\frac{(-2 \ln \bar{\theta}_n(s))^{r-2}}{\bar{\theta}_n(s)} \bar{\sigma}_n^{2-s} \sigma_{nk}^s \theta_{nk}(s)} \right) \leq \\ &\leq \exp \left\{ -\frac{t^2}{4} (1 - \sigma_{ni}^2) + d(r)t^2 \sqrt{\frac{(-2 \ln \bar{\theta}_n(s))^{r-2}}{\bar{\theta}_n(s)} \bar{\sigma}_n^{2-s} \sum_{k=i+1}^n \sigma_{nk}^s \theta_{nk}(s)} \right\} \leq \\ &\leq \exp \left\{ -\frac{t^2}{4} (1 - \sigma_{ni}^2) + d(r)t^2 \sqrt{\bar{\theta}_n(s) (-2 \ln \bar{\theta}_n(s))^{r-2}} \right\} \leq \\ &\leq \exp \left\{ -t^2 \left( \frac{1}{16} - d(r) \left( -2 (\bar{\theta}_n(s))^{r-2} \ln \bar{\theta}_n(s) \right)^{\frac{r-2}{2}} \right) \right\}. \end{aligned}$$

Оскільки функція  $x^{\frac{1}{r-2}} \ln x$  є спадною при  $x \in (0; e^{2-r})$ , а  $\bar{\theta}_n(s) \leq c \leq e^{-9n\bar{\sigma}_n^2} < e^{2-r}$ , то

$$\psi_{ni}(t) \leq \exp \left\{ -t^2 \left( \frac{1}{16} - d(r) \left( -2c^{\frac{1}{r-2}} \ln c \right)^{\frac{r-2}{2}} \right) \right\} = e^{-c_1 t^2}, \quad (9)$$

де  $c_1 = \frac{1}{16} - d(r) \sqrt{c(-2 \ln c)^{r-2}} > 0$ .

Із (5) і (9) при  $\bar{\theta}_n(s) \leq c$ ,  $|t| \leq T_n^{(1)}$  і  $n \geq 2$

$$\left| \prod_{k=1}^n f_{nk}(t) - e^{-\frac{1}{2}t^2} \right| \leq d(r)|t|^r e^{-c_1 t^2} \sum_{i=1}^n \sigma_{ni}^r \theta_{ni}(s) \leq \bar{\sigma}_n^{r-2} \bar{\theta}_n(s) d(r) |t|^r e^{-c_1 t^2}. \quad (10)$$

Покладемо у (4)  $T = \frac{c}{\bar{\sigma}_n} (\bar{\theta}_n(s))^{-p}$ ,  $T' = \min \left\{ T; T_n^{(1)} \right\}$ . Тоді із (4)

$$\begin{aligned} \rho_n &\leq \frac{2}{\pi} \int_0^{T'} \left| \prod_{k=1}^n f_{nk}(t) - e^{-\frac{1}{2}t^2} \right| \frac{dt}{t} + \frac{24}{\pi \sqrt{2\pi} T} \leq \\ &\leq \frac{2}{\pi} \int_0^{T'} \left| \prod_{k=1}^n f_{nk}(t) - e^{-\frac{1}{2}t^2} \right| \frac{dt}{t} + \frac{2}{\pi} \int_{T'}^T \left| \prod_{k=1}^n f_{nk}(t) \right| \frac{dt}{t} + \frac{2}{\pi} \int_{T'}^T e^{-\frac{1}{2}t^2} \frac{dt}{t} + \\ &+ \frac{24}{\pi \sqrt{2\pi} c} \bar{\sigma}_n (\bar{\theta}_n(s))^p = I_1 + I_2 + I_3 + \frac{24}{\pi \sqrt{2\pi} c} \bar{\sigma}_n (\bar{\theta}_n(s))^p. \quad (11) \end{aligned}$$

Оскільки  $T' \leq T_n^{(1)}$ , то із (10)

$$I_1 = \frac{2}{\pi} \int_0^{T'} \left| \prod_{k=1}^n f_{nk}(t) - e^{-\frac{1}{2}t^2} \right| \frac{dt}{t} \leq \bar{\sigma}_n^{r-2} \bar{\theta}_n(s) d(r) \frac{2}{\pi} \int_0^{T'} t^{r-2} e^{-c_1 t^2} dt \leq C_4 \bar{\sigma}_n^{r-2} \bar{\theta}_n(s). \quad (12)$$

Із (1) і (6) при  $\bar{\theta}_n(s) \leq c$ ,  $|t| > T_n^{(1)} = \frac{1}{\bar{\sigma}_n} \sqrt{-2 \ln \bar{\theta}_n(s)}$

$$\left| \prod_{k=1}^n f_{nk}(t) \right| \leq \prod_{k=1}^n \left( e^{-\frac{t^2 \sigma_{nk}^2}{2}} + \omega_{nk}(t) \right) \leq \prod_{k=1}^n \left( e^{-\frac{(T_n^{(1)})^2 \sigma_{nk}^2}{2}} + |t|^s \sigma_{nk}^s \theta_{nk}(s) \right) =$$

$$\begin{aligned}
&= \prod_{k=1}^n \left( (\bar{\theta}_n(s))^{\frac{\sigma_{nk}^2}{\bar{\sigma}_n^2}} + |t|^s \sigma_{nk}^s \theta_{nk}(s) \right) = \\
&= (\bar{\theta}_n(s))^{\frac{1}{\bar{\sigma}_n^2}} \prod_{k=1}^n \left( 1 + (\bar{\theta}_n(s))^{-\frac{\sigma_{nk}^2}{\bar{\sigma}_n^2}} |t|^s \sigma_{nk}^s \theta_{nk}(s) \right)
\end{aligned}$$

і, використавши нерівність  $x_i \geq 0, i = 1, \dots, n$ ,  $\prod_{i=1}^n x_i \leq \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \right)^n$ , одержуємо

$$\begin{aligned}
\left| \prod_{k=1}^n f_{nk}(t) \right| &\leq (\bar{\theta}_n(s))^{\frac{1}{\bar{\sigma}_n^2}} \left( 1 + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (\bar{\theta}_n(s))^{-\frac{\sigma_{nk}^2}{\bar{\sigma}_n^2}} |t|^s \sigma_{nk}^s \theta_{nk}(s) \right)^n \leq \\
&\leq (\bar{\theta}_n(s))^{\frac{1}{\bar{\sigma}_n^2}} \left( 1 + |t|^s (\bar{\theta}_n(s))^{-1} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sigma_{nk}^s \theta_{nk}(s) \right)^n = \\
&= (\bar{\theta}_n(s))^{\frac{1}{\bar{\sigma}_n^2}} \left( 1 + \bar{\sigma}_n^{s-2} |t|^s \frac{1}{n} \right)^n \leq (\bar{\theta}_n(s))^{\frac{1}{\bar{\sigma}_n^2}} (1 + \bar{\sigma}_n^s |t|^s)^n.
\end{aligned}$$

Оскільки  $\bar{\theta}_n(s) \leq c \leq e^{-9n\bar{\sigma}_n^2} \leq e^{-9}$  і  $|t| > T_n^{(1)}$ , то

$$|t| \bar{\sigma}_n > \bar{\sigma}_n T_n^{(1)} = \sqrt{-2 \ln \theta_n(s)} \geq \sqrt{-2 \ln c} \geq \sqrt{18}.$$

Тому при  $|t| > T_n^{(1)}$

$$\left| \prod_{k=1}^n f_{nk}(t) \right| \leq (1 + 18^{-\frac{s}{2}})^n (\bar{\theta}_n(s))^{\frac{1}{\bar{\sigma}_n^2}} (\bar{\sigma}_n^s |t|^s)^n \leq 2^n (\bar{\theta}_n(s))^{\frac{1}{\bar{\sigma}_n^2}} (|t| \bar{\sigma}_n)^{sn}. \quad (13)$$

Будемо вважати, що  $T' = T_n^{(1)}$ , бо інакше  $I_2 = 0, I_3 = 0$ , і справедливність нерівності (2) випливає із (11), (12). Із (13)

$$I_2 = \frac{2}{\pi} \int_{T'}^T \left| \prod_{k=1}^n f_{nk}(t) \right| \frac{dt}{t} \leq \frac{2^{n+1}}{n} (\bar{\theta}_n(s))^{\frac{1}{\bar{\sigma}_n^2}} \bar{\sigma}_n^{sn} \int_{T_n^{(1)}}^T t^{sn-1} dt. \quad (14)$$

Нехай  $s \geq \frac{1}{6n\bar{\sigma}_n^2}$ . Оскільки  $\bar{\theta}_n(s) \leq c, \frac{1}{\bar{\sigma}_n^2} - spn \geq p$ , то  $c^s \leq e^{-\frac{3}{2}}$  і при  $n \geq 2$

$$\begin{aligned}
I_2 &\leq \frac{2^{n+1}}{\pi sn} (\bar{\theta}_n(s))^{\frac{1}{\bar{\sigma}_n^2}} \bar{\sigma}_n^{sn} T^{sn} = \frac{2^{n+1}}{\pi sn} (\bar{\theta}_n(s))^{\frac{1}{\bar{\sigma}_n^2} - spn} c^{sn} \leq \\
&\leq \frac{12}{\pi} \bar{\sigma}_n^2 (\bar{\theta}_n(s))^p (2c^s)^n \leq \bar{\sigma}_n (\bar{\theta}_n(s))^p \frac{24\sqrt{3}}{\pi e^3}.
\end{aligned} \quad (15)$$

Нехай  $s < \frac{1}{6n\bar{\sigma}_n^2}, n \geq 2, \bar{\sigma}_n^2 \leq \frac{3}{4}$ . Із цих умов випливає, що

$$\frac{1}{\bar{\sigma}_n^2 (sn + 1)} \geq \frac{1}{\bar{\sigma}_n^2 \left( \frac{1}{6\bar{\sigma}_n^2} + 1 \right)} \geq \frac{1}{\frac{1}{6} + \frac{3}{4}} > 1.$$

Тоді  $p = 1 + \frac{1}{\bar{\sigma}_n^2} - sn > \frac{1}{\bar{\sigma}_n^2} - \frac{1}{6\bar{\sigma}_n^2} \geq \frac{10}{9}$ . Тому із (14) (враховуємо, що  $\bar{\sigma}_n T_n^{(1)} > \sqrt{18}$ )

$$\begin{aligned} I_2 &\leq \frac{2^{n+1}}{\pi} (\bar{\theta}_n(s))^{\frac{1}{\bar{\sigma}_n^2}} \bar{\sigma}_n^{sn} \int_{T_n^{(1)}}^T t^{sn - \frac{8}{9} - \frac{1}{9}} dt \leq \\ &\leq \frac{2^{n+1}}{\pi} (\bar{\theta}_n(s))^{\frac{1}{\bar{\sigma}_n^2}} \bar{\sigma}_n^{sn} (T_n^{(1)})^{-\frac{1}{9}} T^{sn + \frac{1}{9}} \frac{1}{sn + \frac{1}{9}} \leq \\ &\leq \frac{2^n 18}{\pi} 18^{-\frac{1}{18}} (\bar{\theta}_n(s))^{\frac{1}{\bar{\sigma}_n^2} - sn - \frac{1}{9}} c^{sn + \frac{1}{9}} \leq \bar{\sigma}_n \bar{\theta}_n(s) \frac{18}{\pi} 18^{-\frac{1}{18}} c^{-1} \frac{1}{\bar{\sigma}_n} \left(2^n \bar{\sigma}_n^2 c\right)^{\frac{1}{\bar{\sigma}_n^2}} \leq \\ &\leq \bar{\sigma}_n \bar{\theta}_n(s) \frac{18}{\pi} 18^{-\frac{1}{18}} c^{-1} \sqrt{n} (2e^{-9})^n \leq \bar{\sigma}_n \bar{\theta}_n(s) \frac{1}{\pi} 18^{1 - \frac{1}{18}} c^{-1} \sqrt{2} (2e^{-9})^2. \end{aligned} \quad (16)$$

Враховуючи, що  $\bar{\theta}_n(s) \leq c$ ,  $\bar{\sigma}_n T_n^{(1)} > \sqrt{18}$  і  $\bar{\sigma}_n^2 \leq \frac{3}{4}$  при  $n \geq 2$ , одержимо

$$\begin{aligned} I_3 &= \frac{2}{\pi} \int_{T_n^{(1)}}^T e^{-\frac{1}{2}t^2} \frac{dt}{t} \leq \frac{2}{\pi} (T_n^{(1)})^{-2} e^{-\frac{1}{2}(T_n^{(1)})^2} = \frac{2}{\pi} (T_n^{(1)})^{-2} (\bar{\theta}_n(s))^{\frac{1}{\bar{\sigma}_n^2}} \leq \\ &\leq \frac{1}{9\pi} \bar{\sigma}_n^2 (\bar{\theta}_n(s))^{\frac{1}{\bar{\sigma}_n^2}} \leq \frac{1}{9\pi} \bar{\sigma}_n^2 (\bar{\theta}_n(s))^{\frac{4}{3}} \leq \bar{\sigma}_n \bar{\theta}_n(s) \frac{1}{9\pi} c^{\frac{1}{3}}. \end{aligned} \quad (17)$$

У випадку  $n \geq 2$ ,  $\bar{\theta}_n(s) \leq c$  нерівність (2) теореми впливає із (11), (12), (14)–(17).

Нехай  $n = 1$ . Тоді  $\bar{\sigma}_n^2 = 1$ ,  $\bar{\theta}_1(s) = \theta_{11}(s)$ . Якщо  $\theta_{11}(s) > c$ , то  $\rho_1 \leq 1 < \frac{1}{c} \theta_{11}(s)$ . Якщо  $\theta_{11}(s) \leq c$  і  $s > 0$ , то  $p = \frac{1}{s+1}$ . Із (4), умови (1) теореми і визначення  $T$

$$\begin{aligned} \rho_1 &\leq \frac{2}{\pi} \int_0^T \left| f_{11}(t) - e^{-\frac{1}{2}t^2} \right| \frac{dt}{t} + \frac{24}{\pi \sqrt{2\pi} T} \leq \theta_{11}(s) \frac{2}{\pi} \int_0^T t^{s-1} dt + \frac{24}{\pi \sqrt{2\pi} T} = \\ &= \theta_{11}(s) \frac{2}{\pi s} T^s + \frac{24}{\pi \sqrt{2\pi} T} = \frac{2c^s}{\pi s} (\theta_{11}(s))^{1-sp} + \frac{24}{\pi \sqrt{2\pi} c} (\theta_{11}(s))^p \leq C_7 \left(1 + \frac{1}{s}\right) (\theta_{11}(s))^p. \end{aligned}$$

Із одержаних оцінок для  $\rho_1$  впливає нерівність (3). Теорема доведена.

**3. Деякі наслідки.** Введемо псевдомоменти вигляду

$$\begin{aligned} \nu_{nk}^{(0)}(r) &= \int_{-\infty}^{\infty} \max(1, |x|^r) |d(F_{nk}(x\sigma_{nk}) - \Phi(x))|, \\ \bar{\nu}_n^{(0)}(r) &= \bar{\sigma}_n^2 \sum_{k=1}^n \nu_{nk}^{(0)}(r); \\ \kappa_{nk}^{(0)}(r) &= \int_{-\infty}^{\infty} \max(1, r|x|^{r-1}) |F_{nk}(x\sigma_{nk}) - \Phi(x)| dx, \\ \bar{\kappa}_n^{(0)}(r) &= \bar{\sigma}_n \sum_{k=1}^n \kappa_{nk}^{(0)}(r) \sigma_{nk}; \\ \kappa_{nk}(r) &= r \int_{-\infty}^{\infty} |x|^{r-1} |F_{nk}(x\sigma_{nk}) - \Phi(x)| dx, \\ \bar{\kappa}_n(r) &= \bar{\sigma}_n^{2-r} \sum_{k=1}^n \kappa_{nk}(r) \sigma_{nk}^r. \end{aligned}$$

**Наслідок 1.** Нехай  $\bar{\sigma}_n^2 \leq \frac{3}{4}$  для  $n \geq 2$ ,  $2 < r \leq 3$ . Існують сталі  $C^{(1)}$ ,  $C^{(2)}$ ,  $C^{(3)}$ , що для всіх  $n \geq 1$  справедливі нерівності

$$\rho_n \leq C^{(1)} \bar{\sigma}_n^{r-2} \bar{\nu}_n^{(0)}(r), \quad (18)$$

$$\rho_n \leq C^{(2)} \max \left\{ \bar{\sigma}_n^{r-2} \bar{\kappa}_n^{(0)}(r); \bar{\sigma}_n \left( \bar{\kappa}_n^{(0)}(r) \right)^{\frac{1}{\bar{\sigma}_n^2(n+1)}} \right\}, \quad (19)$$

$$\rho_n \leq C^{(3)} \max \left\{ \bar{\sigma}_n^{r-2} \bar{\kappa}_n(r); \bar{\sigma}_n \left( \bar{\kappa}_n(r) \right)^{\frac{1}{\bar{\sigma}_n^2(rn+1)}} \right\}. \quad (20)$$

Для доведення наслідку будемо використовувати лему.

**Лема.** Для всіх  $t \in \mathbb{R}$  мають місце нерівності:

$$\omega_{nk}(t) \leq \nu_{nk}^{(0)}(r) \min \left( 1, \frac{|t|^r \sigma_{nk}^r}{6^{r-2}} \right), \quad (21)$$

$$\omega_{nk}(t) \leq \kappa_{nk}^{(0)}(r) \min \left( |t| \sigma_{nk}, \frac{2^{5-2r}}{r} |t|^r \sigma_{nk}^r \right), \quad (22)$$

$$\omega_{nk}(t) \leq \kappa_{nk}(r) \frac{2^{5-2r}}{r} |t|^r \sigma_{nk}^r. \quad (23)$$

**Доведення.** Враховуючи, що  $M\xi_{nk} = 0$ ,  $D\xi_{nk} = \sigma_{nk}^2$ , одержуємо

$$\begin{aligned} \omega_{nk}(t) &= \left| f_{nk}(t) - e^{-\frac{t^2 \sigma_{nk}^2}{2}} \right| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} d \left( F_{nk}(x) - \Phi \left( \frac{x}{\sigma_{nk}} \right) \right) \right| = \\ &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} \left( e^{itx} - 1 - itx - \frac{(itx)^2}{2} \right) d \left( F_{nk}(x) - \Phi \left( \frac{x}{\sigma_{nk}} \right) \right) \right| = \\ &= |t| \left| \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} \left( F_{nk}(x) - \Phi \left( \frac{x}{\sigma_{nk}} \right) \right) dx \right| = |t| \left| \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{itx} - 1 - itx) \left( F_{nk}(x) - \Phi \left( \frac{x}{\sigma_{nk}} \right) \right) dx \right|. \quad (24) \end{aligned}$$

Із рівностей (24)

$$\begin{aligned} \omega_{nk}(t) &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} d \left( F_{nk}(x) - \Phi \left( \frac{x}{\sigma_{nk}} \right) \right) \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} \left| d \left( F_{nk}(x) - \Phi \left( \frac{x}{\sigma_{nk}} \right) \right) \right| \leq \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} \max \left( 1, \frac{|x|^r}{\sigma_{nk}^r} \right) \left| d \left( F_{nk}(x) - \Phi \left( \frac{x}{\sigma_{nk}} \right) \right) \right| = \int_{-\infty}^{\infty} \max(1, |x|^r) |d(F_{nk}(x\sigma_{nk}) - \Phi(x))| = \nu_{nk}^{(0)}(r). \quad (25) \end{aligned}$$

Використовуючи нерівність ([2], стор. 372)

$$\left| e^{iz} - \sum_{j=0}^m \frac{(iz)^j}{j!} \right| \leq \frac{2^{1-\gamma} |z|^{m+\gamma}}{m!(m+1)^\gamma}, \quad 0 \leq \gamma \leq 1, \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad (26)$$

при  $\gamma = r - 2$ ,  $m = 2$  із (24)

$$\begin{aligned} \omega_{nk}(t) &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} \left( e^{itx} - 1 - itx - \frac{(itx)^2}{2} \right) d \left( F_{nk}(x) - \Phi \left( \frac{x}{\sigma_{nk}} \right) \right) \right| \leq \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} \left| e^{itx} - 1 - itx - \frac{(itx)^2}{2} \right| \left| d \left( F_{nk}(x) - \Phi \left( \frac{x}{\sigma_{nk}} \right) \right) \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|tx|^r}{6^{r-2}} \left| d \left( F_{nk}(x) - \Phi \left( \frac{x}{\sigma_{nk}} \right) \right) \right| \leq \\ &\leq \frac{|t|^r \sigma_{nk}^r}{6^{r-2}} \int_{-\infty}^{\infty} \max \left( 1, \frac{|x|^r}{\sigma_{nk}^r} \right) \left| d \left( F_{nk}(x) - \Phi \left( \frac{x}{\sigma_{nk}} \right) \right) \right| = \nu_{nk}^{(0)}(r) \frac{|t|^r \sigma_{nk}^r}{6^{r-2}}. \end{aligned} \quad (27)$$

Із (25) і (27) одержуємо нерівність (21). Із рівностей (24)

$$\begin{aligned} \omega_{nk}(t) &= |t| \left| \int_{-\infty}^{\infty} (e^{itx} - 1 - itx) \left( F_{nk}(x) - \Phi \left( \frac{x}{\sigma_{nk}} \right) \right) dx \right| \leq \\ &\leq |t| \int_{-\infty}^{\infty} |e^{itx} - 1 - itx| \left| F_{nk}(x) - \Phi \left( \frac{x}{\sigma_{nk}} \right) \right| dx. \end{aligned} \quad (28)$$

Із (28) і нерівності (26) при  $\gamma = r - 2$ ,  $m = 1$

$$\begin{aligned} \omega_{nk}(t) &\leq |t| \int_{-\infty}^{\infty} 2^{5-2r} |tx|^{r-1} \left| F_{nk}(x) - \Phi \left( \frac{x}{\sigma_{nk}} \right) \right| dx = \\ &= \frac{2^{5-2r} |t|^r \sigma_{nk}^r}{r} \int_{-\infty}^{\infty} r |x|^{r-1} |F_{nk}(x\sigma_{nk}) - \Phi(x)| dx = \kappa_{nk}(r) \frac{2^{5-2r} |t|^r \sigma_{nk}^r}{r}. \end{aligned}$$

Нерівність (23) доведена. Із попередньої нерівності

$$\begin{aligned} \omega_{nk}(t) &\leq \frac{2^{5-2r} |t|^r \sigma_{nk}^r}{r} \int_{-\infty}^{\infty} r |x|^{r-1} |F_{nk}(x\sigma_{nk}) - \Phi(x)| dx \leq \\ &\leq \frac{2^{5-2r} |t|^r \sigma_{nk}^r}{r} \int_{-\infty}^{\infty} \max(1, r|x|^{r-1}) |F_{nk}(x\sigma_{nk}) - \Phi(x)| dx = \kappa_{nk}^{(0)}(r) \frac{2^{5-2r} |t|^r \sigma_{nk}^r}{r} \end{aligned}$$

і

$$\begin{aligned} \omega_{nk}(t) &= |t| \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \left( F_{nk}(x) - \Phi \left( \frac{x}{\sigma_{nk}} \right) \right) dx \right| \leq |t| \int_{-\infty}^{\infty} \left| F_{nk}(x) - \Phi \left( \frac{x}{\sigma_{nk}} \right) \right| dx = \\ &= |t| \sigma_{nk} \int_{-\infty}^{\infty} |F_{nk}(x\sigma_{nk}) - \Phi(x)| dx \leq |t| \sigma_{nk} \kappa_{nk}^{(0)}(r) \end{aligned}$$

одержимо нерівність (22). Лема доведена.

**Доведення наслідку 1.** Із леми випливає, що в теоремі можна покласти  $s = 0$ ,  $\theta_{nk}(0, r) = \nu_{nk}^{(0)}$ ,  $d(r) = 6^{2-r}$ . Тоді одержимо (18) для  $n \geq 2$  і

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \sup_x |\Phi_1(x) - \Phi(x)| = \sup_x |F_{11}(x) - \Phi(x)| = \\ &= \sup_x \left| \int_{-\infty}^x d(F_{11}(u) - \Phi(u)) \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |d(F_{11}(u) - \Phi(u))| \leq \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} \max(1, |x|^r) |d(F_{11}(x) - \Phi(x))| = \nu_{11}^{(0)}(r). \end{aligned}$$

Якщо в теоремі покласти  $s = 1$  і  $\theta_{nk}(1, r) = \kappa_{nk}^{(0)}(r)$ ,  $d(r) = \frac{2^{5-2r}}{r}$ , то із леми одержимо (19).

Якщо ж в теоремі покласти  $s = r$  і  $\theta_{nk}(r, r) = \kappa_{nk}(r)$ ,  $d(r) = \frac{2^{5-2r}}{r}$ , то із леми одержимо (20). Наслідок 1 доведений.

Нехай  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$  – послідовність незалежних випадкових величин з математичним сподіванням  $M\xi_i = 0$ , дисперсією  $D\xi_i = \sigma_i^2$ ,  $B_n^2 = \sigma_1^2 + \dots + \sigma_n^2$ . Позначимо через  $F_k(x)$  функцію розподілу випадкової величин  $\xi_k$  і покладемо  $\frac{\xi_k}{B_n} = \xi_{nk}$ . Тоді

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n}{B_n}, F_{nk}(x) = F_k(xB_n), \sigma_{nk}^2 = \frac{\sigma_k^2}{B_n^2}, \bar{\sigma}_n^2 = \frac{\sigma^2}{B_n^2}, \sigma = \max_{1 \leq k \leq n} \sigma_k; \\ \nu_k^{(0)}(r) &= \int_{-\infty}^{\infty} \max(1, |x|^r) |d(F_k(x\sigma_k) - \Phi(x))|, \bar{\nu}_n^{(0)}(r) = \frac{\sigma^2}{B_n^2} \sum_{k=1}^n \nu_k^{(0)}(r); \\ \kappa_k^{(0)}(r) &= \int_{-\infty}^{\infty} \max(1, r|x|^{r-1}) |F_k(x\sigma_k) - \Phi(x)| dx, \bar{\kappa}_n^{(0)}(r) = \frac{\sigma}{B_n^2} \sum_{k=1}^n \kappa_k^{(0)}(r)\sigma_k; \\ \kappa_k(r) &= r \int_{-\infty}^{\infty} |x|^{r-1} |F_k(x\sigma_k) - \Phi(x)| dx, \bar{\kappa}_n(r) = \frac{\sigma^{2-r}}{B_n^2} \sum_{k=1}^n \kappa_k(r)\sigma_k^r. \end{aligned}$$

**Наслідок 2.** Нехай  $\frac{\sigma^2}{B_n^2} \leq \frac{3}{4}$  для  $n \geq 2$ . Тоді

$$\begin{aligned} \rho_n &\leq C_1 \left( \frac{\sigma}{B_n} \right)^{r-2} \bar{\nu}_n^{(0)}(r), \\ \rho_n &\leq C_2 \max \left\{ \left( \frac{\sigma}{B_n} \right)^{r-2} \bar{\kappa}_n^{(0)}(r); \frac{\sigma}{B_n} \left( \bar{\kappa}_n^{(0)}(r) \right)^{\frac{B_n^2}{\sigma^{2(n+1)}}} \right\}, \\ \rho_n &\leq C_3 \max \left\{ \left( \frac{\sigma}{B_n} \right)^{r-2} \bar{\kappa}_n(r); \frac{\sigma}{B_n} \left( \bar{\kappa}_n(r) \right)^{\frac{B_n^2}{\sigma^{2(rn+1)}}} \right\}. \end{aligned}$$

Оцінки Золотарьова із [1] впливають із цих нерівностей.

1. Zolotarev V. M. Exactness of an approximation in the central limit theorem // Proceedings of the Second Japan – USSR Symposium on Probability Theory. – Berlin: Springer-Verlag, 1973. – P. 531–543.
2. Золотарёв В. М. Современная теория суммирования независимых случайных величин. – М.: Наука, 1986. – 416 с.
3. Mishura Yuliya, Munchak Yevheniya, Slyusarchuk Petro The rate of convergence to the normal law in terms of pseudomoments // Modern Stochastics: Theory and Applications. – 2015. – Vol. 2, № 2. – P. 95–106.

4. Мішура Ю., Мунчак С. Швидкість збіжності цін опціонів з використанням методу псевдомоментів // Теорія ймовірностей і математична статистика. – 2015. – Т. 92. – С. 110–124.
5. Смосарчук П. В., Поляк І. Й. Узагальнення одного результату В. М. Золотарьова // Науковий вісник Ужгородського ун-ту. Серія матем. – 1998. – Вип. 3. – С. 184–189.
6. Боярищева Т. В., Смосарчук П. В. Оцінка швидкості збіжності в центральній граничній теоремі для різнорозподілених величин // Науковий вісник Ужгородського ун-ту. Серія матем. – 1999. – Вип. 4. – С. 12–16.
7. Лозєв М. Теория вероятностей. – М.: Изд-во иностр. лит., 1962. – 720 с.

Одержано 25.09.2018